Quelles alternatives pour l'enseignement du calcul algébrique au collège ?

Céline Constantin

► **To cite this version:**

Céline Constantin. Quelles alternatives pour l'enseignement du calcul algébrique au collège ?. Education. Aix-Marseille Université, 2014. Français. NNT : . tel-01119729

HAL Id: tel-01119729
https://hal.science/tel-01119729

Submitted on 25 Feb 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

AIX MARSEILLE UNIVERSITE

ECOLE DOCTORALE EN MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE DE MARSEILLE

UFR DE MATHEMATIQUES

INSTITUT DE MATHEMATIQUES DE MARSEILLE

Thèse présentée pour obtenir le grade universitaire de docteur

Discipline : Mathématiques

Céline CONSTANTIN

Quelles alternatives pour l'enseignement du calcul algébrique au collège ?

Soutenue le 12/12/2014 devant le jury :

Aline ROBERT, Université Paris Diderot et Université de Cergy Pontoise	Rapportrice
Jérôme PROULX, Université du Québec à Montréal	Rapporteur
Teresa ASSUDE, Aix-Marseille Université	Présidente
Jean-Philippe DROUHARD, Université de Buenos Aires	Examinateur
Nicolas GRENIER-BOLEY, Université de Rouen	Examinateur
Christian MAUDUIT, Aix-Marseille Université	Examinateur
Pierre ARNOUX, Aix-Marseille Université	Directeur de thèse
Lalina COULANGE, Université de Bordeaux	Directrice de thèse
Alain MERCIER, Aix-Marseille Université	Invité

Remerciements

Je ne saurai remercier assez Lalina Coulange et Pierre Arnoux de s'être engagés dans la co-direction de cette thèse. Leur soutien toujours bienveillant et la richesse de leurs points de vue sur la réflexion en cours m'ont été précieux. Je remercie infiniment Jean-Philippe Drouhard pour ses apports théoriques et pour l'enthousiasme partagé qui les ont accompagnés. Je remercie vivement Aline Robert et Jérôme Proulx d'avoir accepté de rapporter sur cette thèse, et ainsi de m'avoir permis de prendre de la distance face au travail accompli et d'en apercevoir de nouveaux aspects à explorer. Je remercie également Nicolas Grenier-Boley et Christian Mauduit d'avoir accepté de faire partie du jury de cette thèse et pour tout l'intérêt qu'ils y ont porté. Je remercie Teresa Assude d'en avoir assuré la présidence, ainsi que pour ses conseils avisés en fin de parcours. Je remercie enfin Alain Mercier qui a été présent aux origines de ce travail pour les premières pistes explorées. Toute ma gratitude va également à tous les élèves et enseignants qui ont participé de près ou de loin à cette recherche, et qui en sont la raison d'être.

Sommaire

Introduction

Cette recherche s'intéresse à l'élaboration d'alternatives pour enseigner le calcul algébrique au collège. Elle trouve son origine dans les observations récurrentes de difficultés d'élèves en algèbre élémentaire. Les erreurs de calcul résistent, et continuent à être observées à intervalles réguliers dans le temps (par exemple dans Tonnelle 1979, Bardini 2001, Croset 2009, Constantin & Coulange 2012), et ce malgré les nombreuses recherches consacrées à ce domaine (Coulange & al. 2012). Des pistes de travail sont engagées depuis plusieurs années dans le cadre de la théorie anthropologique (Chevallard et Bosch 2012, Ruiz-Munzón 2010, Ruiz-Munzón, Matheron, Bosch & Gascón 2012 pour les plus récents). Les ingénieries envisagées proposent une *reconstruction de l'outil algébrique* allant de pair avec une *reconstruction du contenu du travail algébrique* (Chevallard & Bosch 2012) fondé par un emploi *modélisant* de l'algèbre. Les auteurs notent toutefois une certaine inertie et un potentiel encore faiblement exploré des propositions héritées de la recherche dans les pratiques, et ce malgré une certaine volonté dans le sens de cette reconstruction que laissent transparaître les programmes. La rénovation des questions générant l'étude de classes de problèmes que permettent les techniques algébriques, se heurte par exemple à l'absence de la notion de paramètre. D'autres recherches (Coulange & Grugeon 2008 ou Wozniak 2012) témoignent de tentatives inabouties dans les classes, conséquence d'un manque d'équipement praxéologique (Chevallard 2011) des professeurs, qui n'ont pas conscience de l'existence d'enjeux de savoirs liés à la démarche de modélisation. La voie tracée offre de nombreuses pistes à explorer pour faire vivre la reconstruction envisagée, en déterminer les conditions d'existence, voire de diffusion, et poursuivre les expérimentations entreprises. Mais les erreurs d'élèves se situent parfois bien en amont de leur convocation dans de nouveaux contextes d'utilisation, notamment à l'entrée au lycée, où les achoppements se révèlent moins dans des reconnaissances d'occasions d'emploi des techniques de calcul algébrique que dans des adaptations fines de connaissances liées à ces techniques (au sens de Robert 2005). Tel est l'un des résultats de l'étude biographique que nous avons menée dans le cadre de notre Master (Constantin 2008), en suivant deux élèves tout au long de leur année de Seconde : ils parviennent à se saisir d'organisations de savoirs nouvelles tandis que les adaptations de techniques de calcul algébrique pourtant anciennes ne cessent de faire obstacle.

Les résultats de cette étude nous ont conduite à centrer notre recherche sur le calcul algébrique proprement dit. Notre entrée se différencie de celle de nombreux travaux en didactique de l'algèbre, anciens (comme ceux menés par les équipes autour de Chevallard dès les années 80) ou plus récents, dont ceux cités plus haut, qui s'intéressent à la dimension outil de l'algèbre dans la perspective de la construction d'une compétence algébrique (Grugeon 1997, Pilet 2012) liant outil et objet (Douady 1991), ou dans celle de la modélisation algébrique dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique. Notre objet d'étude se rapproche à cet égard de celui des travaux de Croset (2009) ou d'autres que nous citerons dans la thèse. Que le lecteur ne se méprenne pas quant à notre propos. Nous n'envisageons pas cette approche comme concurrentielle de celle des travaux axés sur la modélisation, ou sur la dimension outil plus généralement en dialectique avec la dimension objet de l'algèbre, mais bel et bien comme complémentaire, ce que nous défendons dans le premier chapitre de la thèse et que nous espérons prouver au travers de cette recherche.

Les divers outils théoriques auxquels nous nous référons ont pour objet d'approcher au mieux les multiples facettes du travail engagé dans le calcul algébrique. Nous présentons ci-après les principaux axes théoriques investis au fil de notre étude.

Nous nous appuyons tout d'abord sur la théorie anthropologique du didactique qui nous permet d'interroger les savoirs afférents au calcul algébrique selon les institutions qui les voient naître ou vivre, et les relations entre ces savoirs. La prise en compte du phénomène de transposition didactique (Chevallard 1985) permet de distinguer le savoir savant, originaire, tel qu'il est peut exister dans la sphère des mathématiciens, le savoir à enseigner, désigné comme tel par le système éducatif, notamment au travers des textes des programmes, le savoir enseigné, celui qu'on trouve dans les classes, et enfin le savoir appris, tel qu'on peut l'observer chez les élèves (Bosch & Gascón 2005). Etant donné que notre point de départ se situe dans les erreurs d'élèves, l'étude que nous menons est tout d'abord à rebours, depuis les savoirs appris, avec des allers-retours entre les savoirs savants, à enseigner et enseignés. Comment les pratiques s'articulent-elles avec ces savoirs ? Afin d'apporter des éléments de réponse à cette question, nous modélisons tout d'abord l'activité de l'élève en termes de praxéologie (Chevallard 1997). Toutefois, dès notre travail de Master (Constantin 2008), les savoirs mathématiques enseignés nous ont paru insuffisants pour éclairer les adaptations de techniques ou permettre aux élèves d'en identifier les domaines d'efficacité et de validité.

Les outils de l'analyse épistémographique (Drouhard 2013) nous permettent d'apporter un autre regard sur la question de l'articulation des savoirs et de la pratique du calcul algébrique. A l'instar des démarches qui ont pu se dessiner au travers du séminaire SFIDA (Drouhard 2012) les points de vue apportés par les disciplines de la linguistique, ou de la sémiotique nous permettent d'interroger la spécificité des savoirs relatifs aux objets algébriques. Dans la lignée des travaux de Drouhard (2012), nous considérons que les objets de l'algèbre se déploient essentiellement dans trois dimensions (notionnelle, sémio-linguistique, et instrumentale). Cette distinction nous permet d'explorer les différentes natures des savoirs accompagnant la pratique du calcul algébrique, c'est-à-dire des savoirs pertinents, nécessaires, pour mettre en œuvre les techniques, dans toute la complexité des manipulations qu'elles engagent.

Nous nous référons également à un point de vue théorique présent dès l'origine de notre réflexion, alors que les cloisonnements de techniques se faisaient prégnants dans les pratiques des élèves observés en Seconde (Constantin 2008). L'une de nos premières pistes a tout d'abord consisté à chercher ce qui pourrait « unifier » les techniques de calcul algébrique, tout en autorisant les adaptations idoines. Celle-ci est confortée, comme nous le verrons dans le premier chapitre, par le souci de tenir compte de pratiques numériques anciennes. Dans cette perspective, nous envisageons le calcul algébrique comme un ensemble de notions formalisatrices, unificatrices et généralisatrices (ou FUG, Robert 1998). Dans notre second chapitre, c'est au travers de ce prisme que nous abordons, entre autres, une étude d'un processus de transposition possible et qui affleure dans l'enseignement actuel. Ces aspects nous conduisent également à caractériser les liens entre les différents systèmes de nombres qui émergent au fur et à mesure des différents niveaux de classe, le calcul algébrique et la théorie des polynômes sous-jacente. Nous étudions en particulier certaines praxis numériques anciennes susceptibles d'être unifiées, généralisées et formalisées à l'occasion de l'introduction officielle de la distributivité en classe de cinquième. La notion de milieu (Brousseau 1998) complète nos fondements : nous envisageons de construire un milieu lié à ces pratiques préexistantes visant à les unifier, à les généraliser pour différents systèmes de nombres, tout en contribuant à la formalisation de la propriété de distributivité.

Notre thèse se structure en quatre chapitres.

Dans un premier chapitre, des analyses conduites à propos des savoirs à enseigner, enseignés et appris, sur le calcul algébrique, émergent un certain nombre de spécificités dans leur fonctionnement. Le calcul algébrique renvoie à des savoirs à enseigner de nature diverses et à des techniques aux multiples adaptations. Les questions qui nous animent sont les suivantes. Quels sont donc ces savoirs et comment les rendre opérationnels ? Peut-on, et comment, envisager d'autres savoirs susceptibles d'outiller davantage les pratiques, alliant manipulation des écritures et usage des propriétés mathématiques ? Les travaux antérieurs en didactique de l'algèbre sur lesquels nous nous appuyons, convergent pour décrire des pratiques qui ne sont pas sous le contrôle d'une théorie, qu'élèves comme professeur donnent à voir. Ces convergences n'en apportent pas moins des éclairages de nature différente, et nous permettent de caractériser la manière dont les savoirs dysfonctionnent. En particulier, les erreurs d'élèves conduisent à penser que les savoirs à enseigner de nature mathématique ne livrent pas les logiques de fonctionnement des techniques, ni n'en permettent les adaptations idoines selon les formes d'expressions, ou n'en donnent pas les domaines de validité. A défaut, les élèves qui commettent des erreurs fondent leur pratique sur des éléments ostensifs peu pertinents. A partir de ces constats renouvelés, notre analyse explore le caractère opérationnel des savoirs à même de soutenir les techniques de calcul algébrique. La mise en regard de travaux anciens et plus récents observant des institutions où vit en partie la théorie des polynômes, nous permet de conclure que du côté mathématique, le caractère préconstruit des notions fondées sur cette théorie limite *a priori* les possibilités de les constituer comme savoir à enseigner à même d'éclairer les techniques du calcul algébrique. Nous mettons en perspective ces résultats avec d'autres montrant que les discours tenus dans les classes paraissent peu opérants, voire absents ou vulgarisateurs, dans différentes institutions didactiques comme en France aujourd'hui encore. Cet état de l'art nous conduit à interroger tout d'abord la dimension sémio-linguistique du calcul algébrique, et nous amène à étudier la notion de transformation de mouvement (Drouhard 1992). Ensuite, les résultats de nos analyses et des travaux parcourus nous permettent d'envisager les fondements possibles d'une transposition alternative, au regard d'un domaine d'étude plus large, à la fois numérique et algébrique, à partir des caractères formalisateur, unificateur et généralisateur, et ce plus spécifiquement pour un savoir central dans le calcul algébrique : la distributivité.

Dans notre deuxième chapitre, cette réflexion théorique sur la nature des savoirs à enseigner fonde l'étude de la transposition des savoirs à enseigner et enseignés sur la distributivité tout au long de la scolarité obligatoire. Cette étude s'appuie sur des analyses de manuels (de la fin de primaire à la fin du collège) et de discours d’enseignants. Nous identifions des écarts entre un schéma de transposition didactique potentielle, établi au regard des enjeux formalisateur, unificateur et généralisateur des savoirs à enseigner sur la distributivité, et la transposition finalement donnée à voir de ces savoirs dans certains manuels ou discours enseignants. Ceci nous conduit à nous interroger sur les conditions et les contraintes d'une transposition didactique alternative. Nous cherchons en particulier à déterminer sous quelles conditions, l'introduction officielle de la propriété de distributivité pourrait permettre d'unifier, de généraliser et de formaliser des connaissances anciennes, relatives aux pratiques de calcul numérique enseignées en primaire.

Nous consacrons le troisième chapitre à l’élaboration et aux résultats de l’expérimentation d’une telle ingénierie didactique au niveau de la cinquième (élèves de 12-13 ans), qui occupent une place centrale dans notre thèse. L’ingénierie construite repose sur un ensemble de calcul de produits de nombres entiers donnés à effectuer aux élèves, mentalement ou en les posant. L’une des originalités consiste à leur demander ensuite de décrire les techniques mises en œuvre sous une forme particulière : celle d’égalités. A partir de telles écritures, les élèves sont invités à produire des discours pour décrire une « chose commune » à ces égalités, celle-ci conduisant à l’élaboration d’un théorème référent à la fois à la propriété mathématique de distributivité et aux manipulations attenantes. Il s’agit alors d’analyser finement à la fois *a priori* et *a posteriori*, le potentiel de l’approche retenue liant de façon inédite, les aspects à la fois mathématique (Formalisateur, Unificateur et Généralisateur) et sémio-linguistique (transformation de mouvement) de la distributivité. Les questions guidant nos analyses concernent les discours dont les élèves parviennent à s’emparer : justifient-ils et soutiennent-ils leurs techniques de calcul algébrique ? En outre, les organisations des connaissances qui émergent, font-elles le lien entre leurs pratiques calculatoires numériques anciennes et celles en construction, numériques et algébriques ?

A la fin de la thèse, nous amorçons une nouvelle étude didactique et épistémologique, relative à la notion de substitution. Cette notion émerge des analyses conduites dans les premier et second chapitre de la thèse, en lien avec des pratiques de calcul algébrique fréquemment enseignées par ostension et dès lors, relativement « muettes » (Assude, Mercier, Sensevy 2007). Nous réinterrogeons ces pratiques plus spécifiquement, afin de déterminer en quoi la substitution pourrait fonder un prolongement possible du point de vue Formalisateur, Unificateur et Généralisateur adopté sur l’enseignement de la distributivité dans cette thèse, et par suite, constituer une nouvelle perspective de recherche pour poursuivre l’élaboration d’une ingénierie didactique visant à enseigner le calcul algébrique tout au long du collège.

Nous récapitulons le schéma de la thèse selon l’organigramme suivant :

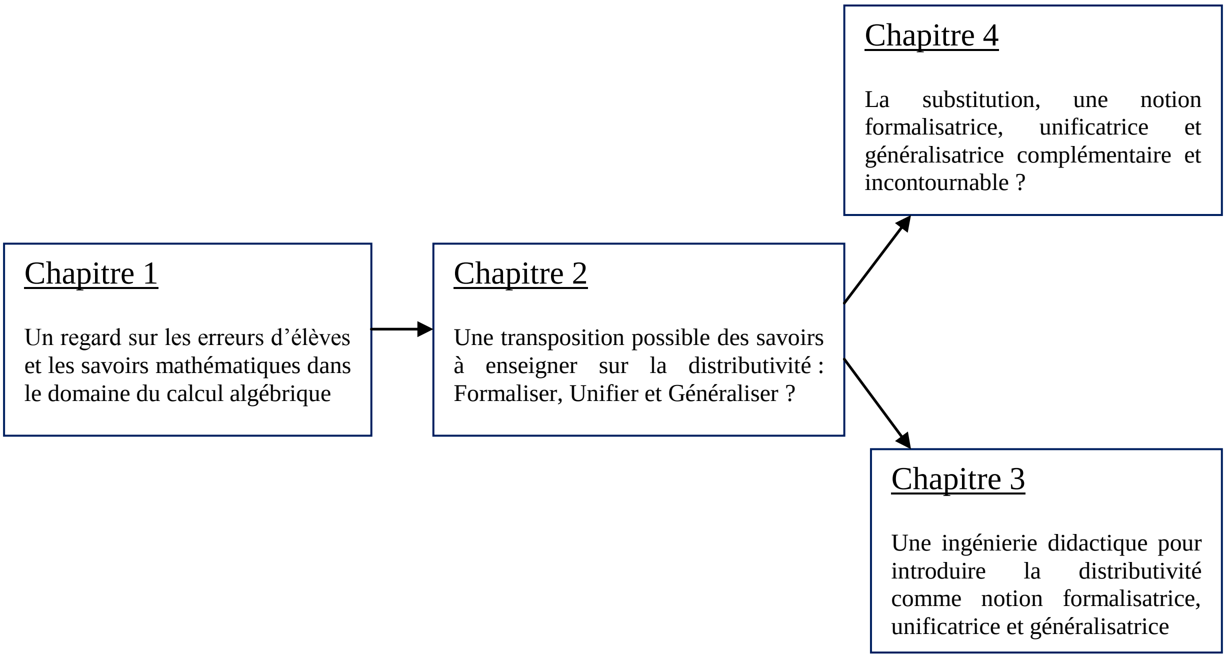


Figure 0.1 – Schéma général de la thèse

Chapitre 1

Un regard sur les erreurs d’élèves et les savoirs mathématiques dans le domaine du calcul algébrique

INTRODUCTION

Ce chapitre poursuit un double objectif. Il consiste tout d'abord à étudier les spécificités des savoirs à enseigner et enseignés sur le calcul algébrique au regard des dysfonctionnements observés dans les savoirs appris. En cela il propose un certain état de l'art en articulant divers résultats issus de la recherche sur le sujet. Il s'agit ensuite de commencer à préciser les fondements théoriques sur lesquels nous nous appuierons par la suite. Ce premier chapitre constitue ainsi une étape essentielle pour poser la problématique au cœur de la thèse, problématique qui toutefois sera amenée à s'affiner et à évoluer au fur et à mesure des résultats obtenus au fil de la recherche[1]. Il s'organise en cinq parties.

Dans une première partie, nous revenons sur le caractère implicite de certains savoirs liés au calcul algébrique, qui sont identifiés comme relevant du contrat didactique, et qui émergent comme des savoirs qui ne sont pas appris ou qui sont mal entendus par les élèves qui commettent des erreurs. En témoigne le manque d'adaptation des techniques de calcul aux formes d'expressions, ou le peu de reconnaissance de leurs portées. De nombreux travaux convergent de ce point de vue, et nous conduisent à penser que les savoirs de nature mathématique enseignés à ce jour éclairent peu la pratique. Les constats sont renouvelés sur une longue période de recherche sur l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre qui s'étend des années 70 à aujourd'hui.

Dans une deuxième partie, nous cherchons à préciser ces savoirs mathématiques, en en questionnant le caractère opérationnel pour outiller les pratiques du calcul algébrique. A cet effet, nous fondons notre propos sur des recherches abordant la question de la théorie des polynômes et de l'enseignement afférent. La mise en perspective de travaux de divers horizons (des travaux anciens comme plus récents, en France ou ailleurs) concernant les pratiques d'enseignement, amène à envisager d'autres savoirs à même d'accompagner efficacement les savoirs mathématiques. Les études s'accordent pour décrire des discours existants peu opérationnels, voire absents ou vulgarisateurs. D'autres pistes émergent alors, concernant des savoirs de nature numérique, ou des éléments technologico-théoriques liés aux écritures algébriques. Elles font écho à la question du « sens » de l'écriture algébrique à laquelle de nombreuses recherches proposent de s'attaquer, et en particulier celles menées dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique autour de la notion de modélisation.

Notre troisième partie est consacrée à certaines de ces recherches, afin d'explorer le rôle des praxéologies de modélisation dans la constitution d'un environnement technologico-théorique du calcul algébrique. Nous interrogeons la manière dont l'enseignement des formalismes peut se construire, au sein d'un enseignement fonctionnel dans ce cadre favorable, donnant du « sens » aux objets manipulés. Nos analyses font pourtant apparaître des questions qui ne semblent pas entièrement réglées par les situations d'enseignement proposées par la recherche, à propos de l'émergence du travail déductif dans la théorie algébrique, et plus généralement du passage d'un processus de modélisation au travail du modèle.

[1] Ceci explique que le plan retenu pour l'exposé de cette thèse ne soit pas tout à fait « classique ».

Ces questions nous amènent à appréhender de nouvelles formes de savoirs à enseigner, accompagnant les savoirs mathématiques : des savoirs liés aux aspects linguistiques des écritures symboliques algébriques, et véhiculés par les transformations de mouvement. Ces transformations de mouvement nous permettent de redéfinir le calcul algébrique qui nous occupe, comme un ensemble d'applications d'un langage, permettant d'obtenir, à partir d'une expression donnée, une expression (image) égale, et ce sous le contrôle d'une propriété mathématique. Cette perspective dialectique entre les dimensions mathématique et sémio-linguistique, articule les aspects syntaxiques et sémantiques des expressions algébriques. Ce travail fait l'objet de notre quatrième partie.

Dans une dernière partie, nous revenons sur la piste de savoirs mathématiques complémentaires liés aux nombres. Ceci nous conduit à repenser une dialectique entre savoirs numériques et algébriques qui diffère quelque peu de celle qui est usuellement entendue dans les travaux portant sur la modélisation. Nous envisageons dès lors le calcul algébrique en lien avec les constructions de systèmes de nombres, et la propriété de distributivité qui joue un rôle central pour les transformations de mouvement, comme un ensemble de notions formalisatrices, unificatrices et généralisatrices. Nous proposons une revisite globale des savoirs à enseigner sur le calcul algébrique de ce point de vue, pour fonder un enseignement liant à la fois les aspects mathématiques et sémio-linguistiques des notions.

1.1 DES ERREURS D'ELEVES ET DES SAVOIRS EVANESCENTS

Cette partie vise à problématiser un constat désarmant renouvelé : celui des erreurs d'élèves dans la pratique du calcul algébrique. Pour cela, nous mettons en regard, dans un premier temps, certains résultats de l'étude que nous avons menée en 2008, concernant la biographie didactique de deux élèves à l'entrée en seconde, et ceux, toujours d'actualité, d'une recherche déjà ancienne, celle de Tonnelle (1979) à propos de la factorisation en 3^{e}. Nous les réinterprétons à la lumière des outils d'analyse didactique que nous avons utilisés dans le cadre de notre Master, afin de déterminer la manière dont la pratique peut dysfonctionner chez les élèves. Ceci nous conduit à questionner les savoirs qui l'accompagnent. En nous appuyant sur d'autres travaux (Croset 2009 ou Assude, Coppé, Pressiat 2012), nous permettant de caractériser les savoirs à enseigner ou enseignés, nous avançons des premières pistes d'étude et hypothèses concernant la nature de savoirs plus opérationnels, c'est-à-dire, à même de rendre plus robustes les techniques de calcul algébrique.

1.1.1 Erreurs d'élèves : des savoirs protomathématiques ou des techniques muettes ?

Des difficultés de reconnaissances de formes

Revenons tout d'abord sur l'étude de la biographie didactique de Yoan et Joanna que nous avons menée dans le cadre de notre Master (Constantin 2008). Elle permet d'observer les logiques d'apprentissages de ces deux élèves de seconde, face aux difficultés qu'ils rencontrent dans le calcul algébrique. Ces difficultés relèvent d'adaptations à l'occasion de développements ou de factorisations d'expressions. Afin de caractériser ces adaptations, et le travail qu'elles engagent, nous utilisons tout d'abord les outils de la théorie anthropologique du didactique, qui permettent de modéliser l'activité de l'élève en termes de *praxéologies* (Chevallard 1997). Une praxéologie est constituée de quatre composantes, notées $[T;\tau;\theta;\Theta]$. Le bloc praxique, ou pratico-technique, $[T;\tau]$, est formé d'un type de tâches T, auquel est confronté l'élève, et d'une technique, τ, qui permet de le réaliser. Le bloc technologico-théorique $[\theta;\Theta]$ quant à lui, régit, éclaire, et justifie[2] la technique afférente pour ce qui est de sa composante technologique θ, la théorie Θ, étant à un autre niveau, plus profond, composée d'éléments justifiant à son tour la technologie. Les praxéologies[3] sont donc formées d'une *praxis*, et d'un *logos*, correspondant au savoir. Toutefois, les techniques peuvent différer quelque peu, au sein d'une même praxéologie, selon la spécificité des tâches rencontrées. Une distinction en grands types d'adaptations (Robert 2005) liés à ces spécificités, permet de décrire plus précisément les finesses des techniques à mettre en œuvre dans le calcul algébrique qui nous occupe. Les six types d'adaptations relèvent ainsi de la reconnaissance des modalités d'application des notions, de l'introduction d'intermédiaire, du mélange de plusieurs cadres ou notions, de l'introduction d'étapes, de l'utilisation des questions

[2] D'autres fonctions de la technologie peuvent exister, comme celle consistant à produire des techniques, mais là n'est pas notre propos. Notons cependant que Castela (Castela 2011 et Castela & Romo Vázquez 2011) renouvelle le point de vue sur les technologies en en proposant six fonctions : décrire la technique, la valider, l'expliquer, faciliter sa mise en œuvre, la motiver ainsi que les gestes qui la composent, et enfin l'évaluer.

[3] Une praxéologie est un modèle susceptible en principe de modéliser toute action. Lorsqu'il s'agit d'accomplir des types de tâche de nature mathématique, on parle aussi d'*organisation mathématique* pour désigner le quadruplet $[T;\tau;\theta;\Theta]$.

précédentes dans un problème et de l'existence d'un choix (d'une technique ou d'une théorie par exemple). Ces outils, en mettant l'accent sur les adaptations ou les oscillations de techniques, dans la globalité des attentes institutionnelles, sont de nature à apporter un éclairage du côté élève dans le sens où ils désignent davantage ce qui peut être en jeu relativement aux caractéristiques individuelles de chacun, sans que pour autant, en l'état, ils ne précisent ces caractéristiques.

Observons maintenant le travail de Yoan sur une factorisation lors de son premier contrôle. Il écrit sur sa copie l'expression donnée B = $(x^2 - 4x) + 2(x - 4)$ puis B = $(x + 2x)(x - 2) + (x^2 - 8)$ et s'arrête. Le type de tâche relève de la factorisation d'une somme de deux binômes (les parenthèses inutiles orientent la lecture de l'écriture en ce sens) dont l'un est écrit sous la forme d'un produit. La technique consiste *a priori* à factoriser le premier binôme pour écrire B = $x(x - 4) + 2(x - 4)$ avant de factoriser cette nouvelle somme par $(x - 4)$. L'adaptation est de type introduction d'étape. Et du point de vue mathématique, la technologie institutionnelle (celle décrite dans les programmes de collège) de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition est la même pour chaque étape de la technique, pour la première factorisation, comme pour la seconde. Elle n'éclaire pourtant pas la finesse de l'adaptation à l'œuvre en lien avec la forme de l'expression. Il s'agit en effet de discriminer l'utilisation d'une identité remarquable, ou d'un développement avant de factoriser, ou encore, la factorisation reposant sur la reconnaissance d'un facteur commun 'apparent', c'est-à-dire superposable du point de vue de l'écriture. La technique repose sur une reconnaissance préalable de $x - 4$ comme susceptible d'être un facteur de $(x^2 - 4x)$. Comment envisager ce que l'élève a à faire pour cela ? Est-ce par culture, les indices visuels du 4 et la présence de x pour chacun des termes de $(x^2 - 4x)$ le suggérant ? Est-ce par essai/erreur en lien avec le deuxième terme $2(x - 4)$? Essayer chacun des facteurs apparents 2 puis $(x - 4)$? Car en l'absence d'une théorie tournée vers le *PGCD* de deux polynômes, la reconnaissance de forme est prégnante. Mais c'est bien là que la difficulté réside : Yoan, dans sa tentative d'adaptation, régresse dans ses manipulations (avec une généralisation de la double distributivité abusive, avec des confusions entre double et carré). Sa difficulté ne relève pas à strictement parler du mathématique : elle relève davantage (et d'autres exemples tout au long de l'année dans son cahier et ses contrôles le montrent) de ce que Chevallard (1985) nomme les notions *protomathématiques*, qui comme les notions de forme ou de simplicité, sont caractérisées par le fait qu'elles vont de soi, elles sont mobilisées implicitement par le contrat didactique, et ne sont pas un objet d'enseignement *a priori*.

> 4.28 C'est ce genre d'achoppement que j'ai appelé « difficulté protomathématique ». Une telle difficulté peut surgir du fait *de la non maîtrise d'une capacité requise par le contrat didactique pour le bon entendement de celui-ci*, la maîtrise en question figurant alors comme *prérequis du contrat didactique.* […]
> 4.29. Les notions protomathématiques, par exemple la notion de « pattern », se situent à un niveau d'*implicitation* plus profond (pour l'enseignant, pour l'élève). Ce caractère d'implicite s'exprime, dans le contrat didactique, par le fait *qu'elles « vont de soi »*- sauf précisément lorsqu'il y a difficulté protomathématique et *rupture de contrat*[4]. Chevallard 1985 p. 55

[4] La notion de *contrat didactique* (Brousseau 1984) décrit les responsabilités relatives de l'enseignant et de l'enseigné, vis-à-vis de la connaissance mathématique, ce contrat étant noué de façon parfois explicite, et souvent implicite. C'est nous qui rajoutons cette note.

Yoan montre pourtant tout au long de l'année qu'il est capable de se saisir d'organisations mathématiques nouvelles, comme la résolution d'inéquations du second degré. La factorisation intervient alors à un niveau *disponible*[5] (Robert 1998) et il sait qu'il doit produire cette adaptation. Mais la reconnaissance de forme le met dans un tel échec qu'il ne résout les inéquations (avec un tableau de signe et des éléments technologiques qu'il explicite) que lorsque l'expression est déjà sous la forme d'un produit de deux binômes.

Ainsi en est-il lors de son troisième contrôle. Pour résoudre l'inéquation $(x+3)^2 - (2x-4)^2 <0$, il sait qu'il doit factoriser, il cherche donc un facteur commun en écrivant $(x+3)(x+3) - (2x-4)(2x-4)$, sans reconnaître une identité remarquable, puis régresse dans ses manipulations à la ligne suivante : $(x+3)[-(2x-4)(2x+4)]$. Il semble que l'absence de facteur commun « apparent » l'engage à mettre en œuvre une technique de factorisation erronée. C'est bien néanmoins dans l'organisation ancienne de la factorisation que cela se joue, au sein de la technique nouvelle qui la convoque. Il réussit pourtant à résoudre $(-4x+8)(x-1)>0$ à la question précédente avec un tableau de variation et les éléments technologiques idoines liés à la résolution de l'équation produit. Mais au fur et à mesure de l'année, il évite les tâches demandant des adaptations de techniques algébriques anciennes alors qu'il continue à apprendre les praxéologies nouvelles. Ces achoppements de techniques, pour Yoan, ne sont pas liés au niveau de mise en fonctionnement des connaissances. Ils se situent pourtant sur des organisations mathématiques anciennes, convoquées par des organisations mathématiques nouvelles, mais se jouent bien en amont de complexifications[6] praxéologiques. Ainsi les difficultés de Yoan s'expriment-elles essentiellement dans le calcul algébrique par des régressions qui accompagnent des formes d'expressions nouvelles : le manque d'identification d'une identité remarquable permettant de factoriser en est l'un des nombreux exemples et ses difficultés protomathématiques le mettront en échec sur toute une année.

Le constat de l'assujettissement des techniques aux formes des expressions n'est pas nouveau.

Tonnelle en 1979 montrait déjà, à propos de la factorisation, comment des effets de contrat et des obstacles numériques ou plus généralement des adaptations liées aux formes d'expressions, pouvaient engendrer des régressions chez les élèves de 3[e] à l'instar de Yoan en Seconde, voire des interdictions. Son travail s'appuie notamment sur un certain nombre de tests et d'entretiens menés auprès d'élèves confrontés à des factorisations nécessitant des adaptations de techniques par rapport aux expressions usuellement rencontrées. Les adaptations sont plus ou moins « grandes », nous allons l'illustrer. La recherche est centrée sur l'identité remarquable que l'on peut écrire sous la forme suivante : $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

5 Robert (1998) distingue deux niveaux de mise en fonctionnement des connaissances. Une connaissance intervient ainsi au niveau *disponible* lorsque sa convocation est à la charge de l'élève et au niveau *mobilisable* sinon. Elle peut être alors convoquée par l'énoncé, ou par une intervention de l'enseignant par exemple. Le terme de connaissance ici peut recouvrir différentes composantes de l'organisation mathématique, que ce soit au sein de la *praxis* ou du *logos*.

6 Des praxéologies dites *ponctuelles*, référant chacune à un unique type de tâches, peuvent s'agréger autour d'une même technologie, pour former une praxéologie *locale*. De telles praxéologies locales, peuvent de même, s'articuler autour d'une même théorie, pour constituer une praxéologie *régionale*, dans un mouvement de complexification.

Les ostensifs[7] choisis pour les expressions, permettent d'écarter dans une certaine mesure (les résultats le confirment) l'adaptation de type choix (de l'identité remarquable). Les mêmes indices forts pour chaque expression (que sont la présence de deux termes, le signe de la soustraction et la présence d'une seule lettre), permettent de dépister des « modèles d'actions » des élèves et des effets du contrat construit par l'enseignement des techniques de factorisation. Les expressions sont plus ou moins en rupture avec ce que Tonnelle nomme le «code régissant les situations de factorisation » tissé par le contrat didactique. Il s'agit par exemple d'expressions comme $5x^2 - 9$ ou $x^4 - 256$. Les adaptations sont de type introduction d'étape, elles consistent à déterminer la racine carrée d'un nombre ou d'un monôme, à condition de considérer que la technique relève de l'utilisation implicite de l'identité $a - b = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$, pour a et b strictement positifs. Cette technique n'est pas enseignée, bien que Tonnelle (1979) montre une élève qui l'a construite spontanément. L'adaptation à produire pour utiliser l'identité remarquable consiste plutôt à identifier et à écrire chaque terme sous la forme de carrés. Tonnelle (1979) observe des régressions à l'occasion de cette étape : les obstacles numériques peuvent engendrer des interdictions chez les élèves (certains considérant qu'*on ne peut pas factoriser, parce que 5 n'est pas un carré parfait*) ou « des réponses utilisant des résultats faux du répertoire des puissances », comme des confusions entre carré et double, ou plus généralement entre modèle additif et multiplicatif. Les prises d'indices numériques peuvent aussi n'avoir aucune pertinence du point de vue mathématique, ce que montre un « très bon élève » cherchant un lien entre l'exposant 4 et 256 pour factoriser $x^4 - 256$. Il a pourtant réussi à écrire $(x^2 + \cdots)(x^2 - \cdots)$et explicite qu'il recherche un nombre a tel que $a \times a = 256$, mais, déstabilisé par le grand nombre qu'est 256 il perd ses techniques de recherche de racine carrée et régresse à cette occasion :

> Il apparaît ici que le contrat didactique prévoit que soient écartées du domaine des situations de factorisation les expressions pour lesquelles des algorithmes devraient être mis en œuvre : la factorisation est vraiment le domaine d'une activité heuristique faite d'essais et de tâtonnements à choisir dans une gamme assez restreinte de possibilités (au sens du contrat didactique). […] L'enseignement de la factorisation vient créer chez l'élève un univers de conduites qui se révèle, dès lors que l'ordre standard est mis en défaut, d'une extrême fragilité. Tonnelle (1979) p. 68

La technique de factorisation, au lieu de se fonder sur des *praxis* mathématiques, repose sur des notions protomathématiques, et se compose essentiellement de décodage, par ailleurs déstabilisé dès lors que les expressions montrent un entier non carré parfait, un exposant différent de deux, ou des coefficients « très particuliers » comme π. Tonnelle (1979) montre un déplacement de la problématique dans le travail de factorisation de sorte que les « seuls problèmes qui se présentent sont des problèmes de reconnaissances ». De plus, au delà des expressions peu rencontrées par les élèves, qui permettent par contraste de mettre en évidence les caractéristiques et les effets de contrat, les expressions qui en relèvent, montrent aussi que pour des adaptations que l'on pourrait considérer « petites », les déstabilisations des techniques enseignées se manifestent dès les premières complexifications ostensives :

---

[7] Nous reprenons ici un terme de la théorie anthropologique du didactique pour préciser certains éléments liés à la « forme » des expressions. Les objets *ostensifs* (Bosch et Chevallard 1999) désignent ainsi les objets ayant une certaine matérialité (graphique, sonore …), et les objets *non-ostensifs* sont alors les « objets », qui, comme les idées, les intuitions ou les concepts, existent institutionnellement – au sens où on leur attribue une existence- sans pouvoir être vus, dits, entendus, perçus ou montrés par eux-mêmes : ils ne peuvent être qu'*évoqués* ou *invoqués* par la manipulation adéquate de certains objets ostensifs associés […] Ibid p. 10

> On voit apparaître que le code implicite, dont l'inculcation est faite longuement, […] se révèle un instrument d'action d'une extrême fragilité dans le domaine standard dès lors que l'information à traiter dépasse celle des exemples les plus simples présentés. […] Il ne donne à l'élève qu'un savoir sans puissance de réalisation. […] il est rendu inefficace par une augmentation, même assez faible de la complexité informationnelle de la situation de factorisation.
> […] Une petite modification mathématiquement non pertinente provoque toute une gamme de lectures erronées (authentifiées aux yeux des élèves par des remarques justificatives soit fausses, soit non pertinentes). Tonnelle (1979) p. 78 sq.

Le cas de Joanna (Constantin 2008), par ailleurs, donne à voir des erreurs liées à des formes d'expressions qui sont d'une autre nature. C'est ce que nous allons voir maintenant.

Des difficultés à identifier les domaines d'efficacité des techniques

Les difficultés de Joanna se jouent également à l'occasion d'adaptations, occasionnant des régressions dans ses techniques algébriques. Examinons par exemple un épisode de son contrôle.

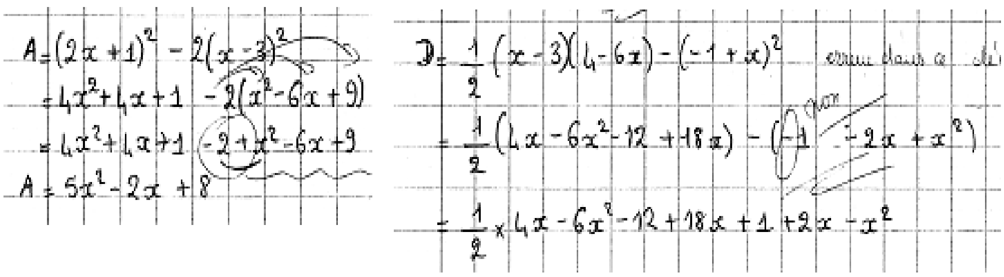


Figure 1.1 – Extraits du contrôle n°1 de Joanna

Ce qui gêne visiblement cette élève participe du développement d'un produit de trois facteurs : nous avions pu le constater lors des séances de travaux dirigés. Il est à noter que ce type de tâches est surreprésenté dans l'évaluation où 2 expressions sur 4 le convoquent, par rapport à ce qu'il en a été au cours de l'étude (4 occurrences sur 32 dans les exercices proposés à faire à la maison ou en travail dirigé). On peut donc parler d'une rupture du contrat lié à l'étude lors du contrôle. Il n'en demeure pas moins que Joanna échoue à chaque fois à l'occasion de l'adaptation de la technique convoquée. Cette adaptation consiste *a priori* à effectuer un premier développement pour se ramener à un second produit de deux facteurs. Au moment du contrôle elle la réussit, ce qui est un progrès par rapport à ce que montrent ses cahiers (on y observe par exemple des erreurs consistant à développer sans prendre en compte le carré comme dans l'écriture $3(2x\text{-}1)^2 = (6x\text{-}3)^2$). Toutefois, elle échoue à la deuxième ligne n'interprétant apparemment plus le travail à accomplir comme un développement. Il semble que cette adaptation déstabilise des techniques anciennes afférentes au développement d'un produit lorsque l'un des facteurs est une somme de plus de deux termes. On peut s'interroger sur ce qui la gêne véritablement. Ses cahiers montrent qu'elle sait accomplir ce type de tâche pour d'autres produits plus isolés[8], mais elle semble régresser au moment du contrôle, avec des choix de signe qui ne sont pas même stables en « enlevant les parenthèses ». Ce constat surprend à bien des égards. Joanna parvient à introduire et à réaliser l'étape nécessaire,

[8] Notons qu'aucune des expressions rencontrées par Joanna dans les exercices proposés à faire en classe ou à la maison, ne relève à strictement parler du type de celles des expressions A et D du contrôle, c'est-à-dire d'une différence de deux produits dont l'un est un produit de trois facteurs.

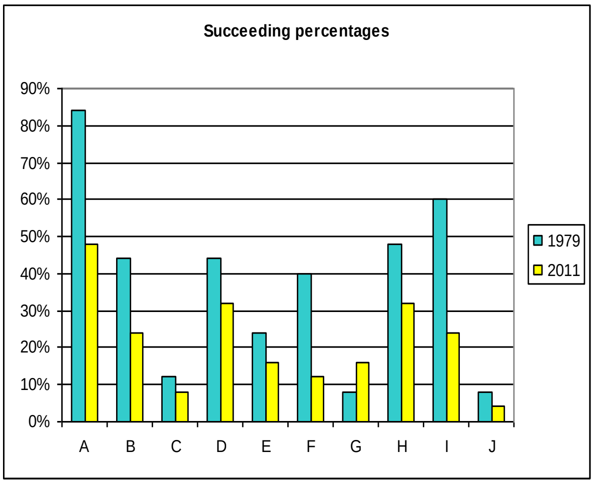
développe les premiers produits à bon escient en utilisant correctement une identité remarquable, et sa technique achoppe à un moment où l'on pourrait qualifier le travail qu'il reste à accomplir comme une adaptation peu complexe. Au contraire de ce que l'on pouvait supposer, la convocation de la technique pertinente a bien lieu. Mais elle déstabilise des techniques anciennes dans la conjonction de plusieurs adaptations et entraîne des régressions dans les manipulations algébriques. Joanna réussira à surmonter ses difficultés dans le temps, parvenant à effectuer les développements demandés pour des expressions de fonction exactement du même type que celles que nous venons d'observer, mais ses apprentissages sont en décalage avec le temps de l'étude. Un entretien en fin d'année (Constantin 2008) montrera de plus qu'elle se méprend sur les implicites de son cours, ce qui contribue au cloisonnement des techniques algébriques qu'elle croit déceler dans les traces écrites. Son cours expose ainsi des techniques de comparaisons à partir d'exemples et d'éléments technologiques afférents. On y voit un exemple de comparaison de deux fractions dans le cadre numérique avec différentes techniques (usage de la calculatrice, réduction à un même dénominateur ou comparaison à un autre nombre). A la suite, un nouvel exemple est donné pour la comparaison de deux expressions algébriques, et la technologie énoncée est celle de l'étude du signe de leur différence. Puis le dernier exemple est celui de deux expressions avec des racines carrées dans le cadre numérique où il s'agit de comparer leurs carrés. Le cours organise les techniques en fonction des formes d'expressions, sans le dire. La classification étant implicite et ne révélant pas les domaines d'efficacité des techniques, Joanna ne s'autorise pas à effectuer des adaptations dès lors que les formes d'expressions ne relèvent pas strictement de la forme exposée. C'est ce qu'elle explicite lors d'un entretien à propos d'un exercice dans lequel elle a échoué la comparaison de deux fractions dans le cas général. L'énoncé demande de comparer $\frac{1}{3}$ et $\frac{30+1n}{89+3n}$ d'abord pour $n = 0$ puis pour $n = 4$ et enfin pour toute valeur de n. Elle a réussi les comparaisons numériques en utilisant la calculatrice. Au moment de l'entretien, elle se trouve embarrassée pour choisir l'une des techniques exposées dans son cours afin de mener à bien la comparaison pour tout n. Elle dit par exemple qu'elle ne peut pas utiliser la technique de réduction au même dénominateur relative aux fractions numériques pour comparer les fractions de son contrôle, parce que ces dernières comportent des lettres. De même, elle refuse d'utiliser la technique relative aux expressions littérales exposées, parce que *c'est pas la même chose, 'fin là y'a des fractions et là y'en a pas, donc c'est pas un exemple*, dit-elle. On voit donc comment cette rigidification des techniques de manipulations algébriques peut se construire à partir de malentendus, et faire obstacle aux adaptations.

D'autres exemples du travail de Joanna montrent que ses techniques sont influencées par les effets de contrat qu'elle croit déceler dans les formes d'expressions qu'elle rencontre, ne s'autorisant pas un certain nombre d'adaptations.

Retraçant le parcours algébrique de Yoan et Joanna, l'élément émergeant est sans doute que les difficultés qui sont observées résident majoritairement, pour ces deux élèves, dans une mise en œuvre d'adaptations de connaissances anciennes liées au calcul algébrique.

Mais l'élément technologique, ici la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, n'éclaire pas la technique à mettre en œuvre dans la finesse des adaptations qui se jouent en fonction des formes d'expressions. Interrogeant les organisations mathématiques à l'œuvre, on se trouve démuni pour mieux approcher ce dysfonctionnement technologique, d'autant que la composante technologique mathématique semble réduite au regard de l'importance du protomathématique et de la reconnaissance de forme (Constantin & Coulange 2010). Les difficultés afférentes semblent, par nature, hors de portée de l'enseignement ; c'est pourtant à la question d'un renouvellement technologique qu'entend s'attaquer cette thèse.

Elle n'est pas nouvelle. Mais les phénomènes observés et la stabilité des erreurs dans le temps continuent d'interpeller. Bardini montrait déjà en 2001 que les techniques de factorisations demeuraient assujetties aux formes d'expressions (Bardini 2001). La comparaison de réponses d'élèves de 3e à l'un des tests issu des travaux de Tonnelle à propos de la factorisation, proposé en 2011, donne encore des réussites relatives dans des proportions comparables.



Expressions	Expected answers
$A = x^2 - 16$	$(x+4)(x-4)$
$B = -t^2 + 4$	$(2+t)(2-t)$
$C = x^8 - a^{12}$	$(x^4 - a^6)(x^4 + a^6)$
$D = 4x^2 - 361$	$(2x-19)(2x+19)$
$E = 2x^2 - 18$	$2(x^2-9) = 2(x+3)(x-3)$
$F = \sqrt{3}x^2 - 16\sqrt{3}$	$\sqrt{3}(x^2-16) = \sqrt{3}(x+4)(x-4)$
$G = \pi t^3 - \pi t$	$\pi t(t^2-1) = \pi t(t+1)(t-1)$
$H = 9x^2 - 4y^2$	$(3x+2y)(3x-2y)$
$I = x^2 - 3$	$(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$
$J = \frac{x^2}{16} - 10^{-2}b^2$	$\left(\frac{x}{4} - 10^{-1}b\right)\left(\frac{x}{4} + 10^{-1}b\right)$

Figure 1.2 – Taux de réussites comparés, test de Tonnelle (Constantin & Coulange 2012)

Il paraît évident que de nombreux facteurs pourraient expliquer les différences de résultats observées et collectées dans le diagramme ci-dessus : les programmes, les élèves, l'époque de l'année par exemple. Précisons rapidement que le test est arrivé à une période, pour la 3e de 2011, où le travail algébrique n'a pas été revu depuis plus d'un mois. Par ailleurs, la population est constituée de 25 élèves pour le test réalisé en 2011, tout comme pour le test de 1979. Sans avoir d'éléments suffisants pour comparer véritablement ou généraliser les taux de réussite obtenus par les élèves qui ont passé le test en 2011 par rapport à 1979, on peut toutefois observer un résultat intéressant. Si les élèves de 2011 échouent davantage, les tâches de factorisation sur lesquelles ils réussissent ou échouent massivement semblent les mêmes que pour les élèves de 1979, tout comme les erreurs commises. La meilleure réussite concerne l'expression A = x^2 - 16, et la plus mauvaise, $J = \frac{x^2}{16} - 10^{-2}b^2$.

Ces expressions sont, en 1979 comme en 2011, pour la seconde, hors contrat, et pour la première, très usuelle et très proche de la forme apprise de l'identité remarquable à utiliser : $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$. Les huit autres expressions révèlent une diminution significative des réussites au fur et à mesure que l'on s'éloigne du domaine standard des expressions usuellement rencontrées, dans des proportions comparables. On retrouve ici que les erreurs observées se jouent dès les premières adaptations à produire, et les techniques sont déstabilisées dès que les formes d'expressions s'éloignent un tant soit peu des formes prototypiques apprises, et ce aujourd'hui comme en 1979. Cette résistance des erreurs nous amène à questionner l'existence, la place et le rôle des technologies mathématiques, dans les praxéologies enseignées et à enseigner.

1.1.2 Des technologies évanescentes au regard des praxéologies enseignées aux élèves

Nature des complexifications praxéologiques

Croset (2009) propose de modéliser l'activité de l'élève au plus près de l'organisation de ses connaissances, en s'intéressant à ces modifications mathématiquement non pertinentes. Elle définit ce qu'elle nomme *les variables de contexte* d'une expression comme des variables provoquant une altération de la technique de façon suffisamment stable[9] : ce sont des « caractéristiques de l'expression algébrique dont les valeurs modifient le comportement des élèves ». Il s'agit par exemple du degré d'une expression ou de la nature des coefficients, à l'instar de ce que Tonnelle (1979) identifiait pour caractériser les types de complexifications ostensives. Un élève peut ainsi traiter séparément le type de tâche consistant à développer une expression du type $a(b + c)$ et le type de tâche consistant à développer une expression du type $a(b + c + d)$, où a, b, c et d désignent des nombres ou des monômes, et ce, en raison du nombre de termes entre parenthèses. Croset (2009) montre en effet, qu'un élève susceptible d'utiliser correctement la distributivité dans le premier cas, pourra néanmoins systématiquement (ou de manière suffisamment stable), utiliser la transformation $a(b + c + d) \rightarrow ab + c + d$ pour le second. Dès lors, il est pertinent de considérer que pour un tel élève, il existe deux praxéologies distinctes, qu'elle nomme praxéologies-en-acte[10].

Une praxéologie-en-acte est un triplet composé, d'une part, d'un type de tâche-en-acte, qui, en référence à la théorie anthropologique, est défini comme un type de tâche provoquant chez le sujet une même technique pour l'accomplir, dite technique-en-acte. Celle-ci peut être correcte ou non, appartenir aux praxéologies institutionnelles ou non, légitimée ou non. Sa caractéristique principale étant une certaine stabilité dans son utilisation pour être considérée comme telle, contrairement à ce qu'on pourrait appeler un accident. Croset (2009) questionne et définit bien sûr la notion de stabilité pour la quantifier notamment, mais nous ne nous

[9] Nous renvoyons le lecteur intéressé à la thèse abordant très précisément la question de la stabilité.

[10] Il semble que la terminologie plutôt employée par l'auteure aujourd'hui soit celle de "praxéologies personnelles". Notons que la notion, bien que s'inspirant de la structure d'une praxéologie, offre une entrée très différente de celle de la théorie anthropologique du didactique : il s'agit de se situer du côté du sujet, et non plus de l'institution, même si les composantes des praxéologies institutionnelles ne sont pas sans lien.

arrêterons pas sur ce point qui n'intéresse pas notre étude. Lorsqu'elle est présente, la troisième composante d'une praxéologie-en-acte est l'ensemble des éléments qui justifient, légitiment et guident la technique-en-acte, constituant ainsi la technologie-en-acte.

Ce point de vue permet de mettre en lumière le décalage pouvant exister entre les praxéologies institutionnelles visées par l'enseignement et celles effectivement vécues par les élèves.

Comme Joanna le montre dans ses cahiers, l'analyse de productions d'élèves que fait Croset (2009) prouve qu'il ne va pas de soi d'adapter ou de combiner le double développement pour le développement d'un produit de trois facteurs. Les techniques erronées diffèrent selon les types d'expressions de sorte qu'il est pertinent de modéliser l'action de l'élève par des types de tâches différents pour des expressions différentes à leurs yeux.

Croset (2009) place sa recherche dans une perspective de modélisation des activités de transformation d'expressions algébriques (au sein d'un logiciel : Aplusix) afin de leur associer une liste de règles (correctes ou non). Elle met à jour 48 praxis-en-acte en fonction des formes d'expressions rencontrées, provoquant des techniques différentes de résolution chez les élèves (mais présentant une certaine stabilité néanmoins).

Ainsi le type de tâche-en-acte évoqué ci-avant et nommé TA : développer $a(b + c)$ sera distingué du type de tâche-en-acte nommé TA' : développer $a(b + c + d)$ où a, b, c, et d sont des monômes, car le premier peut provoquer une technique différente de celle du deuxième chez un même sujet : il n'identifiera pas les tâches comme relevant d'un même type. Il pourra par exemple développer selon la technique institutionnelle (correcte) pour TA et écrire une somme pour TA', ou ne multiplier que le premier terme. L'étude réalisée montre des changements de comportements selon les variables de contexte de l'expression, pour le développement, comme pour la factorisation. Ainsi, selon que pour factoriser $a + ab$, a et b soient des sommes, ou des monômes par exemple, les techniques chez un même élève peuvent différer. Selon le nombre de facteurs de la somme dans un produit à développer, selon que le signe de la multiplication soit apparent ou pas, à l'instar des difficultés de Joanna au moment de son contrôle que nous avons analysé plus haut, elle repère la transformation $a(b + c) \rightarrow a + b + c$ et distingue par exemple les deux types de tâche-en-acte : développer $a(b + c)$ et développer $a \times (b + c)$, le premier pouvant provoquer une somme et pas le second. C'est donc la technique qui définit le type de tâche-en-acte côté élève. Les résultats des analyses de Croset (2009) montrent la prégnance d'éléments ostensifs non pertinents mathématiquement qui peuvent guider cette classification côté élève, comme ici la présence ou non du signe de la multiplication. Ainsi, si à un même type de tâche-en-acte peuvent correspondre plusieurs technique-en-actes, cette modélisation de l'activité permet de rendre compte d'organisations de connaissances et de pratiques personnelles peu conformes aux savoirs à enseigner. Pour les élèves qui commettent des erreurs, les praxis-en-actes semblent se construire et s'organiser selon des ostensifs scripturaux qui peuvent s'avérer inappropriés. Ceux-ci peuvent alors conduire à opérer des distinctions dans les traitements d'expressions qui ne sont pas identifiées comme relevant d'un même type alors qu'elles le devraient, ou au contraire, à utiliser une même technique-en-acte pour des expressions relevant de types différents. La complexification des organisations mathématiques qui devrait se jouer au niveau technologique paraît évanescente dans les praxéologies personnelles.

L'expérimentation menée conforte ces résultats à partir d'analyses sur un grand nombre de données (près de 100 000 pas de calcul) dans trois pays différents et pour des niveaux différents (de la 3e à la Terminale en France par exemple).

A défaut de la technologie idoine, Croset (2009) piste alors les technologies-en-acte à l'œuvre, afférentes aux techniques-en-acte erronées. Sa recherche montre encore à ce niveau la prégnance d'éléments ostensifs sans lien avec les technologies mathématiques. Ceci fait écho aux résultats de nos propres recherches concernant les biographies de Yoan et Joanna (avec des ostensifs qui guident les techniques, voire les rigidifient, ou avec des phénomènes d'analogies scripturales, sans lien avec les technologies mathématiques). Ainsi en témoigne l'extrait de (Croset 2009) reproduit ci-après, évoquant une élève qui a effectué une factorisation correcte pour $2x^2 + 2$, mais qui s'est trompée pour $(x + 8) + (2x – 1) (x + 8)$. Elle a écrit, sans tenir compte du facteur 1 non apparent, $(x + 8)(2x – 1)$. Un entretien conduit par l'auteure montre l'importance des éléments ostensifs qui guident le travail de cette élève :

> l'élève E_M cherche un facteur commun « de chaque côté du signe + ou − » puis rajoute « la suite après » : « la suite de l'expression dans la parenthèse ». Elle s'aide pour cela d'ostensifs : elle souligne les termes de chaque côté du signe dominant puis encadre le facteur commun, qui est « deux fois le même facteur de chaque côté du signe ». Cela lui permet de « voir ce qu'il reste » : « le seul truc qui n'est pas entouré » ; autrement dit, elle met entre parenthèses les cofacteurs visibles en les séparant d'un signe +. Ainsi $(x + 8) + (2x − 1)(x + 8)$ devient $(x + 8)(2x − 1)$. Croset (2009) p. 258

Elle réussit pourtant la factorisation de $2x^2+2$ en $2(x^2+1)$ mais ne parvient pas à corriger son travail et à unifier les techniques lorsque confrontée à des solutions justes de factorisation, elle les juge fausses, et sans pouvoir expliquer pourquoi elle affirme qu'il existe bien deux techniques selon elle et que dans la première factorisation, faire apparaître le 1 n'est pas pertinent.

Et lors d'un entretien avec cette élève, l'auteure met à jour plusieurs éléments composant sa technologie-en-acte qui repose notamment sur des contrôles ostensifs portant sur la forme à produire :

> $(8x + 1)(2x – 1)$ est une forme satisfaisante suite à une factorisation tandis que $2(x^2)$ ne l'est pas pour l'élève E_M car cette dernière expression ne comporte pas de somme.
> Nous voyons donc trois formes d'éléments technologiques dans l'échange verbal. Premièrement, il y a la partie « explicative » de la production de l'élève et qui correspond à la technologie personnelle que nous lui avions octroyée a priori : « prendre ce qui est explicitement visible comme cofacteur ». Deuxièmement, il y a la fonction de « contrôle » qui consiste chez cet élève à vérifier que l'expression produite comporte au moins une somme dans un des deux facteurs. Enfin il y a la fonction « justificative » lorsque l'élève décide de rajouter le terme « 1 » afin de reproduire l'expression de départ lorsqu'elle re-développera. Ces trois éléments sont nos propres reconstructions : l'élève ne les a pas données explicitement mais nous les avons déduits de ce qu'elle avait exprimé, montré, produit. Ce qui les distingue d'éléments d'une technique […] est l'intention que l'élève met derrière : il n'est plus dans l'action mais dans l'explicitation de ce qu'il fait. Croset (2009) p. 261

On voit encore ici les effets de contrat qui régissent les manipulations et les prises d'indices qui demeurent dans l'ostension, mais, dit-elle :

> Cela reste un travail difficile et, quoiqu'il en soit, une reconstruction du chercheur, l'élève de collège étant difficilement capable d'expliciter les critères déterminant la mise en œuvre de sa technique-en-acte. Croset (2009) p. 264

Nous avons trouvé des résultats très proches dans notre recherche effectuée dans le cadre de notre Master (Constantin 2008). Les biographies didactiques de Yoan et Joanna montraient que les techniques de ces élèves se révélaient en effet guidées par des ostensifs, ou par des phénomènes d'analogie scripturale sans contrôle par des éléments non-ostensifs.

L'auteure élabore cinq technologies-en-acte, à partir d'erreurs stables intra-élèves :

> Ces comportements stables dans l'erreur doivent, selon nous, pouvoir s'expliquer, se justifier par la présence d'une technologie-en-acte chez ces élèves. C'est parce qu'ils ont en tête des éléments technologiques (erronés) qu'ils sont capables d'avoir un comportement stable (dans l'erreur). Nous avons construit cinq technologies-en-acte a priori : des implicites, des tendances à la concaténation, une utilisation abusive de la distributivité, un manque de maîtrise des parenthèses ou encore l'impact des formes prototypiques peuvent expliquer partiellement les praxis-en-acte erronées. Croset (2009) p. 264

Ces technologies-en-acte montrent que ce sont des ostensifs qui guident le travail des élèves qui commettent des erreurs, sans que des non-ostensifs puissent les réguler, et que ces ostensifs constituent même les fondements des éléments (erronés) que les élèves engagent pour justifier leur pratique.

Ce travail met à jour des actions qui reposent sur des éléments ostensifs qui ne sont pas régulés, ni surtout choisis ou identifiés de façon pertinente au regard des non-ostensifs. Pris dans une interprétation du côté de l'activité personnelle de l'élève, ces ostensifs correspondent à ce que Croset (2009) a appelé les variables de contextes d'une expression algébrique. Nous retenons de ces travaux deux faits saillants : d'une part l'inadéquation de l'organisation des connaissances en fonction des variables de contexte, et d'autre part la prégnance des éléments ostensifs dans les technologies-en-acte, les prises d'indices dans les écritures non pertinents, gênent à la fois l'organisation des praxéologies, leur classification, (et donc la complexification des organisations mathématiques) et par suite les adaptations possibles, en lien avec l'identification des domaines d'efficacité et d'application des techniques. Croset montre cependant une forte instabilité dans l'erreur de sorte qu'il semble illusoire de penser que pour une majorité d'élèves, il suffise de déconstruire des technologies-en-acte pour corriger leurs manipulations erronées.

Les erreurs récurrentes observées témoignent d'une certaine difficulté à appréhender les « formes » des expressions algébriques, en lien avec les technologies mathématiques (reconnaître un carré par exemple pour factoriser à l'aide d'une identité remarquable). Ces reconnaissances de formes, ou ce que Mounier (1988) nomme le *pattern-matching*[11], demandent comme pré-requis, une certaine capacité à reconnaître ce qui se ressemble, autrement dit ce qui relève d'un même type d'expression. La difficulté tient à ce que les types intéressants se trouvent implicitement déterminés par les identités algébriques connues, ou plus généralement, par les technologies mathématiques, mais pas seulement. Les domaines d'efficacité des techniques et les adaptations possibles jouent également un rôle subtil dans les

[11] Le pattern-matching, en informatique, est défini comme une évaluation par analyse de cas, une expression étant ainsi comparée à différents patterns, dans l'ordre, pour renvoyer ceux qui « correspondent ».

prises d'indices ostensifs pour caractériser un certain type. L'exemple de Joanna à propos de sa difficulté de choix de technique en relève : le fait que les fractions soient numériques ou algébriques n'est pas pertinent au regard de la technique de comparaison consistant à réduire au même dénominateur, c'est la forme fractionnaire qui l'est. Pourtant, cet indice (numérique/algébrique) l'est évidemment, pour utiliser des valeurs approchées. Ces prises d'indices s'accompagnent d'interprétations des ostensifs : 4 par exemple, selon le pattern, pourra être identifié comme nombre (appartenant au domaine numérique), comme carré, ou comme diviseur de 256. Les types pertinents des sous-expressions sont intimement liés au travail à accomplir et aux connaissances mathématiques. L'observation de ce que Matheron nomme des extensions praxémiques (2010) incontrôlées qui font écho ici à ce que Kirshner (2004) nomme des sur-généralisations, sans questionnement des portées des technologies, semblent héritées de difficultés protomathématiques. Et, note Croset à la suite de Kirshner (2004), « les règles qui ont tendance à être sur-généralisées sont celles qui sont « visuellement remarquables » ». La question qui se pose alors est celle de la nature des savoirs enseignés, au regard des technologies en jeu dans les praxéologies de calcul algébrique.

Une technologie enseignée évanescente

Croset (2009) interprète en effet, à la fois les difficultés des élèves et le manque de stabilité de leurs erreurs, du côté d'un dysfonctionnement de la technologie mathématique, c'est-à-dire celle des praxéologies institutionnelles, qui n'assure pas ses fonctions. Pour les élèves qui commettent des erreurs, elle n'apparaît pas opérationnelle, dans le sens où elle n'est pas mobilisée voire n'est peut-être pas même disponible : elle ne livre pas le domaine de validité des techniques, ni les moyens de contrôle des pratiques et n'outille pas davantage la mise en œuvre de nouvelles techniques, que demande toute adaptation. Cette absence de technologie mathématique institutionnelle au sein des praxéologies apprises, nous conduit à nous intéresser à ces savoirs mathématiques : quelle théorie mathématique les sous-tend ? Cette théorie pourrait-elle être à même de les compléter, pour les rendre opérationnels ? D'autres technologies mathématiques peuvent-elles manquer pour faire fonctionner ces technologies algébriques ? Autrement dit, quels savoirs mathématiques pourraient-ils entrer en relation avec les savoirs institutionnels des praxéologies de calcul algébrique, pour éventuellement leur rendre leur fonctionnalité ?[12]

Par ailleurs, les travaux de Croset (2009) montrent que pour la majeure partie des élèves produisant des calculs erronés, la technologie n'est cependant pas remplacée par une technologie-en-acte que l'on pourrait apparenter à des règles mathématiques fausses, c'est-à-dire que l'on puisse décrire en termes de manipulations suivant des propriétés erronées (comme une fausse distributivité) :

> Les 63% de comportements erronés restants sont ceux auxquels nous n'avons pu attribuer une règle algébrique dominante. Croset (2009) p. 264

Face à ce résultat, l'auteure avance deux types d'hypothèses expliquant cette forte instabilité, en conclusion de sa recherche.

[12] Notons que les questions que nous formulons ici sont issues d'une hypothèse plus large, d'un manque de savoirs ou de connaissances pour rendre opérants les savoirs à enseigner. Nous supposons que les erreurs sont héritées de ces manques.

Le premier concerne les choix liés à la modélisation des comportements erronés. Elle envisage à la fois une remise en cause de la granularité des types de tâche-en-acte et la possibilité d'autres formes de stabilités non prises en compte. Parmi ces autres formes de stabilités apparaissent alors des éléments plus « purement »[13] syntaxiques qui pourraient guider les manipulations, comme la recherche de « belles formes », ou la conservation ostensive. La piste envisagée correspond à la recherche de technologies-en-acte d'une nature particulière, qui ne soit pas apparentée à du « mathématique » comme le seraient en quelque sorte les technologies-en-acte, ni enseignées. L'auteure parle dès lors de méta-technologies-en-acte, qui seraient susceptibles de montrer davantage de stabilité dans les comportements et expliqueraient ce qu'Artigue (1990) nomme une « régularisation formelle abusive » poussant les élèves à obtenir de belles formes.

> Il est donc envisageable qu'une autre forme de *technologie-en-acte* guide les choix et les actions des élèves, une *méta-technologie-en-acte* transversale à celles proposées dans nos travaux, un processus qui pourrait expliquer non seulement bon nombres de techniques-en-acte diagnostiquées dans nos travaux (en étant une forme de dénominateur commun aux technologies-en-acte que nous proposons) et qui offrirait aussi un autre regard sur les comportements que nous avons considérées comme instables. Peu importe peut-être pour certains élèves d'utiliser telle ou telle règle, ce qui les guide est une recherche de belles formes régulières, ou d'obtention d'une forme particulière. Par exemple, l'élève qui transforme $(a+b)^2$ parfois en $a + b^2$ et, parfois, en $2a + 2b$ peut-être considéré comme instable, mais n'est-il par stable dans sa volonté de conserver les ostensifs ? Croset (2009) p. 261

De la même manière envisage-t-elle une méta-technologie-en-acte consistant à considérer comme développement toute « suppression » de parenthèses. Qu'elle se fasse brutalement ou avec la distributivité, importe peut-être peu pour certains élèves, qui pourraient dès lors choisir indifféremment l'un ou l'autre. Ceci nous amène à réinterroger cette hypothèse de la manière suivante : étant donné qu'il est possible qu'apparaissent chez les élèves des savoirs qui ne sont pas mathématiques, ni enseignés, à la place des savoirs institutionnels, et qui seraient liés à des considérations syntaxiques, existe-t-il à rebours, des savoirs d'une autre nature, qui correspondraient à ceux-ci, et qui seraient susceptibles d'accompagner, ou d'intégrer les praxéologies de calcul algébrique pour les rendre conformes aux praxéologies institutionnelles ? En d'autres termes, peut-on envisager des savoirs opérationnels d'une autre nature, complétant les savoirs mathématiques ?

Le deuxième type d'hypothèse formulé en conclusion des résultats de Croset (2009), se situe à un niveau supérieur d'organisation des connaissances, et rejoint une hypothèse qui traverse de nombreux travaux (dont ceux cités ci-après) : celle d'un manque de « raisons d'être » (Chevallard & Bosch 2012), ou de « sens » donné au calcul algébrique, ou plus généralement aux objets algébriques, voire au domaine même de l'algèbre lui-même. Ceci conduit l'auteure à donner quelques pistes quant aux savoirs à enseignés, et aux pratiques enseignantes, qui toutefois ne font pas l'objet de sa recherche : l'étude menée est de façon essentielle tournée vers les savoirs appris, côté élèves. L'absence des technologies mathématiques institutionnelles pour les élèves qui commettent des erreurs, pose la question d'une composante technologique peut-être plus idoine, ou à compléter. L'importance accordée aux

[13] C'est-à-dire des composantes syntaxiques sans lien avec la sémantique des expressions, contrairement aux « règles » implantées pour les analyses de cette recherche.

variables de contextes dans les organisations de connaissance, amène à envisager un renouvellement possible de la composante technologique, pour soutenir des adaptations de techniques dans la pratique du calcul algébrique.

D'un autre point de vue, l'étude menée par Assude, Coppé et Pressiat (2012) postule que puisse exister une certaine incomplétude[14] dans les praxéologies enseignées ou à enseigner, qui soit à l'origine des difficultés des élèves. Elle s'appuie sur une analyse de l'évolution des programmes en France depuis 1995 qui témoigne d'une réduction de la place d'éléments technologiques s'accompagnant d'implicites ou d'ostensifs pour assumer les rôles de contrôle et de justification des manipulations de l'algèbre. La technologie mathématique est donc en partie supplantée par des éléments d'une autre nature au sein des praxéologies de calcul. Par ailleurs, l'étude du cas de la distributivité permet de dégager des spécificités de la place qu'un tel élément technologique peut occuper, à la fois dans les praxéologies de calcul algébrique, et dans les praxéologies de plus haut niveau les convoquant. L'analyse de l'évolution des programmes et de manuels (une vingtaine de spécimens sont concernés) montre en particulier une rupture qui, se conjuguant à un certain nombre d'implicites, pèse certainement sur l'organisation des connaissances : c'est celle de la répartition des opérations sur les nombres relatifs entre la 5^{e} et la 4^{e}. La multiplication n'est en effet enseignée qu'en 4^{e} dans les programmes actuels, alors que la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition et à la soustraction est introduite en 5^{e}. L'absence de quantificateurs dans l'écriture de la propriété $k(a + b) = ka + kb$ véhicule donc implicitement en 5^{e} l'idée que k, a et b ne peuvent être que positifs, ce qui est susceptible de peser sur toute extension praxémique à défaut d'une mise à l'étude. Plus encore, l'étude des manuels de 4^{e} montre que :

> les liens entre distributivité et multiplication des relatifs ne sont pas clairement établis : d'une part, rien de témoigne du fait que la définition de la multiplication des négatifs est choisie de façon à ce qu'elle soit (demeure) distributive par rapport à l'addition et, d'autre part, on ne trouve dans le cours, aucune reprise de la propriété de distributivité sous une seule formulation algébrique. Assude, Coppé, Pressiat (2012) p.53 sq.

On voit là que la distributivité n'assure pas la fonction de production de technique qu'elle pourrait pourtant occuper dans les praxéologies de construction de la multiplication sur les nombres relatifs.

Quant aux praxéologies de démonstration, si les programmes de 2007 et de 2008 montrent une évolution vers la mise en œuvre de types de tâches de démonstration dans le domaine algébrique, les mêmes auteurs interrogent leur place par rapport aux éléments technologiques afférents car les programmes séparent en effet les blocs pratico-techniques et technologico-théorique :

[14] Nous faisons référence ici au *degré de complétude* d'une organisation mathématique locale définie par Bosch, Fonseca & Gascón (2004) qui dépend de l'authenticité des moments vécus dans l'organisation didactique prenant en charge son élaboration. Les moments de l'étude étant celui de la première rencontre avec un type de tâche, de l'émergence de la technique afférente, du travail de cette technique, du moment technologico-théorique (de justification) et enfin du moment de l'évaluation (de la praxéologie construite comme de sa maîtrise). Nous avons mis en relation (Constantin 2008) ces moments avec une certaine caractérisation des praxéologies construites au regard d'hypothèses concernant les difficultés d'élèves, de sorte que nous parlons ici d'incomplétude structurelle de praxéologies en nous référant implicitement à l'organisation didactique qui lui est intimement liée, mais qui pourtant fait l'objet en retour d'hypothèses au regard des savoirs enseignés et à enseigner.

> Ces types de tâches étant placés dans différents secteurs du programme et séparés de leur élément technologique, nous faisons l'hypothèse que l'enseignement réalisé fasse de même en construisant des organisations mathématiques parcellaires Assude, Coppé, Pressiat (2012) p. 52

L'étude de manuels montre en dépit du programme, que

> Les types de tâches de preuve ou de généralisation sont rares (entre 2% et 13% des exercices), les programmes de calculs sont peu présents ou absents.
> [...]Une grande insistance est donnée à la forme des expressions [...] Ainsi on explicite les techniques par l'idée de transformation des écritures plutôt que par l'application de la propriété.
> [...] Il en résulte que la propriété de distributivité perd de sa prépondérance technologique pour justifier et valider les calculs. Il y a donc un risque que les élèves ne l'utilisent pas et se rabattent sur des techniques portant sur les transformations d'écritures exclusivement basée sur des ostensifs, avec des critères de vérification peu opérationnels portant sur la forme. Assude, Coppé, Pressiat (2012) p. 54 sq.

Cette étude met donc à jour un « *émiettement des tâches séparées de leur élément technologique* » dans l'évolution des programmes de sorte que l'on puisse anticiper le renouvellement du constat que nous faisons encore aujourd'hui de praxéologies désarticulées dont les techniques de manipulations ostensives, déconnectées de toute technologie mathématique, se conjuguent à des moyens de contrôles ostensifs peu efficaces, et ce à plusieurs niveaux praxéologiques. Plus encore, les auteurs soulèvent aussi un certain émiettement de la technologie mathématique de la distributivité, qui est présentée sous des formes différentes (avec le cas de l'addition, de la soustraction, de la simple ou de la double distributivité) tout au long du collège. Or ces formes ne font pas l'objet d'un véritable travail d'unification : en 4^e en particulier, la forme associée à la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition devient suffisante, mais les auteurs montrent qu'aucun retour n'est organisé pour mettre à l'étude cette évolution à la fois de la forme de la technologie mathématique (*via* l'écriture algébrique) et à la fois des levées de contraintes portées implicitement à un niveau de classe inférieur. Ainsi, dans la forme $k(a - b) = ka – kb$, en 5^e , l'absence de la multiplication sur les relatifs impose que $a > b$, mais cette contrainte peut être levée en 4^e. Ce morcellement technologique, sans exploration mathématique de ses limites et portées, peut être de nature à en renforcer l'utilisation formelle et un certain affaissement du mathématique dans les composantes technologiques que perçoivent les élèves.

Au regard des erreurs d'élèves en calcul algébrique, ces recherches convergent vers l'idée de dysfonctionnements, voire d'absences technologiques. Toutefois, les points de vue sont différents. Ils concernent d'une part, les savoirs à enseigner ou enseignés (Assude, Coppé, Pressiat 2012), et d'autre part, les savoirs appris. L'incomplétude des organisations mathématiques locales des uns, éclaire la présence de technologies-en-acte pour les autres, développées par les élèves (Croset 2009). L'absence ou l'évanescence des technologies mathématiques institutionnelles observées par ces recherches, ne permet pourtant guère de livrer des éléments quant à ce qui pourrait permettre de rendre sa fonctionnalité à de telles technologies au sein des praxéologies du calcul algébrique pour les élèves. Des pistes sont envisagées, pour compléter ces praxéologies, soit du point de vue technologico-théorique, soit d'un point de vue plus global dans une certaine complexification des organisations mathématiques. Dans un cas comme dans l'autre, la nature des technologies afférentes nous semble à interroger : s'agit-il de savoirs mathématiques, ou de savoirs d'une autre nature (syntaxique ?) ? En effet, si l'on peut dégager certaines conditions pour que la distributivité par exemple, joue un rôle central vis-à-vis de ces technologies, (Assude & al. 2012), les ingrédients technologiques qui permettraient de délimiter les techniques, d'en donner la portée, au regard de modifications des écritures mathématiquement pertinentes (Croset 2009), mais aussi d'en identifier les adaptations (Constantin 2008) ne semblent guère dévoilées. Tel n'était pas le projet de ces auteurs à l'origine. Nous en abordons maintenant l'étude.

1.2 QUELS SAVOIRS OPERATIONNELS POUR ENSEIGNER LE CALCUL ALGEBRIQUE ?

Cette partie vise à interroger les éléments qui pourraient constituer une technologie à même d'éclairer véritablement les techniques du calcul algébrique, et par suite, la théorie mathématique susceptible de constituer l'arrière-plan de telles technologies. L'organisation mathématique de référence dans laquelle nous situons notre travail (Pilet 2012) livre *a priori* un élément de réponse potentiel issu des savoirs savants afférents aux praxéologies du calcul algébrique : la théorie des polynômes. Quelles propriétés peuvent-elles alors soutenir les pratiques et comment ? Nous nous appuyons dans un premier temps sur les travaux d'Abou-Raad (2003, 2004 et 2006), et d'autres (nous revenons sur les résultats de Tonnelle (1979), ou de Croset (2009) notamment), afin de déterminer des éléments technologico-théoriques opérationnels pour l'enseignement du calcul algébrique. Ces recherches nous permettent de mettre en regard les erreurs d'élèves et les pratiques enseignantes et d'interroger les effets de la présence ou de l'absence de l'objet polynôme dans l'enseignement, et des savoirs qui lui sont rattachés. Quels sont alors ces savoirs, lorsqu'ils sont enseignés, et de quelle manière peuvent-ils outiller les pratiques des élèves comme celle des enseignants ? Nous complétons ce questionnement autour de savoirs mathématiques, par celui d'éléments potentiellement opérationnels issus du domaine numérique. A cet effet, nous revenons sur certains résultats de la recherche d'Abou Raad (2006) déjà mentionnée, faisant écho à celle de Mercier (1995), à propos de pratiques numériques anciennes à même d'éclairer certaines techniques de calcul algébrique. Dans un second temps, nous nous interrogeons sur des savoirs d'une autre nature, attenants aux aspects linguistiques des écritures algébriques, qu'abordent les mêmes auteurs (Abou Raad et Mercier (2009)), et d'autres (Sackur, Drouhard, Maurel et Pécal (1997) en particulier). La pratique du calcul algébrique se faisant par des transformations opérant sur un langage, de tels savoirs y affleurent nécessairement, même s'ils ne sont pas désignés comme objet d'enseignement par les programmes. Comment dès lors peuvent-ils vivre dans les classes, et comment l'enseignement s'en empare-t-il malgré tout ? Notre questionnement concerne à la fois les spécificités de ces savoirs et la façon dont ils peuvent se constituer comme soutien à l'accomplissement des tâches du calcul algébrique.

Revenons tout d'abord aux composantes technologico-théorique de nature mathématique.

1.2.1 Des technologies et des théories mathématiques inopérantes ?

Des savoirs dans le domaine algébrique : la théorie des polynômes

Les recherches menées par Abou Raad (2003, 2004 et 2006) s'intéressent tout d'abord aux erreurs d'élèves dans la pratique du calcul algébrique, en France et au Liban, avant de s'interroger sur les pratiques d'enseignement, qui, au Liban, sont fondées en partie sur des éléments technologico-théoriques apparentés à la théorie des polynômes.

Le premier résultat saisissant de ces travaux, est le fait que, malgré les différences apparemment importantes entre les savoirs à enseigner en France et au Liban, les erreurs à propos de la factorisation par un facteur commun binôme, sont les mêmes, pour les élèves des deux pays. Les élèves libanais disposent pourtant de théorèmes dont ne disposent pas les élèves français. Ces théorèmes relèvent d'une certaine théorie des polynômes, absente des programmes en France. Cependant, les analyses comparées des erreurs d'élèves en fin d'apprentissage montrent, tout comme les recherches de Tonnelle (1979) ou de Bardini (2001) en attestaient dans d'autres circonstances à propos de la factorisation, que dans les deux pays, les élèves :

> […] s'appuient dans la pratique sur leur expérience d'un type d'exercice, les éléments déterminant leur comportement étant certains indices formels, que les élèves ont identifiés à l'usage. (Abou Raad & Mercier 2009)

La recherche conduite en 2006 (Abou Raad 2006) permet, au travers de comparaisons curriculaires, d'étude de techniques vivant dans les classes et des discours enseignants qui les accompagnent, de montrer que le problème vient de « la manière dont le travail algébrique est enseigné et appris » qui est la même en France et au Liban.

Il serait toutefois réducteur d'en déduire que la théorie dont disposent les élèves libanais n'est pas opérationnalisée dans leurs pratiques. L'enseignement de la factorisation repose sur les notions de polynômes de degré et de PGCD. Dans l'une des séances de classe observée et analysée par Abou Raad (2006), par exemple, un enseignant décrit, avec les élèves, une technique de factorisation par un monôme en s'y appuyant. L'expression concernée est $16y^2 + 64y$. L'enseignant demande « le facteur commun, c'est quoi ? » et poursuit, avec les élèves, « c'est le PGCD, n'est-ce pas ? ». Ainsi le facteur commun est-il identifié et permet d'obtenir la factorisation dite « maximale ». Plus encore, l'analyse d'un extrait de l'une des séances précédentes dans la même classe, met en avant l'existence d'un discours fondé sur la division d'un monôme, pour expliciter la technique permettant de trouver les termes du second facteur. A la question « Comment on trouve les nombres qui restent à l'intérieur de la parenthèse ? », les élèves répondent sans hésiter : « on divise », et le dialogue avec la classe se poursuit: « oui, on divise quoi ? », « par le facteur », et aboutit au fait qu'on divise par le facteur commun, « c'est-à-dire quatre x divisé par deux x, nous donne deux // huit x deux divisé par deux x ça fait quatre ».

La recherche de PGCD et la division de deux monômes sont des notions anciennes au moment de l'épisode observé par Abou Raad (2006), de sorte qu'elles ne font l'objet que d'un rappel (les tâches ne sont que nommées), pour éclairer la technique de factorisation. En France, l'absence de la notion de PGCD dans le travail algébrique, dont témoignent les manuels et le programme, pèse sur la technique de factorisation, pour la recherche du facteur commun : il n'y a pas de décomposition en facteurs premiers, par exemple, qui pourrait outiller les pratiques de calcul algébrique relevant de ce genre de tâche comme au Liban. Le travail se fait par connaissance des tables de multiplications et par tâtonnements, et les enseignants exigent la factorisation dite «maximale » en prenant appui sur des effets de contrat didactique. Cependant, dans le cas de la factorisation par un binôme, les différences entre les deux pays sont plus ténues et Abou Raad (2006) met à jour des pratiques similaires :

> Les enseignants visent à transmettre la technique de recherche du facteur commun binôme à partir des exemples d'expressions algébriques à factoriser. Ils n'ont avancé aucune explication, par suite aucun cours n'est explicité. L'accent est mis sur des procédures algorithmisées. Les enseignants portent des « lois » du savoir enseigné, qu'ils considèrent naturelles et nécessaires dans ce travail de factorisation. (Abou Raad 2006)

Les savoirs mis en avant pour outiller la pratique du calcul algébrique, ne sont plus sous le contrôle de la théorie des polynômes alors toute aussi évanescente au Liban qu'en France. Les éléments susceptibles d'en composer la technologie, reposant sur les notions de degré ou de facteur liées aux polynômes[15], et dont pourraient disposer les enseignants, puisqu'elles apparaissent *a priori* comme savoir à enseigner, ne sont pas mobilisés en tant que tels :

> Car les notions de polynôme et de monôme dont ils disposent n'intègrent pas les notions de « degré d'un polynôme » et de « binôme de degré un » comme moyens de contrôle de la factorisation réussie mobilisant un théorème sur les puissances comme $a^{p+q} = a^p . a^q$. Les théorèmes dont ils pourraient disposer portent en effet sur les nombres et ne sont pas généralisés, même par métaphore, au cas des polynômes. Il n'est pas dit que « le degré du produit de deux binômes – de degré un - est la somme de leurs degrés : deux » ou que « certains polynômes de degré deux se factorisent en produit de deux binômes de degré un ». Abou Raad & Mercier (2009) p. 184

Les notions de degré, ou de polynômes ne sont ainsi pas associées à une composante technologique, autrement dit, elles ne sont pas constituées comme savoirs opérationnels pour la factorisation. Les descriptions locales qu'elles permettent, comme au travers d'énoncés mentionnant la « factorisation en produit de deux facteurs du premier degré », ne suffisent pas à éclairer les techniques à mettre en œuvre :

> Les élèves ne peuvent tirer aucune information de cette expression standard : le terme de « facteur n'y est pas plus défini ou praticable que celui de degré. Abou Raad & Mercier (2009) p. 184

La théorie des polynômes n'est-elle alors pas opérationnalisée au Liban, seulement par manque de construction de propriété ou de théorèmes s'appuyant sur les notions disponibles ? Les auteurs suggèrent que puisse exister une généralisation de théorèmes numériques comme ceux concernant les degrés, à même d'outiller des vérifications, mais de telles composantes technologiques de contrôles suffiraient-elles à soutenir le calcul algébrique lui-même ? On peut penser à d'autres théorèmes portant par exemple, sur les coefficients des polynômes, comme : le coefficient du terme de plus haut degré d'un produit de deux polynômes, est le produit des coefficients des termes de plus hauts degré de chaque facteur. Notons par ailleurs que ces théorèmes seraient opérationnels tant pour des factorisations que pour des développements. Ils ne décrivent pourtant pas le calcul lui-même. On pourrait alors envisager une généralisation de praxéologies afférentes à la division de deux monômes dont on a vu plus haut qu'elle pouvait soutenir certaines factorisations. Toutefois, l'algorithme de division de deux polynômes (en posant) suppose que l'on puisse au préalable déterminer l'un des facteurs, par exemple à partir d'une racine du polynôme à factoriser, et de la propriété selon laquelle, en notant a un nombre réel, un polynôme $X - a$ divise un polynôme P, si et seulement si, a est racine de P. Comment cependant, envisager ces théorèmes comme composante technologique, tandis que les notions de degré ou de polynômes ne sont pas même définies ? Autrement dit, la théorie des polynômes que l'on pourrait imaginer peut-elle être opérationnelle dans ces conditions ?

Lorsque ces notions faisaient partie des savoirs à enseigner en France, l'absence de construction des concepts associés provoquaient une organisation particulière du savoir, et privaient de sens toute question relative à leur existence ou leur détermination. Comment,

[15] Notons que les polynômes dont nous parlons ici et par la suite, sont des polynômes à une indéterminée à coefficients dans $\mathbb{R}$.

sans définition de la notion de polynôme, peut-on en effet déterminer si la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est, ou non, une fonction polynôme ? En réalité, cela dépend du corps dans lequel l'on se place : dans $\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$, il s'agit bien d'une fonction polynôme, tandis que dans $\mathbb{R}$ il n'en est rien. De la même façon, le degré de $x^2 + 5$ est 2 parce que l'on se trouve dans $\mathbb{R}$:

> L'absence du concept de polynôme apparaît ainsi comme allant de pair avec l'absence du concept de nombre réel […] si les questions proposées plus haut [*sur la détermination d'une fonction comme polynomiale, ou celle de son degré*] ne peuvent pas être posées (posées, elles peuvent alors effectivement être résolues) c'est à cause des conditions d'existence particulière de ces objets : les concepts de réel et de polynôme, ne sont pas en effet des construits, mais des préconstruits. Tonnelle (1979) p. 60

Le caractère préconstruit d'un objet, s'exprime par le fait que son existence est considérée comme allant de soi, par des phénomènes langagiers qui la désignent, ou par monstration, tout en empêchant tout questionnement à leur propos :

> […] un élève de troisième pourra dire que la fonction $x^3 - x$ est une fonction polynôme, parce que, une fonction polynôme, c'est *ça* (quelque chose de cette forme) […] Son savoir est fait d'éléments juxtaposés, inorganisables en un tout cohérent parce que chaque élément ne vaut que dans une situation donnée. Chevallard (1989) p. 93

La préconstruction est un statut qui ne permet pas de rentrer dans une activité théorique qui mette en débat les objets afférents. Les savoirs les concernant ne peuvent être décontextualisés, et s'avèrent fragiles. Les préconstruits existent pourtant, y compris dans les savoirs scientifiques, à un moment donné, jusqu'à ce qu'ils se trouvent déstabilisés. Alors la question de leur construction peut être posée, et le savoir repris. Ainsi en est-il de l'exemple du rapport de grandeurs, qui a fonctionné dans l'histoire des mathématiques comme préconstruit, jusqu'à l'émergence de $\sqrt{2}$ et de l'impossible commune mesure de la diagonale et du côté d'un carré. De même l'enseignement fonctionne nécessairement sur une partie de préconstruits, comme les nombres entiers. Cependant, le caractère préconstruit des polynômes semble faire obstacle à l'émergence d'éléments technologiques fondés sur la théorie afférente pour le calcul algébrique.

> La factorisation telle qu'elle fonctionne dans l'enseignement, est d'abord un moyen de désigner le concept de polynôme – sans le définir : les factorisations se font en facteurs polynômiaux, cela n'est pas dit, mais cela est apposé à la consigne même de factorisation, et c'est même cela qui est le plus important. Ainsi, un ensemble complexe d'interdits non explicités mais patiemment inculqués qui sont des interdits productifs de conduites réglées, amènent l'élève à factoriser « correctement », en reconnaissant implicitement, mais sans pouvoir en parler avec les mots qu'il faudrait, la notion de polynôme. Tonnelle (1979) p. 63

Cet état de l'enseignement d'alors s'accompagne de l'impossibilité de penser la consigne de factorisation. L'absence des concepts de polynômes et de nombres réels ne permet pas de la définir véritablement. La consigne de factorisation, pour qu'elle soit conforme aux attendus scolaires, n'est pas formulable en termes mathématiques (Tonnelle 1979 p. 65).

Les notions de polynôme et de degré n'apparaissent plus dans les programmes actuels en France, mais l'étude des pratiques enseignantes et des conditions pesant sur les savoirs à enseigner lorsqu'elles l'étaient (ou le sont, comme au Liban) laisse penser que le caractère opérationnel de telles notions ne saurait aller de soi. Tonnelle (1979) parle d'une contradiction du système didactique entre les injonctions du programme pour fonder le calcul algébrique sur les fonctions polynômes et l'impossibilité à laquelle le même programme conduit, de construire le concept. Le caractère préconstruit des notions fondées sur la théorie des polynômes limite *a priori* les possibilités de les constituer comme élément technologique à même d'éclairer les techniques du calcul algébrique.

En outre, les savoirs mathématiques potentiellement utiles au calcul algébrique, ne se limitent pas aux propriétés des lois de l'anneau de polynômes. C'est ce que montrent les travaux de Mercier (1995) et d'Abou Raad (2006) en mettant en regard les difficultés des élèves et une certaine théorie numérique dont ils pourraient tirer partie.

Des savoirs de nature numérique issus de praxis anciennes

L'importance accordée au travail technique dans les classes (et dans la dimension objet privilégiée) ne semble pas assurer pour autant, du côté des élèves, la capacité à mettre en œuvre un calcul « démonstratif ». Abou Raad (2006) témoigne ainsi des difficultés de cinq élèves de la 3e à la Terminale S pour factoriser $a^2 + 2ab + b^2$, à l'occasion d'entretiens. Il leur est demandé de ne pas développer $(a+b)^2$, pour prouver l'équivalence entre forme développée et forme factorisée. Ils ne parviennent pas à écrire $2ab$ sous la forme $ab + ab$:

> La difficulté de ces élèves est claire, c'est l'« algébrique » qui est en cause. Le problème est, en fait, de comprendre comment les écritures mathématiques peuvent être manipulées. La complexité se traduit par la transformation productive qui conserve « l'égalité » entre l'expression **2*ab*** du départ et celle de l'arrivée ***ab* + *ab***. Cette manipulation d'écriture permet de reproduire une autre opération : la multiplication, qui est reproduite en une addition répétée : « le double d'un nombre est égal à la somme de ce nombre et de lui même » ne semble pas opératoire dans un calcul algébrique, aucun lien n'existe entre « produit » et « somme ». Il se peut que les élèves sachent cette transformation, puisque c'est une connaissance très ancienne, elle date du CM1, mais ils ne sont pas conscients que ce soit là qu'il faut l'appliquer (Abou Raad 2006)

Outre la question de ce que Tonnelle (1979) nomme une augmentation de la complexité ostensive, et qu'Abou Raad identifie comme difficulté supplémentaire pour passer de « $a^2 + 2ab + b^2$ » à « $a^2 + ab + ab + b^2$ », on voit là comment certaines incomplétudes de praxéologies anciennes, réduites à leur composante praxique, peuvent finalement se perpétuer dans les praxéologies de calcul algébrique. Cette double incomplétude revêt plusieurs aspects. Tout d'abord, les manipulations dans le domaine numérique permettant d'écrire par exemple que $4\times3 = 4 + 4 + 4$, existent à l'école primaire, c'est-à-dire qu'elles font partie de pratiques numériques anciennes. Cependant, de telles égalités ne semblent pas, pour les élèves, s'être constituées comme potentielles composantes technologiques. Ensuite, l'extension de cette définition de la multiplication comme addition itérée, du domaine numérique au domaine algébrique, ne semble pas avoir eu lieu. Or, elle serait là essentielle à la technique algébrique. A la suite des travaux de Mercier (1995), l'auteure situe les difficultés des élèves dans un manque d'une technologie du côté de connaissances numériques :

> […] les élèves utilisent dans le domaine de la numération des techniques sans horizon technologique. Ce qui fait que, dans une configuration d'enseignement où existe seul le niveau des routines (ce serait le Liban) et dans une configuration où existe seul le niveau des algorithmes (ce serait la France), nous avons les mêmes erreurs qui ne sont pas dues à une organisation curriculaire qui serait autre ici et là. (Abou Raad 2006)

Ces études nous amènent à considérer des savoirs théoriques de nature mathématique à même d'outiller la pratique du calcul algébrique, ou, autrement dit, des composantes théoriques permettant d'augmenter le degré de complétude, au sens de Bosch, Fonseca et Gascón (2004), des praxéologies mathématiques. Toutefois, la théorie des polynômes ne fait pas partie des programmes actuels en France, et quoi qu'il en soit, lorsqu'elle l'était, Tonnelle en montre le caractère préconstruit des objets, ou le manque de propriétés afférentes –comme au Liban sur les degrés - qui n'en permettait pas d'utilisation productive. En revanche, il existe des savoirs numériques de nature mathématique qui semblent revêtir un certain potentiel pour soutenir les techniques. Les travaux d'Abou Raad (2003, 2004 et 2006) et de Mercier (1995) nous amènent à postuler que la reconstruction de blocs technologico-théoriques de pratiques numériques anciennes, ayant un potentiel d'extension à des pratiques algébriques pertinentes, est de nature à compléter les praxéologies de calcul algébriques dans leur composante théorique.

En particulier, le cas de la définition de la multiplication par addition itérée nous semble, au regard des achoppements précédents, un complément théorique intéressant, voire nécessaire, pour soutenir la pratique d'un calcul démonstratif. Il ne saurait être pour autant suffisant. Dès lors peut-on s'interroger sur de possibles éléments de savoirs d'une toute autre nature, liés aux écritures. Les erreurs d'élèves que nous avons observées dans la partie précédente de ce chapitre, laissent penser que de tels savoirs existent, bien qu'ils semblent inopérants en l'état. Le constat d'assujettissement des techniques aux formes d'expressions en est un révélateur, que l'on retrouve dans les travaux d'Abou Raad (2006), de Tonnelle (1979), de Croset (2009) et qui font écho à nos propres résultats (Constantin 2008) côté élèves, mais aussi à bien d'autres, dont témoigne en particulier un ensemble de recherches à propos de l'enseignement de l'algèbre élémentaire[16], dont Mercier (2012) fait une synthèse :

> Ainsi, les auteurs observent comment le manque technologique, identifié dans ce numéro spécial de RDM, impose sa loi en ne donnant pas, même aux professeurs, des mots pour penser leurs problèmes d'enseignement. Nommer le problème en termes de « dialectique entre registres » n'y change rien tant que ces registres ne sont pas constitués comme registres de pratique pour les élèves, et comme œuvres mathématiques pour les professeurs. Mercier (2012) p. 176

Ceci fait écho à l' « absence de traitement des aspects formels dans l'enseignement des mathématiques au second degré » auquel Tonnelle (1979) relie l'absence de concepts qu'il identifie. S'il ne s'agit pas de l'objet de sa recherche toutefois, d'autres auteurs explorent la question des aspects linguistiques inhérents au calcul algébrique, en interrogeant les pratiques enseignantes :

> Notre connaissance des erreurs des élèves est assurée, et depuis longtemps les travaux internationaux retrouvent le fait que ces erreurs sont les produit d'une manière d'enseigner dite « formelle » : les élèves gèrent des écritures symboliques qu'ils ne peuvent interpréter […]
> […] ni le professeur ni les élèves n'arrivent à s'engager dans un enseignement pour lequel ils ne disposeraient pas des mots pour dire ce qu'il y a à apprendre et qui devrait être en rapport avec ce qu'ils ont à faire pour enseigner et apprendre. Mercier (2012) p. 170

Dès lors, les savoirs opérationnels pour l'enseignement du calcul algébrique peuvent-ils participer, au-delà d'une théorie mathématique, d'une certaine théorie des écritures ?

[16] *Enseignement de l'algèbre élémentaire, Bilan et Perspectives, Recherche en Didactique des Mathématiques, Hors Série,* Coordonné par L. Coulange, J-Ph Drouhard, J-L Dorier, A. Robert.

Afin de dégager des premiers éléments de réponse à cette question, nous nous appuyons sur un certain nombre de travaux (Abou Raad et Mercier 2009, Sackur, Drouhard, Maurel et Pécal 1997 ou encore Lenfant-Corblin 2002, Ben Nejma 2009 Ben Nejma et Coulange 2009) qui explorent les pratiques enseignantes. Celles-ci tentent de produire des discours à propos des manipulations des écritures, sans toutefois parvenir à les rendre opérants.

Ces recherches désignent alors en creux, des compléments théoriques aux praxéologies mathématiques qui conjuguent des éléments mathématiques et des éléments linguistiques, bien qu'elles en montrent l'absence ou les difficultés d'enseignement, au travers d'explorations des dysfonctionnements technologiques afférents. C'est ce que nous allons voir maintenant.

1.2.2 Vers d'autres éléments technologico-théoriques liés aux écritures algébriques

Des pratiques enseignantes existantes

Reprenons tout d'abord les résultats d'Abou Raad (2006). Les observations de classes et les analyses menées par l'auteure, lui permettent de caractériser le discours technologique par la prégnance d'éléments ostensifs qu'il tente d'organiser, pour décrire les techniques de calcul algébrique. Ce faisant, les importations de termes non mathématiques s'y déploient sans contrôle théorique du point de vue des écritures :

> Ils font le déchiffrement sans utiliser le lexique mathématique convenable. En revanche, ils abusent du langage de tous les jours, comme « *on le chasse* », « *on le met dehors* », « *la chose* », etc.
> [...] Ils ont utilisé des ostensifs surtout graphiques (les soulignants, les encadrés, les couleurs,…) pour montrer le « terme qui se répète ». Les délimitants, crochets et parenthèses sont très importants, et il ne faut pas oublier de « *simplifier* », « *d'enlever les parenthèses à l'intérieur des crochets* » pour donner la « forme-produit » visée par les enseignants.

L'observation de la prégnance d'éléments ostensifs dans les discours accompagnant le travail algébrique, au travers de séances d'enseignement, d'entretiens ou de manuels, du côté élève comme enseignant, est récurrente dans les recherches qui s'y intéressent (et en particulier celles sur lesquelles nous nous appuyons). Pilet (2012) par exemple, montre à partir d'une analyse de manuels, combien les indices visuels sont mis en avant pour décrire les techniques du calcul algébrique. Tonnelle (1979) parle de descriptions sous la forme de modes d'emploi, associées à des validations formelles qui ne peuvent s'effectuer que par conformité : le résultat d'un calcul algébrique est juste si l'on a correctement suivi la succession d'étapes données par le mode d'emploi. Il note dès lors un déplacement dans la problématique dont les élèves peuvent s'emparer : les problèmes auxquels ils se trouvent confrontés, au sujet de la factorisation, s'avèrent centrés sur des reconnaissances de formes. Ce travail formel, et les descriptions ou les validations des écritures qui l'accompagnent, n'est en rien illégitime, dans le sens où tout usage d'un langage suppose une manipulation de certains ostensifs. Les recherches convergent pour montrer l'absence d'une *dialectique* entre ostensifs et non ostensifs et les conséquences de cette absence sur les pratiques des élèves qui ne peuvent s'y appuyer pour éclairer, soutenir ou contrôler leurs techniques. Le travail formel est isolé, non pas ponctuellement comme l'expert peut le pratiquer, mais par construction dans l'enseignement : les non-ostensifs semblent ne jamais avoir été construits ni être disponibles *en dialectique* avec les ostensifs.

Les difficultés d'enseignement qui émergent au travers des recherches précédentes, apparaissent doublement liées aux difficultés à prendre en compte les aspects linguistiques du travail algébrique. D'une part, ils paraissent manquer de mots pour parler des manipulations des écritures :

> Lorsque les enseignants tentent de rendre compte des routines qu'ils attendent, ils ne peuvent pas revenir aux algorithmes qui les fondent puisque cela supposerait une théorie des formes symboliques algébriques. Ils doivent donc décrire dans le langage courant les transformations nécessaires. (Abou Raad 2006)

Ceci nous amène à nous interroger sur un outillage potentiel du côté d'une théorie des formes symboliques algébriques, pour l'enseignement. D'autre part, les enseignants ne semblent pas parvenir à dialectiser les aspects linguistiques et les éléments technologico-théoriques mathématiques dont ils peuvent disposer.

Les observations d'Abou Raad (2006) témoignent de discours orientant les descriptions de techniques à partir des « traits de surface des expressions » sans les articuler à la composante technologique mathématique. Ils rappellent les « variables de contextes » du côté élève (Croset 2009). Au lieu de soutenir et de compléter d'une certaine manière les praxéologies mathématiques, les discours construisent des praxis formelles à la fois sans perspective théorique (du point de vue d'une théorie des écritures) et sans dialectique avec le mathématique.

De ce point de vue, une grande stabilité existe dans les pratiques d'enseignement autour de l'algèbre élémentaire, que ce soit pour des enseignants débutants (Lenfant-Corblin 2002) ou des enseignants expérimentés (Ben Nejma 2009, Ben Nejma et Coulange 2009), même confrontés à un changement de programmes enjoignant un enseignement fonctionnel :

> La mise en regard de nos travaux respectifs (Lenfant-Corblin 2002, Ben Nejma 2009 Ben Nejma et Coulange 2009) nous permet de suggérer une propension évidente des enseignants qu'ils soient chevronnés, à l'instar de Sara, ou débutants stagiaires, à l'instar de Marie, Julien, Benjamin et Claire, à se centrer sur l'enseignement des techniques algébriques *stricto sensu*, et ce malgré les attentes institutionnelles marquées sur la dimension outil de l'algèbre. Coulange, Ben Nejma, Constantin & Lenfant -Corblin (2012) p. 73

Ceci nous amène à la question d'une théorie des écritures algébriques à même de fournir des éléments technologico-théoriques satisfaisants, c'est-à-dire qui permette aux enseignants, comme aux élèves, d'éclairer la pratique du calcul algébrique, dans une dialectique entre les aspects sémio-linguistiques et mathématiques de ce travail, et qui donne ainsi « du sens » aux écritures et à leurs manipulations.

Or nous disposons d'une telle théorie dans la recherche : il s'agit de celle développée par Drouhard (1995) à propos des expressions symboliques algébriques et de leur « sens ».

Une recherche du « sens » des écritures algébriques

D'un point de vue linguistique Drouhard (1995), ou Sackur, Drouhard, Maurel & Pécal (1997) mettent en regard les erreurs des élèves avec la sémantique des expressions, c'est-à-dire avec ce que des expressions peuvent représenter ou signifier. Ces recherches se fondent sur une distinction introduite par Frege (1892) de la sémantique en deux composantes, celle du sens (*Sinn*) et celle de la dénotation (*Bedeutung*). Ainsi deux expressions comme « x^2-1^2 »

et « $(x+1)(x-1)$ » peuvent-elles référer à une même fonction de ℝ dans ℝ : elles ont même dénotation. Elles n'ont pourtant pas le même sens, c'est-à-dire que la manière dont le dénoté nous est donné (Frege parle de « mode de donation de l'objet [dénoté] » Drouhard et Panizza 2012) diffère et par suite donne accès à des informations de nature différente. L'expression « $x^2 - 1^2$ » met en avant une différence de deux carrés, tandis que « $(x + 1)(x- 1)$ » correspond à un produit. Chevallard et Bosch (2012) parlent de différence de deux programmes de calcul ainsi « exprimés » de façon algébrique. Deux expressions rhétoriques seraient en effet « Soustraire le carré de 1 au carré du nombre donné » et « Ajouter 1 au nombre donné, d'une part, soustraire 1 au nombre donné d'autre part, puis effectuer les produits des nombres obtenus ».

Du point de vue de la sémantique des expressions, l'interprétation des dysfonctionnements technologiques à l'occasion d'erreurs d'élèves, peut donc relever soit du sens soit de la dénotation.

Nous nous intéressons dans un premier temps à la question de la dénotation que Sackur, Drouhard, Maurel et Pécal (1997) explorent. Nous ne décrivons pas ici (mais nous y reviendrons) comment l'on peut définir rigoureusement la dénotation, mais empruntons la description qu'en font les auteurs précédemment cités, pour caractériser ce que les élèves peuvent en savoir, pour outiller leur pratique. Ainsi, savoir qu'une expression algébrique *dénote*, consiste, d'une part, à savoir qu'elle peut prendre une valeur numérique lorsqu'on remplace la ou les variables par une (ou des) valeur(s). Il s'agit d'autre part, de savoir que ces valeurs dépendent de celles des variables, et enfin, de savoir que ces valeurs ne sont pas modifiées par des transformations que peut subir une expression, pourvu qu'elles soient conformes aux règles de calcul algébriques.

Reprenons les deux expressions précédentes. Savoir que « $(x + 1)(x- 1)$ » dénote consiste donc à savoir que, à partir du moment où l'on remplace x par une valeur, comme 3, cette expression prend une valeur numérique, qui est alors 8. D'autre part, les valeurs obtenues dépendent des valeurs affectées à x. Enfin, si on développe « $(x + 1)(x- 1)$ », et si l'on obtient la nouvelle expression « $x^2 - 1^2$ », en ayant correctement employé une identité remarquable, la dénotation assure que toutes les valeurs prises par « $x^2 - 1^2$ », sont les mêmes que « $(x + 1)(x - 1)$ » (associées aux valeurs attribuées à x). Or, c'est bien cette propriété de conservation de la dénotation qui peut servir pour contrôler les transformations. Ces contrôles n'ont pas vocation à s'effectuer constamment :

> L'algèbre permet de transformer des expressions algébriques sans se référer *toujours* à leur signification, ce que Leibniz appelait le ''calcul aveugle''. Mais cette force est aussi, de fait, l'origine de la principale difficulté à enseigner l'algèbre : certains élèves ne font *jamais* référence à une signification quelconque. Nous appellerons ce type particulier de comportement le ''calcul à l'aveuglette'', et les élèves qui le manifestent des ''calculateurs aveugles''. Sackur, Drouhard, Maurel et Pécal (1997) p. 9

Si les praxéologies de calcul sont, de ce point de vue, incomplètes, c'est-à-dire que si la dénotation ne fait pas partie de la théorie disponible, et si la technologie fonctionne sans elle, les contrôles que pourront effectuer les calculateurs aveugles ne pourront s'appuyer sur une dialectique entre numérique et algébrique. Ainsi Chevallard (1989) relatait un épisode où un tel élève ayant produit des manipulations tout à fait idoines attendait un assentiment de l'observateur, non seulement cet élève ne disposait apparemment pas de moyen de s'assurer de la validité de son calcul, mais plus encore, était-il incapable de se saisir de la suggestion d'une vérification numérique :

> Le rapport de l'élève au calcul algébrique n'incorpore pas l'idée d'une relation entre manipulation algébrique de l'expression, d'une part, et substitution de valeurs numériques dans l'expression, d'autre part. Chevallard 1989

Les « calculateurs aveugles » ne tiennent pas compte dans leurs manipulations de la dénotation. Ignorer la dénotation peut cependant revêtir plusieurs aspects : il ne s'agit pas tant de savoir pour un élève calculer une dénotation, mais de savoir qu'elle doit rester la même dans l'accomplissement d'un calcul algébrique. La dénotation n'est pas indispensable à tout contrôle, mais le calculateur aveugle « ignore qu'il vaut mieux commencer par vérifier la dénotation du résultat avant de vérifier la conformité du choix des règles par rapport à la procédure. En d'autres termes il ignore que pour vérifier, la dénotation est prioritaire sur le sens. » (Drouhard 1995). En effet, la dénotation est souvent peu coûteuse, en particulier lorsque les manipulations engagent de nombreuses étapes de calcul dont une vérification de conformité serait fastidieuse.

Cela ne signifie pas pour autant qu'un calculateur aveugle ne dispose pas ou ne soit pas capable de mettre en œuvre « un certain nombre de techniques de vérification, comme la double résolution (consistant à recommencer le calcul et à comparer les résultats). Toutefois, il ne peut (par définition) employer les techniques puissantes qui mettent en œuvre la dénotation, et qui permettent dans un grand nombre de cas, de savoir à peu de frais si un résultat est correct (par exemple remplacer, dans l'équation initiale, x par la valeur trouvée). » (Drouhard 1995).

Sackur, Drouhard, Maurel et Pécal (1997) montrent plus encore, comment ces élèves, ignorant la dénotation, peuvent ne pas être convaincus par un professeur pouvant leur suggérer de remplacer a et b par des valeurs pour calculer $(a + b)^2$ et $a^2 + b^2$. Constater que les résultats ne sont pas les mêmes ne leur apporte rien : ils ne perçoivent pas la contradiction, deux procédures différentes peuvent donner des résultats différents sans que cela invalide leur manipulation. Ils ignorent cette propriété de conservation de la dénotation par une transformation légitime de l'expression. Les auteurs décrivent ainsi une dialectique entre numérique et algébrique qui, en dysfonctionnant, peut entraver les moyens de contrôle et s'insinuer dans des malentendus entre professeur et élèves :

> Le maître […] se situe au niveau mathématique. Son discours, oral ou écrit, qui porte sur les objets mathématiques, s'exprime au moyen d'expressions, qui ne sont pour lui qu'un moyen d'accéder à leur dénotation. L'élève, lui, ignore que ces écritures dénotent, et croit en toute bonne foi que son interlocuteur se situe également au niveau formel. […]
> Le malentendu repose ici sur le fait que l'élève ignore que les expressions symboliques algébriques ont une dénotation, et que le maître ne sait pas que l'élève l'ignore. Le terme « faux » désigne pour le maître la valeur de vérité, et signifie pour l'élève « incorrect ». Ce qui entretient le malentendu, c'est que tout calcul correct aboutit à un résultat vrai, et la plupart des calculs incorrects à un résultat faux. Autrement dit, les situations discriminantes pour l'un et pas pour l'autre sont rares. Drouhard 1995

Autrement dit, le malentendu se construit et s'entretient au travers de discours dont les éléments sont interprétés différemment par chaque acteur (du point de vue sémio-linguistique ou mathématique) sans qu'ils soient ni superposables ni articulés, par manque de théorie comme la dénotation. L'une des conséquences majeures de l'absence de dénotation étant d'empêcher une modification de ce rapport formel au calcul algébrique.

Nous postulons donc à la suite de ces travaux que, pour que les technologies du calcul algébrique fonctionnent de manière idoine, la dénotation doit faire partie de la théorie disponible associée aux praxéologies mathématiques afférentes.

Cette théorie n'est pas de la même nature mathématique que celles envisagées précédemment (de l'addition itérée, des polynômes) dans le sens où elle lie des composantes sémio-linguistique et mathématique. La conservation de la dénotation des expressions par transformation idoine est un théorème qui se démontre, dans le cadre de la logique, par récurrence sur la complexité des formules (Drouhard 1992), mais ce n'est pas une propriété intrinsèque des technologies mathématiques. De sorte que le lien entre cette théorie de la dénotation et la technologie mathématique est particulier, et ne s'inscrit pas tout à fait dans le cadre d'une modélisation de l'activité, notamment parce que :

> Les logiciens reconstruisent le langage mathématique pour pouvoir travailler dessus aisément. Par contrecoup, leurs constructions s'éloignent de la pratique usuelle des mathématiciens et sont donc peu utilisables, en l'état, pour nous permettre de comprendre la manière dont les élèves interprètent les règles, les expressions et les équivalences entre expressions. (Sackur, Drouhard, Maurel et Pécal 1997)

La dénotation ne légitime pas par exemple, la propriété de distributivité. En revanche, elle fait partie des propriétés liées à la sémantique des expressions et de leurs transformations que tout usage de la distributivité engage. Ainsi la théorie des écritures qui pourrait être à même de fournir des éléments technologico-théoriques opérationnels, paraît-elle de nature mixte, conjuguant des ingrédients sémio-linguistique et mathématiques. Nous allons y revenir précisément dans la partie consacrée aux éléments de description de la structure des formules algébriques à partir des outils de la linguistique permettant de clarifier le rôle et le fonctionnement de la dénotation.

Cependant, l'idée de « donner du sens » aux écritures algébriques, dépasse la seule recherche d'une théorie des écritures. La sémantique des expressions relève également de ce qu'elles peuvent représenter, ou désigner, c'est-à-dire du « mode de donation de l'objet » pour reprendre des termes frégéens. Ceci fait écho à la question d'un enseignement fonctionnel du calcul algébrique, qui paraît toujours peu existant dans les classes (Coulange, Ben Nejma, Constantin et Lenfant-Corblin 2012). Les travaux en didactique de l'algèbre semblent s'être centrés sur cette piste en s'emparant de praxéologies de modélisation à des fins d'enseignement. Ces recherches (Guillaume, Combier, Pressiat 1996, Bosch, Chevallard, 2012 Ruiz-Munzón, Matheron, Bosch & Gascón 2012) mettent en avant des réorganisations du savoir intégrant la sémantique des expressions. Toutefois, elles conduisent à laisser quelque peu de côté certains aspects concernant la théorie des écritures, et en particulier les aspects syntaxiques, et les difficultés langagières que les enseignants peuvent donner à voir. Du moins posent-elles la question de leur prise en compte dans ce cadre, et au-delà, de la façon dont elles peuvent soutenir la construction d'éléments technologico-théoriques pour le calcul algébrique, ainsi que la nature de ces éléments. C'est ce que nous allons voir maintenant.

1.3 LE ROLE DES PRAXEOLOGIES DE MODELISATION DANS LA CONSTITUTION D'UN ENVIRONNEMENT TECHNOLOGICO-THEORIQUE DU CALCUL ALGEBRIQUE

1.3.1 Rôle et limites des praxéologies de modélisation

Définition du processus de modélisation

Avant de nous intéresser à la place et au fonctionnement de la technologie dans les praxéologies de modélisation, nous commençons par définir ce que nous entendons par ce que l'on nomme processus de modélisation d'un système, dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique.

Trois étapes définissent ce processus. La première relève de la définition de ce système à partir d'un ensemble de variables dont le choix est orienté par la question à l'étude, et dont on en précise ainsi les « aspects pertinents » (Chevallard 1989). La seconde étape, la construction du modèle, consiste à produire un ensemble de relations entre les variables préalablement déterminées : cet ensemble définit alors le modèle mathématique. La troisième étape, enfin, est celle du travail du modèle :

> dans le but de produire des connaissances relatives au système étudié, connaissances qui prennent la forme de nouvelles relations entre les variables du système. (Chevallard 1989)

Cette catégorisation permet d'envisager à la fois des systèmes mathématiques, et des systèmes extra-mathématiques dans une même activité de modélisation. Ce faisant, la troisième étape est néanmoins nécessairement mathématique. Lorsque le processus de modélisation aboutit à un modèle algébrique, le travail du modèle -la troisième étape- se situe dans le domaine algébrique. Le système peut alors servir de milieu pour effectuer des contrôles de natures différentes. Ces contrôles relèvent à la fois de la portée du modèle créé, on pourra affecter un certain nombre de valeurs numériques aux variables choisies pour s'assurer que le système produit les mêmes valeurs que le modèle, ou avec une marge d'erreur « acceptable », ou du moins qu'il faudra mettre à l'étude. Ils peuvent aussi relever de la pertinence du modèle créé du point de vue du choix des variables, autrement dit, de la pertinence du choix du modèle, en référence à la question étudiée. Le cas échéant, il faudra construire un nouveau modèle, en modifiant éventuellement le précédent, c'est ce que l'on nomme la « récurrence » du processus de modélisation, dans une dialectique entre système et modèle, dont la dialectique entre numérique et algébrique fait ici partie.

La question qui nous occupe est celle des technologies du calcul algébrique qui fonctionnent dans les processus de modélisation. Ceci pose à la fois la question de la nature de ces technologies et de leur articulation entre système et modèle. Nous nous appuyons sur trois expérimentations issues de la recherche afin d'illustrer notre propos. La première (Mercier

2009), à partir d'une banque de problèmes à résoudre, permet d'explorer le potentiel producteur de la dialectique entre système et modèle, qui se donne à voir par des modes de production d'écritures, et de techniques algébriques fondées sur des raisonnements que soutiennent le système et son interprétation. La seconde, au travers de suites de nombres figurés (Krysinska, Mercier, Schneider 2009), permet d'examiner la question des contrôles d'égalités, au travers de cette dialectique. La troisième, autour du système des programmes de calculs arithmétiques (Chevallard & Bosch 2012, Ruiz-Munzón, Matheron, Bosch & Gascón 2012) permet d'explorer un mode de validation numérique spécifique des praxéologies de modélisation.

Une dialectique entre système et modèle productrice du point de vue des manipulations des écritures et des techniques algébriques

Commençons tout d'abord par une incursion dans l'expérimentation sur laquelle retourne Mercier (2012). Elle s'inscrit dans une perspective plus large de recherche autour d'une dialectique entre notions et notations (Mercier, Schubauer-Leoni & groupe CREAD 2002):

> Nous appelons *notions* les objets qu'un lexème dénote, qui sont pris dans des énoncés et fondent des prédicats, et *notations* les objets symboliques qu'un travail formel manipule, qui outillent des praxèmes et évoquent des pratiques. […]
>
> Notre choix terminologique permet d'orienter l'attention sur les interactions du professeur et des élèves *dans la dialectique des manipulations que les notations permettent, auxquelles elles engagent, et celle des jeux de langage qui construisent des notions*. C'est en effet le rapport des notions aux notations qui constitue les objets mathématiques ou plus généralement, scientifiques, dans un espace qui est toujours à la fois symbolique et matériel (Silvy, Delcroix & Mercier, à paraître). Mercier (2012) p. 168 sq.

L'expérimentation concerne des élèves de 3^{e} auxquels on propose, ensemble, un certain nombre de problèmes qui peuvent conduire à des résolutions de systèmes d'équations. Les élèves n'en ont pas, au préalable, de techniques ou de théorie. Le système est donc constitué de l'ensemble des problèmes (dont chacun est un système en soi) et le modèle mathématique visé est celui de systèmes d'équations. Ce que l'expérimentation montre, c'est qu'il est possible de faire émerger des techniques de résolutions algébriques inédites, à partir d'une dialectique entre système (chaque problème) et modèle (les écritures algébriques correspondant aux relations 'traduites' des énoncés) :

> Le travail algébrique s'accompagne, pour les élèves qui ont à en inventer l'usage, d'un raisonnement explicite. Un jeu de langage pour le travail algébrique se met en place, avec les difficultés que les professeurs connaissent, mais les élèves trouvent des solutions originales. S'ils font des erreurs d'écriture ils les contrôlent parce qu'ils attendent un résultat donné, qu'ils visent. Mercier (2012) p. 169

Cette dialectique devient finalement une composante technologique dans la résolution du problème. C'est-à-dire que la praxéologie de modélisation outille d'une manière très particulière, et remarquablement productive, les pratiques de calcul algébrique qui s'y inventent alors. Ainsi poursuit l'auteur :

> Un des groupes d'élèves de Troisième travaillant sur les systèmes d'équations procède par une décomposition de l'écriture semblable à ce que l'on fait en géométrie, lorsque l'on crée, en ajoutant un trait nouveau, une sous-figure dans une figure (Mercier & Tonnelle 1993), Dagonet (1975) ou Serfati (2005) diraient qu'ils travaillent *par amplification*, Tonnelle (1979) parle *d'augmentation de la complexité ostensive*. Ces élèves passent en effet de $x+5y=56$ à $x+y+4y=56$, pour un problème de 20 pièces de 1 et de 5 euros valant au total 56 euros, ce qui leur permet de

> voir (et de montrer) « x+y » dans « x+5y » et d'aboutir à 20+4y=56, équation qu'ils savent traiter. C'est la trace d'un raisonnement qui ne s'écrit pas (puisque les pratiques algébriques sont muettes), mais qui commande à cette invention. L'écriture x+5y désigne en effet la valeur des x pièces de un euro et des y pièces de cinq, ce qui engage à interpréter de même x+y comme une valeur, celle de x pièces de un euro et y pièces de un euro encore. Alors, on peut penser que la valeur 56 est formée de ce qu'on aurait avec une collection de pièces de un euro et d'un supplément composé de quatre euros par pièce de cinq : ce dont l'écriture observée rend compte. Cette interprétation, est validée par le fait que les élèves remplacent bien x+y par sa valeur, 20, pour obtenir une forme jamais rencontrée dans d'autres conditions : 20+4y=56. Mercier (2012) p. 171

C'est bien à partir d'une interprétation du système que se modifient les écritures pour se ramener à un modèle sur lequel on peut opérer, c'est-à-dire une équation que ces élèves savent résoudre. Ce faisant ils créent une technique de manipulation des écritures, validée et soutenue ici par un raisonnement dans le système, dont il resterait pour la constituer en technique algébrique, c'est-à-dire au sein du modèle algébrique indépendamment de son contexte d'émergence, à questionner la décontextualisation et à en explorer les usages. Or cela n'aura vraisemblablement pas lieu, pour cette technique du moins, comme en témoigne l'extrait suivant :

> C'est une technique propre à ce groupe, mais ce n'est pas une technique enseignée. Sans doute, parce qu'elle doit être sous le contrôle d'un raisonnement venu du rapport de modélisation qui a été ici le moteur du travail d'invention. […] En revanche, personne ne résout finalement les équations selon la technique que nous venons de présenter et qui, pour durer, aurait dû s'accompagner d'une rhétorique de soutien du type « je reconnais la première expression dans la seconde... je l'isole... je la remplace par sa valeur », faisant du travail algébrique un travail commenté, contre la culture. Mercier (2012) p. 172

Ce passage soulève la question de la technologie associée à cette technique de manipulation des écritures lorsque la dialectique entre système et modèle n'est plus. L'auteur pointe la nécessité d'une rhétorique de soutien décontextualisée, qui puisse généraliser la technique à d'autres résolutions de problèmes. Cependant, cette rhétorique n'émerge pas à proprement parler du travail de modélisation, car la technique inventée ne repose pas sur celle-ci, ou sur une version contextualisée de cette rhétorique. C'est le retour au système, et le système lui-même qui « soutiennent » la technique qui a émergé. Ceci pose alors la question de la genèse de cette rhétorique de soutien et du fonctionnement autonome de la technique au sein du modèle algébrique lui-même. Il y a deux niveaux de pratique ici. La technique décrite est celle d'une résolution d'équation par substitution. Ce n'est pas la technologie afférente qui nous interpelle. On pourrait bien entendu la questionner du point de vue de l'équivalence des systèmes, c'est-à-dire, de la non modification de l'ensemble des solutions par cette technique. Ce qui nous occupe est cette partie du travail au sein de la technique, c'est-à-dire ce sous-type de tâche, qui permet d'utiliser, sans l'écrire, l'égalité $x + 5y = x + y + 4y$ et qui apparaît de façon remarquable dans cette expérimentation. C'est une interprétation du système qui sert de technologie à l'écriture, à la fois du membre de droite, mais aussi, implicitement de l'égalité. Examinons comment. Les élèves ayant choisi deux variables de leur système, effectuent une première modélisation en écrivant la relation (issue d'un genre de tâche de traduction que nous n'examinerons pas ici) $x + 5y = 56$. Ce modèle ne leur permettant pas de travail algébrique, il y a bien un retour au système, qui sert de milieu, pour en chercher un nouveau modèle, plus pertinent, au regard des techniques algébriques connues. Pour cela, ils s'appuient sur une nouvelle interprétation du système : une réorganisation de collection en quelque sorte,

« avec une collection de pièces de un euro et d'un supplément composé de quatre euros par pièce de cinq : ce dont l'écriture observée rend compte ». La technologie qui permet d'écrire la nouvelle égalité $x + y + 4y = 56$ est issue du système : la façon d'organiser les collections n'en modifie pas la valeur totale. Il s'agit bien d'un nouveau modèle, d'une nouvelle relation entre les variables par le phénomène de « récurrence » du processus de modélisation que la dialectique entre système et modèle permet. Mais elle permet aussi, même si cela est implicite au moment de la résolution du problème, de conclure à l'égalité $x + 5y = x + y + 4y$ après coup (soit par transitivité de l'égalité, soit par la double interprétation). Comment dès lors fonder la décontextualisation ? Autrement dit, lorsqu'on se place dans le modèle algébrique, qu'est-ce qui, en l'absence du système, peut justifier, légitimer, et permettre de construire cette égalité ?

L'un des intérêts de la pratique algébrique au moment du travail du modèle relève de la possibilité de s'affranchir du système pour effectuer des manipulations qui peuvent tout aussi bien n'y trouver aucune interprétation. Elles peuvent aussi aboutir à des relations interprétables qui donnent des connaissances que l'on n'attendait éventuellement pas sur le système. Si le caractère producteur de la dialectique liée à une praxéologie de modélisation comme technologie complétant les pratiques, ou soutenant l'émergence de techniques algébriques, est extrêmement riche, elle laisse en suspens la question de la technologie au moment de la généralisation, ou de la décontextualisation des pratiques advenues, tout comme celle de manipulations intermédiaires possibles, sans interprétations d'un système modélisé. Autrement dit, comment s'affranchit-on du modèle dans une organisation mathématique qui s'appuie sur la modélisation ?

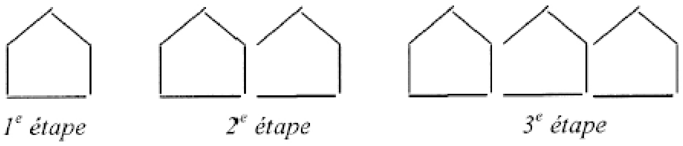
Bien sûr, la question est réglée (pour autant qu'elle soit abordée, mais c'est là semble-t-il l'un des enjeux essentiel d'une telle situation, même si elle n'a pas eu lieu dans la classe observée pour cette technique particulière), lorsque l'on dispose d'une théorie algébrique suffisante, comme ici en 3^{e}, l'égalité relève de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, pour une sous-expression correspondant à $5y = y + 4y$.

Mais que se passe-t-il si la théorie algébrique dont on dispose n'est pas suffisante *a priori* ou construite préalablement ? Les praxéologies de modélisation peuvent-elles fonder la construction des règles permettant d'opérer sur les modèles ?

La dénotation au cœur de la dialectique entre système et modèle : le paradoxe de la modélisation ?

Nous prenons tout d'abord appui sur une expérimentation pour montrer comment cette dialectique peut donner des moyens de validations de premiers calculs algébriques apparaissant au moment de la construction d'une théorie algébrique.

Ainsi, Krysinska, Mercier et Schneider (2009) témoignent-ils d'un processus de modélisation mis en place en Belgique à un niveau où a lieu la construction des premières techniques de calcul algébrique : « dans les programmes belges, on voit là l'occasion d'initier les élèves aux manipulations algébriques standard ». L'expérimentation concerne un ensemble de suites de nombres figurés à l'étude. Les suites sont données ensemble. De sorte que le travail de modélisation porte sur des techniques de calcul communes à des sous-groupes de suites présentant des caractéristiques communes, mises à l'étude via un certain nombre de questions. Deux modèles sont visés : celui de suites géométriques et celui de suites arithmétiques. Ainsi la suite suivante des maisons construites à partir d'allumettes est-elle donnée (parmi d'autres) :



> Les suites de nombres figurés constituent le système initial qui, à la suite d'une certaine réflexion, se trouve modélisé par trois formules différentes, $4x + 1$ ou $5 + 4(x - 1)$ ou encore $5x - (x - 1)$. Krysinska, Schneider (2010) p. 178

Ces situations portent des connaissances et savoirs variés en lien avec la pensée algébrico-fonctionnelle et en particulier, Krysinska, Mercier et Schneider (2009) montrent que :

> les suites de nombres figurés constituent des instruments sémiotiques porteurs d'une idée de variation et forment donc un milieu permettant de dévoluer aux élèves des questions qui relèvent de la pensée fonctionnelle en lien avec l'étude de certaines équations et identités algébriques. Krysinska, Mercier, Schneider (2009) p. 300

Elles permettent ainsi de dévoluer la question de l'équivalence de programmes de calculs. La dialectique entre système et modèle sert bien de technologie pour valider ou invalider des égalités que l'on pourrait produire à partir de différentes modélisations. Apparaissent par exemple deux variables pour le système précédent : le nombre d'allumettes et l'étape correspondante. La relation entre le nombre d'allumettes N et le numéro de l'étape x est une égalité, construite à partir de 'traduction' d'un raisonnement permettant de dénombrer les objets, aboutissant à une expression algébrique. L'un des modèles possibles est donc N = $4x + 1$. Une autre façon de compter donne un autre modèle comme N = $5 + 4(x - 1)$. Pourvu que l'on ait correctement modélisé, c'est-à-dire accompli la seconde étape de construction du modèle, l'égalité $4x + 1 = 5 + 4(x - 1)$est assurée par le système. Ici encore, la technologie repose sur des propriétés de dénombrement, c'est-à-dire de l'indépendance du nombre obtenu selon la façon de compter (qui correspond d'une certaine manière à une réorganisation de la collection). Les auteurs notent en effet que :

> […] l'équivalence de ces deux formules est assurée par le comptage différent d'un même ensemble d'objets. Le véritable enjeu ici est plutôt l'absence d'équivalence entre la formule proposée par l'élève E5 : 5+4x et la formule correcte : 5+4(x-1). On a là, grâce à la dénotation, une démarche qui ne se cantonne pas au modèle mais qui joue sur une dialectique entre système modélisé et modèle. Krysinska, Mercier, Schneider (2009) p. 295

La dialectique est donc de nature à invalider des égalités produites par des modélisations erronées, c'est-à-dire des erreurs dans l'étape de construction du modèle (erreurs de technique de comptage ou de 'traduction' par exemple). La dénotation joue de ce point de vue un rôle essentiel. Le système donne en effet des valeurs numériques de couples (N ; x) par dénombrement direct. Sur le dessin précédent par exemple, à la deuxième étape, on compte 9 allumettes. On peut, à partir du couple (9 ; 2) procéder à des évaluations, en affectant la valeur

2 à la variable dans les expressions dont on examine l'égalité : $4x + 1$ donne 9 tout comme $5 + 4(x - 1)$ tandis que $5 + 4x$ donne 13. Or, les données issues d'un travail sur le système (des dénombrements ici) permettent de conclure qu'étant donné que l'on doit trouver 9, la dernière expression n'est pas un modèle convenable. Si, pour un couple donné, l'évaluation de deux expressions issues de deux modèles ne donne pas des résultats identiques, non seulement on peut affirmer que l'un des deux –au moins- est erroné (par comparaison à la valeur numérique donnée par le système) mais encore, on peut affirmer qu'il n'y a pas égalité, dans le modèle, des deux expressions algébriques. La validation porte à la fois sur l'étape de construction du modèle, et sur des égalités au sein du modèle. Ainsi pourra-t-on affirmer de plus que $5 + 4(x - 1)$ n'est pas égal à $5 + 4x$.

Tout ceci n'a pas encore donné lieu à des calculs algébriques, ce qui amène à un double questionnement. Tout d'abord celui de la motivation, c'est-à-dire de la raison pour laquelle on basculerait dans une praxéologie de calcul algébrique, quelle question est-elle de nature à provoquer un travail au sein du modèle ? Ensuite, une fois dans cette troisième étape de modélisation, la dialectique est-elle de nature à éclairer les transformations qui s'y produiront, ou plus exactement qu'il s'agit de construire ici, puisqu'on ne dispose d'aucune théorie algébrique dans cette situation ?

Examinons de ce point de vue ce qu'il se passe dans la classe où a lieu l'expérimentation. Le professeur motive le geste nouveau de calcul sur les expressions par le fait que l'identification ostensive ne permet pas de conclure à l'égalité : « est-ce que, tout de suite, je peux voir que ces deux calculs représentent bien la même chose ? […] d'un seul coup d'œil on ne voit pas que c'est la même chose ». Il se place d'emblée dans le modèle sans plus tenir compte de la dialectique, et sans pour autant assurer le passage autrement que par un doute ostensif. La question de l'égalité, c'est-à-dire celle qui consiste à décider si l'égalité entre deux expressions est vraie, est-elle une motivation suffisante ?

L'égalité est seconde dans ce processus de modélisation. Elle vient après la production de deux relations entre les variables du système : le nombre d'objets et l'étape correspondante. Le véritable enjeu de l'équivalence est en réalité celui de la validité du modèle. C'est là le paradoxe d'un tel système modélisé, il assure l'équivalence, pourvu qu'on ait correctement modélisé. Plus encore, outre le fait qu'en réalité quelques tests numériques permettent de s'en assurer, et nous reviendrons sur ce point, on ne voit pas très bien comment ou pourquoi, on pourrait 'douter' d'un raisonnement correct –dans le système- exprimant une manière légitime de compter.

On pourrait envisager néanmoins, de proposer à la classe une nouvelle expression, qu'un élève fictif aurait produite par exemple, et dont il ne serait pas évident de retrouver le raisonnement, au sein du système, associé au modèle proposé (l'expression). Alors l'on serait contraint de chercher un autre mode de validation, qui s'affranchisse de la dialectique entre le système et le modèle. Il semble toutefois que l'on retrouve, d'une certaine manière, le paradoxe précédent, quant au rôle du système, et aux enjeux de la modélisation. Le système étant au fondement de la modélisation, l'empêcher de jouer un rôle de validation pose question. La nécessité d'un autre mode de validation, issue d'un artifice didactique, est-elle nécessaire, voire cohérente ? Dans ce cas, en effet, apparaît alors une ambiguïté quand au rôle du processus de modélisation dans la construction de ce « nouveau mode » de contrôle des équivalences. Plus encore, la genèse de ce mode de validation comme moyen de contrôle du travail de modélisation pose question quant à la construction des transformations qui permettent ces équivalences.

La dialectique permet bien de contrôler des équivalences de programmes de calcul. Toutefois, il n'est pas certain qu'elle soit de nature à permettre de livrer les logiques de fonctionnement des transformations que l'on peut y associer au sein du modèle, c'est-à-dire des modes de production d'égalités à partir d'un travail sur les formalismes. Ainsi pourrait-on interpréter ce qui est observé par les auteurs précédents, dans la classe : le professeur ne fonde pas les manipulations sur une telle dialectique mais étend des manipulations pratiquées dans le domaine numérique.

> […] on assiste là à la première transformation de ce genre dans cette classe. Comme c'est habituel dans les pratiques enseignantes, le professeur s'appuie sur des règles algébriques de transformation des formules qui sont admises comme extensions des règles de calcul sur des nombres. Cette dernière stratégie s'insère bien sûr dans le paradigme de l'algèbre vue comme arithmétique généralisée. Krysinska, Mercier, Schneider (2009) p. 295

Il y a une rupture à ce moment là, pour le travail au sein du modèle que le professeur tente de faire émerger. Il modifie alors la technologie à l'œuvre qu'il fonde sur une extension de « règles de calcul sur des nombres ». L'absence de recours à la dialectique pour discriminer les égalités erronées (les mauvaises modélisations) appauvrit bien entendu la situation, mais comment s'appuyer sur cette dialectique pour traiter la question des transformations idoines ? Les auteurs en livrent quelques pistes qu'ils envisagent alors :

> En effet, comment pourrait-on transformer la formule $5 + 4 \cdot (x - 1)$ en supprimant les parenthèses ? la seule question, si l'on ne s'engage pas dans des voies trop tordues, est de savoir si le produit par 4 va ''s'appliquer'' à x, à x – 1 ou aux deux. Ainsi, on pourrait proposer $5 + 4 \cdot (x - 1) = 5 + 4 \cdot x - 1$ ou $5 + 4 \cdot (x - 1) = 5 + x - 4$ ou $5 + 4 \cdot (x - 1) = 5 + 4 \cdot x - 4$. Il n'est pas difficile alors d'invalider les deux premières égalités, la première n'étant vraie pour aucune valeur de x et la seconde n'étant vraie que pour x = 0. Ainsi, les tableaux de valeurs seraient des outils permettant surtout d'invalider des transformations ''simples'' qui pourraient venir à l'esprit des élèves, s'insérant à nouveau dans une dialectique entre système modélisé et modèle. Krysinska, Schneider (2010) p. 180

On voit comment la dialectique peut fonctionner de façon essentielle pour l'invalidation. Le travail se situe bien au sein du modèle, dont on cherche, à partir d'équivalences assurées par le système (ou du moins visées) à construire des transformations, c'est-à-dire un travail formel aboutissant aux mêmes équivalences. Sont envisagées en effet des expressions intermédiaires que des élèves pourraient produire à partir de transformations 'spontanées' des écritures. La question des gestes à inventer, au travers des manipulations algébriques, en est-elle pour autant réglée, dans la production d'une égalité à ce moment où, s'affranchissant du système modélisé, l'on travaille au sein du modèle, que l'on travaille lui-même ? Ceci fait écho aux questions soulevées par la rhétorique de soutien évoquée plus haut (Mercier 2012). La dialectique sur laquelle l'on pourrait s'appuyer permet bien entendu d'invalider les manipulations erronées, mais permet-elle l'amorce d'une étude des transformations valides et de leur légitimité, ou de leurs adaptations possibles ?

Par ailleurs, il y a une nouvelle interprétation qui émerge des égalités produites *via* le système et la modélisation : l'égalité témoigne alors d'une transformation portant sur les écritures, ou autrement dit, d'un calcul algébrique qui permet d'obtenir le membre de droite à partir du membre de gauche, au moyen éventuellement d'une expression intermédiaire. Pour qui voit cela interprété de la sorte pour la première fois, on pourrait tout aussi bien se demander s'il n'y aurait pas une transformation permettant « directement » d'obtenir $1+4x$ à partir de $5+4(x-1)$. L'idée d'opérer, comme l'expert l'entend, sur les expressions peut-elle advenir de façon transparente ? C'est en réalité la question posée par l'une de nos recherches antérieures (Constantin & Coulange 2012) dont un certain nombre d'épisodes montrent que cette interprétation de l'égalité peut ne pas aller de soi, ni ne donner lieu à l'invention du geste idoine. Ainsi, y voit-on une classe de 5^{e} consacrer une séance entière en vain, à la recherche d'une telle expression intermédiaire pour 'justifier' l'équivalence entre deux programmes de calculs explorée sur tableur. Nous renvoyons ici le lecteur aux documents présentés en annexe, qui décrivent une partie des analyses de ces épisodes[17]. Les élèves ne se livrent pas à un jeu de « voies tordues » de manipulations des écritures, ils n'en envisageront que deux ou trois, avant de se mettre à construire une technique tout à fait inédite, qui n'a rien d'une manipulation d'écriture. Ce qui est tout à fait étonnant dans cet épisode en particulier, c'est que les élèves se sont véritablement emparés de la dénotation. Ils testent chacune des formules proposés, et concluent aussitôt : elles ne conviennent pas. Au bout de quelques tentatives de ce que l'on pourrait interpréter comme des manipulations d'écritures que propose un élève (enlever les parenthèses par exemple), sans que les autres s'en emparent du reste, un phénomène tout à fait inattendu se produit. Certains élèves tentent de construire une technique à partir de la seule théorie dont ils disposent : la dénotation. Ceci est tout à fait légitime : la dénotation leur sert de technologie pour invalider, ils en explorent donc une autre fonction potentielle, une fonction productrice de technique. La difficulté tient à ce que la dénotation ne permet pas d'engendrer une expression égale à une autre, ou d'identifier un mode de production d'une telle expression algébrique.

A titre d'illustration, nous reproduisons un extrait d'épisode.

> Les élèves ont à produire une expression égale à (n×4 + 5)×2. L'un d'entre eux explicite : il remplace n par 5, ce qui donne 50. Il sait que 50 c'est 5 fois 10. Donc cela correspond 10×n pour n = 5. Il propose donc l'égalité (n×4 + 5)×2 = 10×n. Bien sûr, le contrôle par les autres élèves conduira à invalider la technique. Mais cela ne donnera pas davantage accès aux gestes idoines, du calcul algébrique. Annexe 1

D'autres épisodes tirés de ces préexpérimentations en cinquième, ou extraits d'autres recherches que les nôtres déjà cités (Mercier 2012, Krysinska & Schneider 2010), montrent à quel point, opérer sur des expressions algébriques modélisant des programmes de calculs, semble bien producteur de sens de ces expressions, mais ne permet pas forcément de construire ou de décontextualiser des techniques de calcul sur ces expressions, même lorsque la dénotation semble jouer le rôle attendu dans une praxéologie de modélisation.

Nous allons approfondir ce point d'un autre point de vue, celui de la distinction entre organisation mathématique de modélisation et de déduction.

---

[17] On peut également se référer à Constantin et Coulange (2012).

1.3.2 La tension entre praxéologies de modélisation et de déduction

Du mode de validation particulier au sein des praxéologies de modélisation

La notion de programme de calcul (Drouhard 1995) repose sur l'idée d'effectuer des calculs selon un certain programme ainsi qu'on peut la rencontrer à l'école primaire, dans la résolution de problèmes arithmétiques en particulier. Les développements de ces dernières années de la recherche en théorie anthropologique proposent d'en faire une utilisation modélisante, permettant à la fois de donner du sens aux expressions algébriques, de motiver leur étude, et d'en re-construire une théorie. Elle modifie ainsi profondément les raisons d'être épistémologiques de l'algèbre, et de sa construction. Ce choix est une piste de réponse dans les contraintes des programmes actuels qui demandent une introduction à l'algèbre à un niveau (la 5^{e}) où les situations en montrant la puissance, par exemple correspondant à des résolutions d'équations, sont inaccessibles aux élèves. L'algèbre élémentaire y est alors définie comme « science des programmes de calcul (sur les nombres) et en particulier, la science du calcul sur les programmes de calcul » (Chevallard 2007).

> L'algèbre élémentaire repose sur un socle qui s'est en grande partie effondré au cours de dernières décennies du faut du très large abandon de l'abord *fonctionnel* de cette œuvre mathématique cardinale au profit d'un rapport *formel* à sa construction et à la mise en œuvre (Chevallard 1989). Un symptôme remarquable de cet affaissement est l'effacement dans la culture scolaire, de la réponse à cette simple question : lorsqu'on parle d'une certaine « expression algébrique » (par exemple $2x$ ou encore x^2), on évoque implicitement une entité supposée qui se trouverait ainsi exprimée (d'une façon déterminée : *algébriquement*) par ladite « expression algébrique » ; mais *quelle est donc cette entité* ? La réponse a été largement oubliée : l'entité en question est ce qu'on peut appeler un *programme de calcul* (Drouhard 1995) ; une « expression algébrique » est un énoncé symbolique qui exprime un certain programme de calcul. Chevallard & Bosch (2012) p. 28

Les programmes de calculs arithmétiques constituent donc un système initial, permettant d'introduire l'outil algébrique et dont le travail avec et sur eux fait émerger :

> des questions de nature technologico-théorique pour expliquer les raisons d'obtenir un certain résultat, le justifier, l'interpréter, etc., questions qui suscitent le besoin d'élargir le système à partir de modélisations successives donnant lieur à trois différentes étapes du processus d'algébrisation. (Ruiz-Munzon, Matheron, Bosch, Gascon 2012) p.97

Ces étapes fondent un modèle épistémologique de référence (Ruiz-Munzón 2010) qui propose de rendre compte de l'évolution des praxéologies de l'algèbre élémentaire vers la modélisation fonctionnelle dans l'institution scolaire selon un processus d'algébrisation.

La problématique qui nous occupe compte tenu des erreurs d'élèves qui la fondent nous plonge de ce point de vue dans la première étape du processus d'algébrisation qui :

> apparaît lorsque l'on cesse de considérer les programmes de calcul (PC) en tant que processus mais qu'on les considère comme un tout et qu'on leur donne une matérialité suffisante – principalement écrite- pour pouvoir les manipuler. (Ruiz-Munzon, Matheron, Bosch, Gascon 2012) p. 98

Nous nous centrons sur la question du traitement de l'équivalence de programmes de calcul et de la construction théorique afférente[18]. L'introduction didactique du système des programmes

---

[18] Les situations de modélisation comme celle des suites de nombres figurés permettent d'aborder un grand nombre de type de tâches autres et font des situations extrêmement riches, mais notre questionnement ne porte que sur deux d'entre eux.

de calcul peut ainsi conduire à un ensemble de grands types de tâches parcourant et motivant le travail algébrique. Assude Coppé et Pressiat (2012) en proposent sept principaux, dont nous extrayons les deux types qui concernent notre recherche :

> T_3 : Etant donné deux programmes de calcul P et Q, reconnaître s'ils sont ou non équivalents sur un même domaine numérique.
> T_4 : Etant donné un programme de calcul P, déterminer un programme de calcul Q équivalent à P, mais plus simple (plus adapté, plus idoine).

Une description à grands traits de la construction des règles de calcul algébrique dans une perspective de modélisation (Chevallard 2007) serait celle-ci : si l'on veut que les écritures algébriques, définies comme des formulations symboliques de programmes de calcul, puissent servir de modèle, et à partir d'égalités constatées dans le domaine numérique lors d'une « exploration numérique étendue », des règles s'imposent, et en particulier pour les propriétés les plus élémentaires, sur lesquelles la suite des autres règles pourront être bâties en utilisant du calcul algébrique à partir de ces règles élémentaires.

La mise en cohérence des systèmes et des modèles au regard du calcul algébrique repose sur une distinction fondamentale de ce que Schneider (2011) nomme les praxéologies de type modélisation et les praxéologies de type déduction :

> Il s'agit de distinguer deux types de praxéologies, ce mot étant à comprendre à la fois en tant que processus et comme résultat de ce processus. D'une part, je cherche à traduire deux facettes de l'activité mathématique, et d'autre part, je décris les différents types d'organisations mathématiques auxquels conduisent respectivement ces deux facettes […]
> Le premier type de praxéologies concerne la modélisation mathématique de systèmes intra ou extra-mathématiques constitués d'objets que l'on peut considérer comme des objets préconstruits au sens de Chevallard (1991), c'est-à-dire d'objets dont l'existence résulte, aux yeux de personnes assujetties à une même institution, d'un « croisement d'énoncés du langages et de situations surdéterminées ». Schneider (2011) p. 190

Du point de vue du calcul algébrique, les expressions algébriques sont de tels objets préconstruits que les programmes de calcul permettent de faire exister :

> par le truchement d'une définition, celle-ci devant donner prise ultérieurement à une organisation véritablement déductive. Et ce serait là le rôle des praxéologies « modélisation ». Schneider (2011) p. 191

Dans de telles praxéologies, les objets ne sont pas encore constitués comme objets d'une théorie, ils sont donc pris dans des activités qui « débouchent sur des argumentations non assimilables à des théories canoniques plus ou moins locales. » Ainsi « les praxéologies « modélisation » autorisent des modes de validation plus pragmatiques qui seront récusées dans les secondes », c'est-à-dire dans les praxéologies « déduction » :

> Elles sont en effet propres à la constitution d'une organisation déductive. Il s'agit de reformuler certains concepts pour en faire des « proof-generated concept » au sens de Lakatos [...] Il peut s'agir aussi de déduire tel résultat théorique d'axiomes et/ou de théorèmes antérieurement démontrés, d'établir un système d'axiomes « simples » et non redondant, de conjecturer un ordre d'agencement des théorèmes etc. Schneider (2011) p. 191 sq.

La construction d'une véritable dialectique entre praxéologies de modélisation et praxéologies de déduction, dont participent les praxéologies de calcul algébrique ici, doit se fonder sur une distinction essentielle, celle du vrai et du déductible ou, autrement dit, celle des moyens de validations propres à chacune.

Distinction entre vrai et déductible
Cette distinction est au cœur de la construction d'une dialectique entre expérimentation et déduction théorique (Chevallard 2007). Elle repose aussi sur une distinction claire entre système et modèle.

Nous reprendrons les notations et les propos de Chevallard (2007) pour éclairer, dans une perspective de construction d'une théorie déductive, ces distinctions. Tout d'abord, nous noterons $\mathcal{S}$ un système, intra ou extra-mathématique, et θ une assertion relative à ce système :

> Le fait que θ soit vraie dans $\mathcal{S}$ sera noté
>
> $$\vDash_{\mathcal{S}} \theta$$
>
> Comment savoir si l'on a $\vDash_{\mathcal{S}} \theta$? La réponse poussée en avant par les mathématiques depuis des millénaires est la suivante : on construit une théorie déductive $\mathcal{T}$ de $\mathcal{S}$, c'est-à-dire une théorie telle que, **au moins**,
>
> $$\text{si } \vdash_{\mathcal{T}} \theta \text{ alors } \vDash_{\mathcal{S}} \theta$$
>
> soit encore
>
> $$\vDash_{\mathcal{S}} \theta \text{ si } \vdash_{\mathcal{T}} \theta$$
>
> où $\vdash_{\mathcal{T}} \theta$ signifie que θ est ***déductible*** dans $\mathcal{T}$, c'est-à-dire est un ***théorème*** de $\mathcal{T}$ (au sens large, en comptant les axiomes de $\mathcal{T}$ comme des théorèmes). Bien entendu, l'idéal serait que l'on ait
>
> $$\vDash_{\mathcal{S}} \theta \textbf{\textit{ si, et seulement si, }} \vdash_{\mathcal{T}} \theta$$
>
> Chevallard (2006) p. 435

Comme dans le cas du professeur observé par Krysinska et Schneider (2010), l'on peut établir que l'assertion θ est ***vraie*** dans le système, en cherchant à établir que θ est ***déductible*** dans la théorie $\mathcal{T}$. Cela suppose néanmoins que l'on ait pu construire une théorie déductive adéquate, c'est-à-dire à la fois, que cette théorie soit construite, ou du moins en partie, et qu'elle puisse rendre compte du système. Nous y reviendrons au paragraphe suivant. Quoi qu'il en soit, le fait qu'une assertion soit vraie peut être établi directement au sein du système, sans nécessiter de travail dans la théorie, et le travail de déduction de ce fait dans le modèle, ne saurait alors être motivé par une quelconque suspicion. Les questions du vrai et du déductible ne sont pas de même nature. Cette distinction permet de lever la confusion à la fois sur « la nature de ce à quoi « jouent » les mathématiciens » et des motivations des types de tâches correspondants à chacune. A l'instar de la théorie de la géométrie disponible (TGD dans le texte) dont Chevallard (2007) donne l'exemple suivant :

> Ce n'est donc pas parce que l'inégalité triangulaire est un ***fait spatial évident*** (du latin evidens « clair, apparent, manifeste ») que sa déduction de la TGD est, elle, « évidente » ! ***Inversement***, ce n'est pas d'abord pour être sûr qu'un fait spatial est vrai qu'on tente de le déduire de la TGD… Tels sont les principes épistémologiques qu'il convient d'installer et de faire vivre dans la culture de la classe. Chevallard (2007) p.438

Si l'on joue dans les praxéologies « modélisation », la cohérence veut que l'on accepte ces preuves pragmatiques qu'une exploration numérique étendue permet (et le tableur est un outil remarquablement puissant et pratique pour ce faire), pour assurer l'équivalence de programmes de calculs. L'équivalence n'est pas une conjecture de ce point de vue, c'est-à-dire une conjecture « expérimentale » sur le système, ou autrement dit, un fait numérique douteux. Elle est vraie (du moins jusqu'à ce qu'on en trouve un contre exemple, nous allons y revenir). Se demander si elle est déductible consiste à éprouver une conjecture d'un autre genre : une conjecture « théorique » :

> Si $\mathcal{T}(\mathcal{S})$ est « fiable », et si l'on peut établir que l'on a $\vdash_{\mathcal{T}} \theta$, alors on pourra conclure que $\vDash_{\mathcal{S}} \theta$: telle est la principale raison d'être des théories déductives, telle est la justification des efforts consentis pour les élaborer de façon bien contrôlée et pour apprendre à les faire « parler ». Chevallard (2007) p. 435

Ainsi, prouver une assertion peut se faire de deux manières : soit en explorant le système, en concevant une expérience idoine pour observer le phénomène relatif à l'assertion, pour « faire parler » le système. Soit, on peut chercher à le déduire de la théorie :

> La consultation de $\mathcal{T}$ présente l'avantage que l'on connaît dans les sciences : celui d'aller vite, de faire l'économie d'une expérience peut-être coûteuse, ou peu claire dans ses résultats, ou même impossible (provisoirement). Chevallard (2007) p. 455 sq.

La dialectique orchestrée par ce double questionnement de $\mathcal{S}$ et de $\mathcal{T}$, du vrai et du déductible, est au cœur de la construction scientifique de toute théorie mathématique. Dans le cas de la théorie algébrique, cette élaboration peut se fonder sur des faits numériques bien établis par l'expérience, avant de confronter à l'expérience les faits nouveaux qui peuvent « théoriquement » se déduire des axiomes de la théorie. En dernier ressort, ce sera bien l'expérience qui tranchera : si la théorie donne des assertions fausses sur le système, elle devra en être modifiée (ou restreinte, ou oubliée) en conséquence. Le principe de récurrence dans le processus de modélisation au cœur des constructions théoriques est donc fondamental.

1.3.3 L'insuffisance des praxéologies de déduction ?

La première question que l'on peut se poser au moment d'une construction théorique, est celle de la validité des axiomes :

> La construction de $\mathcal{T}$ suppose essentiellement qu'on y mette des assertions vraies relatives à $\mathcal{S}$, assertions qui, auront alors le statut d'axiome. Mais comment sait-on que telle assertion est vraie dans $\mathcal{S}$ sinon en « interrogeant » $\mathcal{S}$, c'est-à-dire en procédant à une expérimentation sur $\mathcal{S}$?Si, par exemple $\mathcal{S}$ est l'espace physique autour de nous, $\mathcal{E}$, comment sait-on que, disons, « par deux points distincts il passe une droite et une seule » ? En interrogeant $\mathcal{E}$. Mais c'est là que le bât blesse : personne ne peut se targuer d'avoir vérifié cette assertion pour tous les couples de points distincts de l'espace ! En d'autres termes, la théorie déductive $\mathcal{T}(\mathcal{E})$sera elle-même fondée sur un mécanisme d'induction à partir de résultats de l'expérience.
> En pratique, on devra construire $\mathcal{T}(\mathcal{S})$ dans des allers et retours incessants enter déduction théorique et expérimentation : on met dans $\mathcal{T}(\mathcal{S})$ des assertions que l'expérimentation a prouvé raisonnablement vraies dans $\mathcal{S}$ et, en sens inverse, on vérifiera expérimentalement les théorèmes θ établis déductivement dans $\mathcal{T}(\mathcal{S})$, pour s'assurer que $\mathcal{T}(\mathcal{S})$ est « fiable » dans ce qu'elle nous révèle de $\mathcal{S}$. Chevallard (2007) p. 435

Imaginons un instant que, partant d'une exploration numérique étendue, l'on aboutisse à la conviction que le programme Π_1 décrit de façon rhétorique « Ajouter le triple du nombre donné à son double » soit équivalent à Π_2 « Multiplier le nombre donné par 5 » sur l'ensemble des nombres décimaux, partiellement, exploré. Si la classe ne dispose pas d'une théorie algébrique, mais qu'elle est en train de la construire justement, si l'on veut que cette théorie rende compte de ce que l'on observe - le système est constitué de $\mathbb{D}$-, on est conduit à poser l'équivalence des programmes Π_1 et Π_2 comme constitutif du modèle algébrique que l'on souhaite construire, jusqu'à ce que, dans un mouvement circulaire entre système et modèle, l'on s'aperçoive éventuellement qu'il existe une valeur d de $\mathbb{D}$, pour laquelle il n'y aurait pas égalité entre les expressions associées $E_1(d)$ et $E_2(d)$. Auquel cas l'on serait conduit soit à changer de modèle, soit à le modifier, de façon par exemple, à restreindre les relations obtenues sur une partie seulement du domaine concerné. La construction du modèle consiste à créer une théorie adéquate dans laquelle on pourra prouver les équivalences souhaitées (validées par des explorations numériques). Le modèle est toujours susceptible d'être mis à l'épreuve. Mais lorsqu'on cherche à faire fonctionner le modèle, c'est-à-dire à rendre compte à la fois de l'idonéité de ce qu'il permet de faire (en retrouvant par exemple des résultats donnés par un système) et en même temps, de se donner les moyens de comprendre le phénomène que l'on étudie par la modélisation, on joue à un autre jeu : celui de la cohérence, de la non-contradiction, dans la théorie algébrique. Les moyens de validation changent de nature dans des praxéologies « déduction ». La question est alors de savoir si le modèle peut conduire, avec ses règles de fonctionnement propres, à une équivalence de programmes de calculs que l'on observe. Pour établir une telle équivalence, il conviendra par exemple de pouvoir écrire un ensemble d'égalités pour aboutir à celle des expressions algébriques de Π_1 et Π_2, ce qui suppose que la théorie algébrique créée soit adéquate pour justifier la série d'équivalences nécessaires. Si tel n'était pas le cas, le modèle devrait en être modifié en conséquence, dans ce mouvement de construction ou plutôt dans ce mouvement de récurrence des modèles. Reprenons alors la question de la construction. L'exploration que nous avons imaginée précédemment conduit à poser $x \times 3 + x \times 2 \equiv x \times 5$ comme premier axiome de la théorie. Bien entendu, l'axiomatique est toujours provisoire dans une organisation déductive en construction. C'est-à-dire que l'émergence d'une nouvelle relation comme $x \times 7 + x \times 2 \equiv x \times 9$ pose alors la question de sa position au sein de la théorie : un nouvel axiome, ou une propriété que l'on peut déduire des précédents. Si l'on ne peut pas le déduire, et s'il est non-contradictoire, alors on peut envisager de le constituer comme nouvel axiome. Il faudra inversement s'assurer que les axiomes précédents ne s'en déduisent pas non plus. On voit apparaître la question délicate du choix des propriétés-axiomes que l'on aura pu modéliser grâce à une exploration du système, dans une recherche d'un système d'axiomes « simples », non redondants, relativement minimal, … que nous évoquions plus haut. L'on peut aussi penser à un processus d'unification des axiomes en un seul finalement, comme pour les précédents, qui s'unifient, au travers de la seule relation $k \times a + k \times b \equiv k \times (a + b)$. Notons par ailleurs que cette unification est culturelle, et que la construction d'une théorie algébrique dans la classe devra à un moment ou à un autre se poser la question de la confrontation de sa construction locale, avec, dans une certaine mesure, les constructions savantes, ou à tout le moins, celles de la culture scolaire, dans ce processus d'unification.

Cette exploration théorique, c'est-à-dire ce travail au sein de la praxéologie déduction, demande que puissent s'installer, à côté de l'axiomatique, des techniques de déduction à partir de cette axiomatique. Il s'agit pour ce qui nous occupe des techniques de calcul, ou plus exactement de manipulation, qui permettent d'*utiliser* cette axiomatique.

Le travail déductif dans la théorie algébrique, a ceci de singulier qu'il porte sur des transformations d'expressions au sein de la théorie, c'est-à-dire sur un travail ostensif qui n'a pas véritablement d'antécédent dans les pratiques des élèves. Or, il n'est pas certain que le mode de production de l'axiomatique donne accès à ces *praxèmes*[19] de calcul. L'axiomatique suffit-elle à rendre compte de son fonctionnement, c'est-à-dire de la manière dont elle peut permettre de produire des théorèmes ? En d'autres termes, la construction d'un 'calcul' idoine, c'est-à-dire d'une transformation des écritures peut-elle advenir de façon transparente à partir d'une écriture d'équivalence construite par modélisation ? Nous revenons-là à cette interprétation des écritures comme objets sur lesquels on puisse opérer qui ne va peut-être pas de soi (Constantin & Coulange 2012), et plus encore à la construction d'une théorie des manipulations. Cela nous conduit à interroger une nouvelle fois le mode de production des égalités. Dans une construction axiomatique, comme dans tout processus de modélisation de ce genre (c'est-à-dire aboutissant à une équivalence de programmes de calcul), l'écriture de l'égalité est seconde. Elle vient après une double modélisation d'un même système : on établit deux relations différentes avec une même variable, implicitement ou non, et l'égalité est vraie selon le principe de non contradiction du modèle. L'égalité vient après les deux expressions : l'une n'est pas déduite de l'autre. Comment alors faire parler le système pour bâtir cette déduction ? Dans le calcul algébrique, le mode de construction de l'égalité est extrêmement différent : elle se lit et s'élabore de gauche à droite. Les praxéologies de modélisation tout comme les praxéologies de déduction ne permettent pas véritablement en soi, de faire émerger un praxème de calcul. Comment dès lors prendre en charge une telle genèse ? Et comment le faire dialoguer avec le système ? ou autrement dit comment faire parler les ostensifs dans les praxéologies de calcul nécessaires aux praxéologies déduction ? Dans cette perspective se dessine une dialectique nécessaire entre des théories algébriques et numériques dans un sens quelque peu différent de celui habituellement considéré dans les praxéologies de modélisation fondées sur les programmes de calcul. C'est ce que nous abordons maintenant.

1.3.4 Une modélisation algébrico-numérique d'une autre nature ?

Les praxéologies modélisation posent en filigrane la question de la connaissance des systèmes de nombres, et de l'articulation de la théorie algébrique avec une certaine théorie numérique qui préexiste chez les élèves. Reprenons les programmes de calcul Π_1 et Π_2. Leurs expressions peuvent s'écrire $E_1(x) = x \times 2 + x \times 3$ ou $E_1(x) = (x + x) + (x + x + x + x)$ et $E_2(x) = x\times5$. La définition de la multiplication par addition itérée assure, avec l'associativité, l'égalité. Cette définition a été construite sur les nombres entiers en primaire comme nous l'avons déjà mentionné. L'intérêt ici de cette théorie -de la multiplication par un entier comme addition itérée- héritée de la théorie numérique est sa fonction d'explication c'est-à-dire l'intelligibilité qu'elle peut apporter pour la construction d'une manipulation des écritures. En effet, elle donne à voir des regroupements de termes (par deux, par trois ou par cinq) qui rendent compte des spécificités des écritures du point de vue des ostensifs, par exemple le fait que x n'apparaisse qu'une fois. Elle donne des raisons aux formes d'expression et peut éclairer en cela les gestes idoines, tout comme ceux qui ne le sont pas, dans une articulation entre numérique et algébrique, mathématique et syntaxique.

[19] Nous reprenons là le terme introduit en théorie anthropologique du didactique reprenant les termes des analyses fonctionnelles de la linguistique (Martinet 1960) : un *praxème* est une unité minimale d'action qui puisse faire sens, indépendamment de la pratique qui l'engage.

Ces raisons sont complémentaires à l'usage de la dénotation, et à la construction d'équivalences par modélisation. C'est-à-dire qu'elles sont de nature à donner accès à la fonction explicative de la technologie (Castela & Romo-Vazquez 2011) en dialectique avec la fonction de validation (justification mathématique ici) de la technique de calcul algébrique ou autrement dit « d'analyser comment il se fait que la technique permet bien d'atteindre les buts visés. Il existe des validations qui n'expliquent pas mais aussi des explications qui ne valident pas, parce qu'elles ne respectent pas complètement les normes de l'institution qui examine cette question de la validité » (Castela & Elguero 2013). Or, les résultats de nos pré-expérimentations (*cf.* annexe) montrent que pour certains élèves comme Valentin qui demande, en substance, pourquoi $12 \times 13 + 12 \times 7$ n'est pas équivalent à $(12 + 12) \times 20$, la différence des dénotés ne donne pas accès à la raison qui conduit à ne pas ajouter 12 et 12. C'est-à-dire que la question de l'équivalence ne livre pas tout des logiques des gestes à accomplir. L'écriture *in extenso* des additions élucide cela, dans ce cas précis.

Nous n'envisageons pas ici un retour (si tant est que l'on puisse considérer qu'il ne perdure pas) à un modèle épistémologique de l'algèbre comme arithmétique généralisée. Il s'agit bien de repenser une dialectique entre maniement formel du calcul algébrique et connaissance des systèmes de nombres dont faisait état Chevallard dans un texte ancien (Chevallard 1989). L'objectif final de l'enseignement de l'algèbre est bien celui de « la maîtrise formelle du calcul fonctionnel » (Chevallard 1989). Il s'appuie sur deux objectifs intermédiaires de l'enseignement au collège, qui sont des contraintes que s'impose toute construction curriculaire fondée sur la notion de modélisation. Le premier est celui de la « maîtrise formelle du calcul algébrique » (Chevallard 1989), ou autrement dit pour le collège, du calcul dans le corps des fractions rationnelles $\mathbb{R}(X)$, qui ne saurait pour autant ni se trouver ni se définir dans un enseignement formel des techniques de manipulations algébriques. Le second relève de la dialectique entre les manipulations formelles et la connaissance des systèmes de nombres sur lesquels se construit le calcul algébrique. Cette connaissance apparaît comme une condition nécessaire à l'émergence possible de praxéologies déductives. Le calcul algébrique se nourrit des propriétés des systèmes de nombres, permettant à la fois de modéliser les propriétés des nombres, et celles des opérations préconstruites sur eux. La théorie algébrique de ce point de vue modélise les systèmes de nombres. En retour, et de façon dialectique, les systèmes de nombres se construisent à partir de l'extension de ces propriétés et de celles du calcul algébrique que l'on peut rencontrer dans l'histoire comme une extension pratique, c'est-à-dire utile, pour résoudre des problèmes. Or cette dialectique entre construction des systèmes de nombres et construction du calcul algébrique repose *a priori* sur des enjeux généraux d'extensions, de formalisation et d'unification des systèmes. C'est-à-dire que la théorie algébrique s'étend en même temps que s'étendent les systèmes de nombres, tout en unifiant ces systèmes : il y a une co-construction qui s'exerce et qui de fait modifie les significations portées par les écritures, et les technologies à l'œuvre. Apparaît ici une perspective de modélisation numérico-algébrique qui ne serait pas tout à fait celle évoquée jusqu'ici à propos des programmes de calcul, et qui permettrait d'articuler les praxéologies de modélisation et celles de déduction, en reposant sur les caractères formalisateur, unificateur et généralisateur (Robert 1998) des savoirs à enseigner sur le calcul algébrique. Ces enjeux nous semblent potentiellement de nature à penser la question des formalismes. Toutefois, avant d'explorer plus avant cette piste dans la dernière partie de ce chapitre, nous allons retourner sur les fondements théoriques possibles, liés aux écritures algébriques, et en particulier à leur syntaxe, que nous évoquions plus haut (§1.2), laissés quelque peu en suspens dans cette étude des praxéologies de modélisation, comme nous l'avons déjà signalé.

1.4 VERS UNE THEORIE DES ECRITURES SYMBOLIQUES POUR L'ENSEIGNEMENT DU CALCUL ALGEBRIQUE

Dans cette partie, nous nous intéressons plus précisément aux technologies et théories concernant les écritures algébriques qui puissent être opérationnelles pour l'enseignement du calcul algébrique. L'étude des praxéologies de modélisation nous amène à nous interroger sur un praxème qu'elles ne prennent pas en charge, et qui semble ne pas aller de soi. L'émergence de ce praxème va de pair avec l'idée que si deux expressions sont égales, alors il existe une ou des transformations d'écritures qui permettent de passer de l'une à l'autre. Le changement de la dimension de lecture, et d'interprétation, qui engage (lecture horizontale/calcul) ou non (lecture verticale/équivalence de programmes de calcul), à voir dans les égalités algébriques la réalisation d'un calcul, ne paraît pas évidente (*cf*. annexe). Afin de caractériser ce praxème, nous commençons par introduire un certain nombre de notions linguistiques. Celles-ci nous permettent tout d'abord de définir précisément ce que nous entendons par expression algébrique, avant de redéfinir ensuite le calcul algébrique de ce point de vue. Ceci nous amène à préciser le praxème qui nous occupe, en lien avec la notion d'égalité entre expressions algébriques. Enfin, dans un dernier temps, nous repositionnons les spécificités de ce praxème dans une perspective de construction didactique, et en dialectique avec les praxéologies de modélisations.

1.4.1 Caractéristique linguistique des manipulations algébriques : modèle des expressions symboliques de l'algèbre élémentaire

Notre construction d'un *praxème* de calcul s'inscrit dans la perspective d'une description par un modèle linguistique des expressions symboliques algébriques qui :

> consiste à envisager les calculs comme des transformations portant sur des « expressions bien formées » soumises à des contraintes. Les erreurs classiques sont alors des transformations opérées en violation de ces contraintes. Drouhard 1992 p. 10.

Les « expressions bien formées » sont des assemblages constitués par agrégation de symboles, de chiffres, de lettres, qui ont pour fonction de représenter des relations entre quantités numériques, et qui respectent un certain nombre de règles d'écritures et de ré-écritures constituant leur grammaire :

> La suite des règles de réécriture est appelée une *grammaire,* et l'ensemble des chaînes de caractères engendrées est appelée un langage (noté *L*). (Drouhard et Panizza 2012)

Sans nous préoccuper ici de la nature ou de la description rigoureuse de ces règles génératives d'écritures[20], notons simplement qu'elles permettent par exemple de disqualifier une

[20] Mais une telle description en est présentée dans son principe dans Drouhard & Panizza (2012) donnant ainsi un aperçu d'une « description rigoureuse des formules de l'algèbre élémentaire (en termes de langage au sens de Chomsky 1971) ». En particulier, les auteurs notent qu' « une des manières de décrire les langages qui satisfont à cette condition (de reconnaissance et de production de formules jamais vues auparavant) consiste à considérer qu'ils sont engendrés par ce que les linguistes appellent une grammaire générative, c'est-à-dire une suite finie de règles de réécriture dont au moins une est récursive ». De telles règles sont par ailleurs explorées et établies dans

concaténation comme « $3x5+$ », contrairement à une concaténation comme « $3x + 5$ » ou encore « $3x + 5 = 5 + 3x$ ».[21]

Les expressions symboliques algébriques (ESA) dont le modèle rend compte sont constituées par :

> les écritures numériques aussi bien que littérales qui figurent explicitement dans les énoncés d'algèbre élémentaire : somme, produits, fractions, puissances et racines, inégalités, systèmes etc. On n'y trouve ni écriture fonctionnelle (du type $f(x)$) ni connecteurs logiques, ni expressions telles que « donc », « or », etc. Ceci fait que le système des ESA est un système formel très incomplet (en particulier on ne peut pas y faire de déduction) Drouhard 1992

Ce système est en revanche suffisant pour permettre d'associer à chaque règle portant sur les nombres (les signifiés), une transformation portant sur les expressions bien formées (les signifiants), et partant, modéliser les pratiques dans le domaine du calcul algébrique élémentaire formel, c'est-à-dire, les pratiques telles qu'on les rencontre dans les classes, dans une perspective didactique (c'est pourquoi par exemple les modèles utilisés par les logiciels de calcul formel ne sont pas appropriés pour ce faire, proposant des transformations que Drouhard montre peu plausibles – nous ne détaillerons pas ici, nous renvoyons le lecteur intéressé à Drouhard 1992-).

On désigne alors par « formule » tout élément d'un langage, le langage pouvant être celui de l'arithmétique L_{Arithm} ou celui de l'algébrique L_{Alg}, qui peut s'obtenir par extension en :

> rajoutant, aux symboles des langages vus précédemment, les lettres et quelques signes, en particulier ceux correspondant aux racines et valeurs absolues. Du point de vue linguistique, L_{Alg} est plus complexe que les langages précédents : mais sa nature linguistique est la même – en particulier on y retrouve la partition essentielle des formules F_{Alg} en expressions E_{Alg} et en propositions P_{Alg} (ces dernières, construites autour d'égalités ou d'inégalités incluent en outre les systèmes). Drouhard & Panizza (2012) p. 223

Ainsi « $3x + 5 = 5 + 3x$ » fait partie des propositions, tandis que « $3x + 5$ » fait partie des expressions c'est-à-dire des formules construites sans les signes « = » , « < », …

1.4.2 Transformation de mouvement et calcul littéral

> Le calcul littéral est par excellence le domaine des transformations de mouvement. Ibid. p. 223

La partie du calcul algébrique qui nous occupe, consiste à passer d'une expression à une autre, qui lui soit égale, en se basant sur des propriétés de corps commutatif ordonné (distributivité, associativité …) :

> Les calculs sont donc constitués d'applications T de L dans L, appelées transformations *de mouvement*. Ibid. p. 223

Drouhard (1992), rendant compte de la structure des expressions symboliques de l'algèbre élémentaire, que les outils de la linguistique permettent de décrire.

[21] Dans cette partie, nous utiliserons les guillemets en suivant Drouhard et Panizza (2012) pour distinguer sans ambiguïté expressions et dénoté (sans guillemets), ce qui permet de dire par exemple « que « 5 » et « 3+2 » dénotent le nombre 5 » où l'on voit que deux expressions peuvent avoir des sens différents pour une même dénotation.

De ce point de vue, une transformation de mouvement, lorsqu'elle est régie par des propriétés mathématiques licites, permet de produire -et de modéliser-, pour le calcul algébrique qui nous intéresse, une égalité nécessairement juste.

Ainsi la chaîne de caractères « $3x + 5 = 5 + 3x$ » peut-elle s'interpréter, dans une perspective linguistique, comme une résultante de transformation de mouvement $T : E_{Alg} \rightarrow E_{Alg}$ telle que T(« $3x + 5$ ») = « $5 + 3x$ » : la place des termes est échangée. Cette transformation de mouvement est basée sur la commutativité de l'addition. Cette modélisation permet ainsi à la fois de mettre l'accent sur l'action, sur une interprétation de l'égalité en termes de production, de manipulation d'ostensifs et sur les propriétés mathématiques les régissant. De sorte que nous modélisons ce que nous avons nommé praxème manquant, par la notion de transformation de mouvement.

Notons néanmoins que la production de l'égalité c'est-à-dire l'obtention d'une expression symbolique algébrique dans P_{Alg} à partir de T, ne relève pas d'une transformation de mouvement. A strictement parler, étant donné que E_{Alg} est inclus dans F_{Alg}, l'on ne saurait considérer comme « transformation » une application de $E_{Alg} \times E_{Alg}$ dans F_{Alg} telle que (« $3x + 5$ » ; « $5 + 3x$ ») $\mapsto$« $3x + 5 = 5 + 3x$ ». A moins de ne considérer des ensembles plus vastes, c'est-à-dire une transformation de $F_{Alg} \times F_{Alg}$ dans F_{Alg} telle que (« $3x + 5$ » ; T(« $3x + 5$ »)) $\mapsto$« $3x + 5 = 5 + 3x$ ». Ce n'est pas là non plus à strictement parler d'une composition de transformations. En effet, la dénotation change de nature : dans P_{Alg} elle est booléenne, alors que dans E_{Alg} elle réfère à des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que l'ensemble image de la dénotation n'est plus le même. Or une transformation de mouvement étant couplée à une propriété mathématique, par nature, se doit de conserver toute dénotation. En conclusion de quoi, le mécanisme permettant d'engendrer une proposition, c'est-à-dire une égalité ici, à partir d'une transformation de mouvement donnant le membre de droite, n'est pas lui-même une transformation de mouvement, ni même une composition de transformations de mouvement. Ainsi, l'interprétation d'une proposition comme « $3x + 5 = 5 + 3x$ » issue d'un calcul algébrique est attachée au membre de droite de l'égalité en référence au membre de gauche : il en est *l'image par une transformation de mouvement.*

Ceci étant dit, les transformations de mouvement de l'algèbre sont :

> beaucoup plus nombreuses et complexes à décrire que les quelques axiomes de corps ordonné (commutativité, distributivité …) qui les fondent. Drouhard et Panizza (2012) p. 223

Drouhard (1992) en propose néanmoins une description détaillée, dont nous ne retenons que les spécificités susceptibles de caractériser les aspects linguistiques accompagnant l'usage des propriétés mathématiques dans le calcul algébrique qui nous occupe. Ces caractéristiques nous serviront de points d'appuis, ou de conditions, pour une construction didactique visant à créer un enseignement tenant compte de ces transformations de mouvement comme objet susceptible d'éclairer les praxéologies du calcul algébrique. Ces caractéristiques s'inscrivent dans une typologie des savoirs relatifs aux objets algébriques (nous allons préciser l'usage spécifique de ces termes) au cœur de ce que Drouhard nomme l'analyse épistémographique que nous allons décrire maintenant. Les outils correspondants nous permettront, comme nous allons le voir, de nous ressaisir du lien entre les savoirs de nature mathématique, et ceux de nature sémio-linguistique que nous avons décrits plus haut comme étant peu mis en relation dans les pratiques enseignantes.

1.4.3 Analyse épistémographique : une typologie des savoirs

Le travail formel que tout usage d'un langage suppose repose ainsi sur une dialectique essentielle avec ce que l'analyse épistémographique (Drouhard 2012) nomme la dimension notionnelle, c'est-à-dire la dimension mathématique en ce qui concerne le calcul algébrique.

L'analyse épistémographique s'intéresse à la manière dont les savoirs et leurs représentations adviennent ensemble, non pas d'un point de vue historique, mais d'un point de vue synchronique (Drouhard 2013). Ce modèle ne s'inscrit pas dans une modélisation de l'activité (d'un sujet), mais de connaissances. De ce point de vue les savoirs réfèrent donc à une définition très large de « ce qu'il y a à savoir », ou de ce que l'on « peut savoir » ici pour faire des mathématiques. Leur nature peut donc correspondre à des propriétés mathématiques, comme à des connaissances méta-mathématiques ou des notions protomathématiques relativement à un même objet de savoirs. Le terme « objet » est à prendre dans une acception très large recouvrant à la fois des objets particuliers comme le nombre 2 et des concepts comme celui de nombre entier. Nous reprendrons la définition donnée par Douady (1992) pour notre étude :

> Par **objet**, nous entendons l'objet culturel ayant sa place dans un édifice plus large qui est le savoir des mathématiciens, à un moment donné, reconnu socialement. L'objet est mathématiquement défini, indépendamment de ses usages. Douady 1992, p. 134

L'analyse épistémographique considère que les savoirs relatifs aux objets mathématiques sont situés dans un espace à quatre dimensions (Drouhard 2013).

La *dimension notionnelle* recouvre les propriétés ou les définitions mathématiques de l'objet. L'une de ses caractéristiques est qu'elle ne dépend pas du système de représentation sémiotique[22] dans lequel l'objet s'exprime (langagier ou scriptural par exemple).

La *dimension sémio-linguistique* recouvre « ce qu'il y a à savoir des systèmes de représentation sémiotique (en particulier le langage symbolique) pour faire des mathématiques ». En font partie les règles syntaxiques de juxtaposition de symboles, la grammaire des expressions ou les transformations de mouvement.

La *dimension instrumentale* concerne « ce qu'il y a à savoir des instruments (matériels, notionnel, sémiotiques ou stratégiques) pour faire des mathématiques ». On y trouve par exemple des savoirs liés aux portées ou aux limites de techniques ou de propriétés. Cette dimension est donc liée à une fin et recouvre des savoirs qui permettent par exemple de faire des choix (adaptations) ou plus généralement d'opérer sur les objets selon un but visé.

[22] Duval (1995) définit un registre sémiotique comme un système sémiotique qui permet la formation de représentations et les transformations des représentations en d'autres, qui se distinguent entre traitements (au sein d'un même registre) et conversions (d'un registre à un autre).

Enfin, la *dimension identificatrice* réfère à « ce qu'il y a à savoir pour identifier les objets (et ses composantes notionnelle, sémiolinguistique ou instrumentale) ». Elle permet de reconnaître en particulier un objet comme sous-objet d'un autre. Ainsi le nombre 0,75 donné par l'expression arithmétique « 0,75 » peut-il être identifié comme un nombre décimal, parce qu'il en a l'allure tout d'abord : d'un point de vue sémio-linguistique, c'est une formule arithmétique formée par des groupements de symboles correspondant à la grammaire des écritures décimales de nombres. La définition mathématique (composante notionnelle) des nombres décimaux permet d'assurer que, ayant même dénotation que « $\frac{75}{100}$ », il s'agit bien d'un nombre décimal. On peut trouver dans cette dimension les connaissances protomathématiques de reconnaissance de forme telle que le pattern-matching (Mounier 1988), mais aussi des processus d'identifications de structures, de nature très complexes.

Ces dimensions fonctionnent de façon très dialectique et selon des règles extrêmement diverses et complexes à décrire. Les outils de l'analyse épistémographique n'ont pas vocation à décrire l'ensemble des savoirs possibles autour d'un objet, mais permettent de donner des éclairages quant à la diversité des savoirs qui gravitent autour d'un même objet et qui, en même temps le construisent, dans une dialectique constante (ou plutôt constamment possible) entre les différentes dimensions.

Reprenons ainsi l'égalité « $3x + 5 = 5 + 3x$ » que nous avons envisagée précédemment. C'est un objet algébrique, dont on peut savoir que du point de vue sémio-linguistique, il appartient à l'ensemble P_{Alg} des propositions : dans la dimension identificatrice, la prise d'indices ostensifs (le signe « = ») y est essentielle. Dans cette même dimension, il est constitué de deux membres éléments de E_{Alg} « $3x + 5$ » et « $5 + 3x$ » dont le deuxième peut être considéré comme image par une transformation de mouvement du premier ainsi que nous l'avons vu plus haut.

Dans la dimension notionnelle, l'égalité « $3x + 5 = 5 + 3x$ » réfère à la commutativité qui assure que le dénoté est « Vrai ». Chacun de ses membres « $3x + 5$ » et « $5 + 3x$ », est aussi plongé, par dénotation, dans la dimension notionnelle : les dénotés sont alors les fonctions réelles $x \mapsto 3x + 5$ et $x \mapsto 5 + 3x$ dont la commutativité assure qu'il s'agit en réalité d'une seule et même fonction.

La dimension instrumentale peut recouvrir un ensemble de connaissances très large, qui renvoient à des savoirs « pour faire ». Les objets pouvant être engagés dans de multiples tâches, l'exhaustivité est illusoire. Les outils de l'analyse épistémographique n'ont pas vocation à les décrire entièrement, mais simplement à distinguer, par une certaine typologie, les différentes natures des savoirs et leurs relations, afin de mieux appréhender la façon dont les choses se jouent dans le travail algébrique. Ceci nous permet de réinterroger le constat que nous avons fait plus haut de théories incomplètes ou peu articulées dans les savoirs enseignés et les pratiques enseignantes. Si nous envisageons par exemple l'égalité précédente, elle peut être engagée à des fins de réduction, ou de production d'écritures canoniques (ordonnées). Parmi les savoirs pratiques figureront des savoirs du type « pour réduire et ordonner, on a intérêt à utiliser la commutativité » ou « la commutativité est une propriété de la multiplication et de l'addition, mais pas de la soustraction ou de la division » ou encore des connaissances pragmatiques sur les signes comme « pour commuter des termes, il faut prendre garde aux signes qui les précèdent ». Dans cette même dimension se trouveront un ensemble de méta-connaissances à l'instar de « pour ordonner, on a intérêt à regarder l'écriture pour identifier les termes éventuellement à la bonne place ». Lorsque les objets sont engagés dans une tâche, l'activité peut recourir à des savoirs se situant exclusivement dans une dimension comme simultanément dans plusieurs dimensions de façon dialectique. Un schéma simplifié de l'organisation de ces savoirs centré sur les trois premières dimensions peut ainsi permettre une certaine projection de l'objet relativement à ces savoirs :

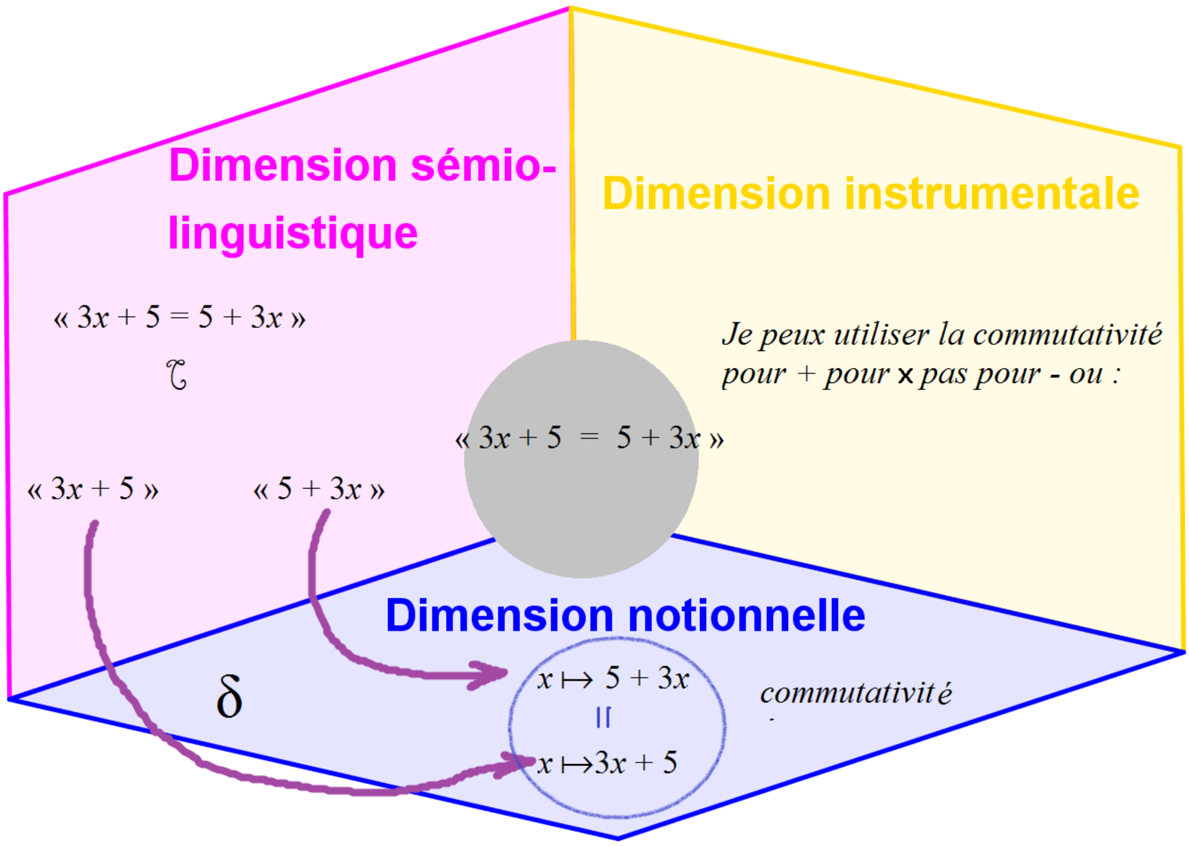


Figure 1.3 – Schéma simplifié de la projection des objets selon trois dimensions pour l'analyse épistémographique

Afin d'articuler les apports de l'analyse épistémographique aux outils de la théorie anthropologique du didactique, au regard des différentes natures des savoirs que nous pistons, nous avons été conduite à parler de dimension mathématique plutôt que de dimension notionnelle. Cette dénomination est en partie impropre étant donné que le caractère mathématique s'exprime dans chacune des dimensions. Toutefois, elle nous permet d'insister sur la nature des savoirs notionnels, qui peuvent s'exprimer en termes strictement mathématiques à propos d'objets définis également en termes strictement mathématiques. Nous parlons pourtant bien de la dimension notionnelle, mais nous la désignerons comme dimension mathématique en référence aux organisations de savoirs mathématiques, et à la modélisation de l'activité en termes de praxéologies qui met l'accent sur la dimension notionnelle, plutôt que sur la dimension sémio-linguistique, dès lors évanescente dans les savoirs à enseigner.

1.4.4 Un manque à explorer ? La dimension sémio-linguistique et sa dialectique avec la dimension mathématique.

Retour sur les programmes de calcul : entre changement de dimension et nouvelle interprétation de l'égalité non transparente

Cette mise en perspective des différents types de savoirs pour ce qui est du calcul algébrique permet de réinterpréter la façon dont les choses se jouent, au sein des praxéologies modélisation, du point de vue de la sémantique des expressions et des propositions, c'est-à-dire ce qu'elles désignent et signifient.

Commençons par la composante de la dénotation. Une remarque qui peut sembler évidente dans l'analyse épistémographique consiste à dire que la dénotation ne pilote pas les transformations de mouvement, puisqu'elles portent sur des écritures et non sur leur dénotation. La dénotation entretient une relation fondamentale avec les transformations de mouvement, qui correspond à une propriété constitutive de la dialectique entre dimensions sémio-linguistique et mathématique : les transformations de mouvement conservent la dénotation des expressions qu'elles transforment. Mais elle n'est simplement pas de nature à construire et soutenir les transformations de mouvement. La dénotation est en effet une application, pour les expressions algébriques, qui à une expression algébrique associe une fonction :

> L'entier *n* étant fixé (*n* représentant le nombre de variables), la dénotation δ_n des expressions littérales est une application de $(\mathbb{R}')^n$ vers $\mathbb{R}'$ (par convention le nombre dénoté d'une expression sans lettres est assimilé à la fonction constante correspondante). Drouhard et Panizza (2012) p. 224

Les auteurs notent $\mathbb{R}'$ l'ensemble des nombres réels auquel est adjoint, « pour des raisons de cohérence, une valeur appelée « Non Défini » qui est la dénotation, par exemple, de l'expression (pourtant bien formée !) « 1/0 ». ». La dénotation ne saurait donc rendre compte d'une transformation de mouvement. Elle peut assurer le contrôle d'une égalité, c'est-à-dire assurer que le dénoté d'une telle proposition est « Vrai » à partir de l'égalité des dénotés, ou plus exactement l'identité des dénotés de chaque expression correspondant aux membres de l'égalité.

> On voit ici apparaître clairement la différence entre le plan des objets mathématiques (les dénotés, ou, dans le vocabulaire de Saussure, les « signifiés ») et le plan des formules (les « signifiants »). La structure des dénotés est toujours beaucoup moins riche que la structure (profonde) des formules qui les expriment, pour la simple raison que l'identité des dénotés constitue une relation d'équivalence sur les formules, notée, selon les cas, par l'égalité (des expressions) ou l'équivalence (des propositions). C'est bien connu dans le cas des nombres rationnels, dénotés par une infinité de fractions équivalentes. Drouhard et Panizza (2012) p.221

Un dénoté ne saurait donner accès à une unique expression, autrement dit, la dénotation n'est pas injective. Ceci fait écho à l'épisode de classe décrit dans la partie précédente où des élèves tentent d'utiliser la dénotation pour produire une expression égale à une autre, bref de produire une transformation de mouvement : ce qu'ils font n'en est pas une et leur tentative est vouée à l'échec, une infinité d'expressions ayant la même dénotation. La dénotation ne peut pas donner accès à une transformation de mouvement. Ceci éclaire autrement la raison pour laquelle les praxéologies de modélisation qui s'y rapportent ne peuvent les faire émerger.

Il y a un changement de dimension fondamentalement impropre pour cela, et la dénotation peut alors faire obstacle à l'émergence d'un praxème de calcul. Afin d'expliciter ce phénomène, reprenons l'épisode que nous avons mentionné plus haut, où un élève produit « 10×*n* » comme expression égale à « (*n*×4 + 5)×2» parce que, ayant évalué la seconde pour 5, il obtient 50, qui étant égal à 10×5, lui permet de trouver « 10×*n* ». D'un point de vue épistémographique, le professeur attend la mise en œuvre d'une transformation de mouvement, dans la dimension sémio-linguistique. Mais l'effectuation n'est pas une transformation de mouvement, en raison du changement de dimension à ce moment là, par le truchement de la dénotation, pour effectuer un calcul. Le calcul dans le domaine numérique se situe dans la dimension mathématique, tout comme la décomposition permettant de produire 50 = 10 × 5, car elle s'appuie sur des connaissances numériques mémorisées pour effectuer le produit des dénotés : δ(« 10×5 ») = δ (« 10 »)× δ (« 5 »). Ce qui ne permet pas de situer la production d'une égalité comme « 10 × 5 = 50 » dans la dimension sémio-linguistique, c'est le fait qu'elle ne repose pas sur un 'calcul', au sens d'une transformation *sur* le langage, elle se fait bien sûr *dans* le langage, mais ne porte pas dessus. Ce faisant, on pense ou on utilise des propriétés mathématiques pour écrire 50 = 10 × 5 mais on ne fait pas de transformation qui porte *sur* les écritures. Le retour dans la dimension sémio-linguistique se fait à nouveau par dénotation dans un mouvement inverse (analogue à celui de la modélisation, mais c'est peut-être une surinterprétation ici). C'est ce changement de dimension (ce double déplacement du travail de *L* dans la dimension mathématique, puis ce retour dans *L*) qui se produit dans la technique, qui évite d'engager une transformation de mouvement.

Dans la même perspective, nous pouvons réinterpréter ce qui nous est apparu comme des insuffisances de praxéologies de modélisation et de déduction, en vue de faire émerger les pratiques du calcul algébrique. Les transformations de mouvement se situent au croisement des dimensions mathématiques et sémio-linguistique. La dénotation, du moins, celle propre aux praxéologies de modélisation fondées sur les seuls programmes de calcul, ne semble pouvoir suffire à leur construction. Il s'agit donc de clarifier son rôle par rapport aux transformations de mouvement. La sémantique des praxéologies de modélisation ne semble pouvoir livrer qu'une partie de la sémantique des expressions algébriques.

Plaçons-nous en effet, au moment de la construction des premières techniques de calcul algébrique, en nous référant aux situations d'introductions au travers des suites de nombres figurés ou des programmes de calcul, ou plus généralement des praxéologies de modélisation sur lesquelles les recherches s'appuient pour « introduire » le calcul littéral. Rappelons que ces ingénieries adossent les praxéologies de calcul algébrique à celles de modélisation au travers de la question de l'équivalence de programmes de calcul (ou d'égalité d'expressions algébriques).

Il y a une modification profonde de l'interprétation de l'égalité. Dans les praxéologies de modélisation en effet, le sens de l'égalité de deux expressions est donné par l'équivalence des programmes de calcul associés (qui font le sens des dites expressions). Mais dans les praxéologies de calcul algébrique, le sens de l'égalité est véhiculé par une transformation de mouvement : le membre de droite étant l'image du membre de gauche par une transformation de mouvement.

Les difficultés rencontrées par les élèves comme par les professeurs montrent que l'une des interprétations n'implique pas nécessairement l'autre. Les praxéologies modélisation mettent en exergue un sens qui est certainement peu présent dans les classes, où prédomine un calcul formel non fonctionnel. Cependant, elles n'incorporent pas alors l'idée d'une transformation, c'est-à-dire d'une opération à la fois sur la syntaxe, sur les expressions et sur les programmes de calcul que l'on vise dans le processus de modélisation, tout en conservant la dénotation. L'écriture n'est pas considérée, de fait, comme transformable à ce moment-là. Or, comme nous l'avons vu avec l'exemple de Valentin (§ 1.3.4 p.43), cette nouvelle interprétation peut ne pas aller de soi. La dénotation ne s'y est pas construite en relation avec une transformation de mouvement, elle vit en lien, bien sûr, avec l'équivalence de programmes de calcul et avec l'égalité d'expressions algébriques, mais on voit combien elle est déconnectée de tout travail sémio-linguistique qui n'advient pas de lui-même, ni ne se révèle transparent.

Ainsi postulons-nous que pour construire un rapport idoine entre les praxéologies modélisation et les praxéologies de calcul, la sémantique des expressions doit reposer sur une double interprétation dans les dimensions sémio-linguistique et mathématique complétant et étendant ainsi le sens des égalités entre deux expressions dans une dialectique tripolaire.

Nous reprendrons les notations de Chevallard et Bosch (2012 p. 29) pour cette extension : étant donné « deux expressions algébriques $E_1(x)$ et $E_2(x)$; on écrira $E_1 \equiv E_2$ pour indiquer que les programmes Π_1 et Π_2 associés à E_1 et E_2 sont équivalents. » Nous noterons de plus $\mathcal{D}$ un ensemble de valeurs possibles des variables. La dialectique entre programmes de calcul équivalents et égalité d'expressions algébriques se complète selon nous d'une dialectique avec les transformations de mouvement dont la prise en compte nous paraît essentielle notamment parce qu'elle peut ne pas aller de soi.

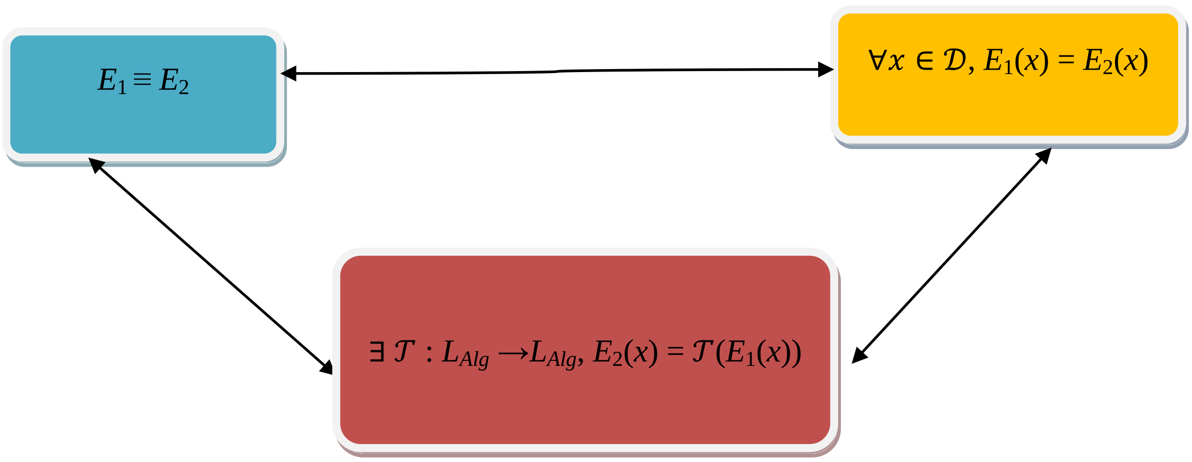


Figure 1.4 – Programmes de calcul, expressions algébriques et transformations de mouvement

Notons par ailleurs que l'existence d'une transformation de mouvement peut être remplacée par l'existence d'une *composition* de transformations de mouvement. Ces dialectiques reposent bien entendu sur la dénotation, qui est ici partout conservée.

Nous faisons donc l'hypothèse que la prise en compte de ces multiples interprétations de façon dialectique au moment de la construction du calcul algébrique est de nature à établir les liens entre les aspects sémantique et syntaxique dans le travail algébrique.

1.4.5 La rupture entre calcul arithmétique et algébrique et l'impossible extension praxémique.

Une autre interprétation de cette difficulté liée à l'émergence d'une transformation de mouvement réside dans le fait qu'au moment de l'introduction du calcul algébrique dans la scolarité, il n'y a pas véritablement de précurseur donnant un tel sens aux expressions.

Examinons en effet le cas des expressions arithmétiques rencontrées en primaire, et des égalités afférentes. Tout d'abord, la très grande majorité des propositions usent du signe « = » comme marqueur de la réalisation d'un calcul comme dans « 57×2 = 114 ». Or, l'effectuation, c'est-à-dire l'exécution d'un calcul numérique n'est pas une transformation de mouvement. Nous avons vu plus haut sur un exemple, que ce travail s'effectue sur les dénotés, dans la dimension mathématique, et ne porte pas *sur* les expressions dans la dimension sémio-linguistique. Pour les même raisons, une égalité reposant sur une décomposition comme « 50=5×10 » ne réfère pas à une transformation de mouvement.

Deux transformations de mouvement apparaissent néanmoins au moment de la construction des propriétés de la multiplication en primaire. L'égalité « 4 + 4 + 4 = 4×3 » relève par exemple de la transformation « 4 + 4 + 4»$\xrightarrow[déf\times]{}$ « 4×3 » reposant sur la définition de la multiplication par addition itérée. De la même façon on pourra trouver des égalités comme « 3×4 = 4×3 » issue de la transformation « 3×4» $\xrightarrow[commut]{}$ « 4×3», fondée sur la commutativité de la multiplication. Néanmoins, ces transformations qui pourront apparaître en début d'apprentissage, au moment de la construction de la multiplication, auront une place dans les pratiques certainement réduite par rapport aux effectuations.

Enfin, une dernière transformation de mouvement apparaît à l'occasion du travail sur les écritures décimales de nombres et sur les décompositions additives qui donnent lieu à des écritures comme « 520 = (5×100) + (2×10) ». La transformation de mouvement porte bien sur les chiffres de l'expression arithmétique « 520 » et se base sur les propriétés mathématiques de la numération, c'est-à-dire de la valeur des chiffres selon leur rang dans l'écriture décimale de position.

Ces transformations de mouvement dans le langage L_{Arithm} sont cependant de nature très différente des transformations de mouvement dans L_{Alg}. En effet, d'une part elles portent sur les chiffres, ce qui n'a pas d'équivalent dans les expressions de L_{Alg} , et d'autre part, les propriétés activées dans la dimension mathématique réfèrent à une théorie de la numération particulière dans le sens où elle donne un certain sens à la syntaxe. Les seuls équivalents que l'on pourrait envisager dans L_{Alg} seraient ceux de l'effacement du signe × pour « 3×x = 3x » ou du « 1 » dans « 1x » $\xrightarrow[eff]{}$ « x » (ou du « x » dans « 0x » » $\xrightarrow[eff]{}$ « 0 »). Or, les transformations de mouvement qui nous occupent sont celles qui relèvent plutôt de l'application des propriétés de corps de $\mathbb{R}$. Plus encore, dans les décompositions des écritures décimales de nombres, n'apparaissent pas les dialectiques précédentes, c'est-à-dire l'interprétation d'une expression telle que « (5×100) + (2×10) » comme étant celle d'un programme de calcul.

Nous voyons donc la rupture de l'interprétation du signe « = » s'accompagner d'un praxème manquant dans les traitements des expressions arithmétiques : celui d'une transformation de mouvement. Nous postulons que le travail dans L_{Arithm}, tel qu'il peut exister dans les pratiques antérieures des élèves, n'est pas de nature à la faire émerger.

Nous postulons également qu'un enseignement des transformations de mouvement peut potentiellement refonder un rapport entre les praxéologies modélisation et déduction tenant compte des difficultés sémio-linguistiques que la pratique du calcul algébrique demande de surmonter.

Nous postulons enfin qu'il est possible de fonder un tel enseignement sur une extension praxémique, à condition de construire des transformations de mouvement idoines dans L_{Arithm} c'est-à-dire permettant un travail dans la dimension sémio-linguistique tout en articulant les dimensions mathématique et sémio-linguistique, et en maintenant les dialectiques fondées sur les différentes interprétations des expressions (sens et dénotation) entre programmes de calcul, nombre et transformations de mouvement.

Nous allons maintenant explorer les conditions et les contraintes sur lesquelles un tel enseignement pourrait se fonder. En particulier, nous mettons en lumière les spécificités des transformations de mouvement et leurs conséquences (en termes de difficultés aussi) dans la prise en compte des dialectiques mentionnées plus haut.

1.4.6 Une propriété fondamentale : les transformations de mouvement opèrent sur les fonctions syntaxiques

Une particularité des transformations de mouvement tient à ce qu'elles peuvent opérer sur des écritures de longueur et de complexité indéfinie. De sorte que leur description concise, c'est-à-dire qui ne renvoie pas toute transformation à une composition de transformations élémentaires multiples, pose la question de la caractérisation des éléments sur lesquels elle opère pour les expressions sur lesquelles elle s'applique :

> Il nous a fallu de nombreux tâtonnements avant de déterminer les invariants qui identifient les sous-expressions à transformer, indépendamment des différences de forme entre les expressions. Ces invariants, ce sont les fonctions syntaxiques ("terme", "facteur", "membre" etc.) que ces sous-expressions remplissent au sein des expressions. Drouhard 1992

On distingue, en linguistique, catégorie et fonction syntaxique : une catégorie est relative à la nature des objets algébriques, comme une égalité, une somme, ou une fraction par exemple. Une fonction syntaxique est une relation qu'entretiennent des sous-expressions d'une expression. Ainsi, à la catégorie Fraction, dont relève par exemple l'expression « $\frac{3}{4}$ », on pourra associer deux fonctions syntaxiques : celle de numérateur de la fraction, et celle de dénominateur de la fraction.

L'usage des fonctions syntaxiques permet de décrire l'ensemble des transformations sans avoir recours nécessairement à des transformations élémentaires que l'on composerait et qui rendraient compte selon les expressions, d'une multitude d'étapes que l'expert, ou même le débutant, n'effectue pas toujours dans sa pratique effective. Ainsi le système des transformations permet d'obtenir :

$$2x - 8$$

aussi bien directement à partir de

$$2(x-4),$$

qu'indirectement via les transformations élémentaires:

$$2(x - 4)$$
$$\downarrow$$
$$2(1\,x - 4)$$
$$\downarrow$$
$$2\times 1\,x - 2\times 4$$
$$\downarrow$$
$$2x - 8$$

Drouhard 1992 p. 208[23]

Les transformations susceptibles de décrire un même calcul algébrique ne sont donc pas uniques mais le système permet, tout en s'approchant de la pratique algébrique scolaire, de modéliser l'ensemble des calculs algébriques.

Cette modélisation a deux conséquences.

La première concerne la nature du discours susceptible d'accompagner le calcul algébrique : d'une part Drouhard (1992) montre qu'il est possible de décrire les transformations de mouvement de façon rhétorique, et que ces descriptions sont rigoureuses, bref, valables. D'autre part, il précise la forme et les objets de ce discours : ce sont les fonctions syntaxiques. Enfin, sa recherche montre que des descriptions de transformations de l'algèbre avec des notations algébriques, par des mécanismes de reconnaissance de forme (ou *pattern-matching*) par exemple, ne permettent pas de rendre compte du travail algébrique de façon satisfaisante, c'est-à-dire dans une visée de modélisation de la pratique telle qu'on la rencontre dans les classes (et non à des fins de programmation par exemple). Par suite, la description des transformations de mouvement se fait donc sans symbolisme algébrique, mais avec des mots, comme « somme », « produits » ou « termes », les mots étant plus souples que les écritures algébriques, sans pour autant être moins rigoureux.

La seconde conséquence tient à ce que la nature, ou plus exactement la catégorie, des sous-expressions est variable : Nombre –ou plus exactement Constante-, Somme, Produit… Les fonctions syntaxiques caractérisent les expressions à transformer de façon plus invariante, c'est-à-dire indépendante des catégories des sous-expressions. L'intérêt ici réside dans la flexibilité potentielle de telles descriptions, c'est-à-dire la prise en compte, avec un même

[23] Dans le premier cas, la transformation peut être décrite de façon fonctionnelle et générale pour le développement du produit d'un facteur par une somme de *n* termes, en précisant que « le *i*-ème terme de la somme qui est le résultat de la transformation est :

- un pseudomonôme dont le premier facteur est le facteur commun et le second le *i*-ème terme de la somme initiale si ce *i*-ème terme de la somme initiale est une variable,
- une constante dont la valeur numérique est le résultat de la multiplication du facteur commun et *i*-ème terme de la somme initiale si ce *i*-ème terme de la somme initiale est une constante. »

discours d'une transformation de mouvement susceptible de porter sur des expressions dont les sous-expressions peuvent être très diverses (et potentiellement de natures de plus en plus générales), ce qui correspond finalement bien à la flexibilité des usages des écritures algébriques. C'est-à-dire que le discours, compte tenu de ces spécificités, peut être de nature à accompagner des adaptations de techniques dans le calcul algébrique, et discriminer certaines variables de contextes (les catégories) pour faire ressortir les éléments pertinents qui sont les fonctions syntaxiques sur lesquelles opérer.

Dans le même temps, ces spécificités renvoient à certaines difficultés langagières : « les structures profondes » des expressions sur lesquelles opèrent les transformations de mouvement demandent un travail préalable d'identification de ces structures, qui peut être extrêmement complexe et difficile pour les élèves dans la mesure où :

> Une partie importante de la compétence de l'élève va donc résider dans sa capacité à reconstituer le sens, partiellement implicite, d'une formule, à partir d'indices visuels (Kirshner 1989, Kirshner & Awrty 2004), tel le petit Poucet (ou le petit Hansel) à la recherche d'indices pour retrouver le chemin de sa maison. Drouhard & Panizza 2012 p. 219

1.4.7 Propriétés de la dialectique entre les dimensions sémiolinguistique et mathématique

Une des particularités de la dialectique entre les dimensions mathématique et sémio-linguistique tient à la possibilité de s'en affranchir momentanément, et de ne la convoquer qu'en certaines occasions dans le travail expert du calcul algébrique :

> Le mot clé, ici est "systématique" (ou "continuel"). Les élèves doivent certes pouvoir donner, **à chaque fois qu'ils le désirent**, une dénotation, un sens ou une interprétation aux écritures qu'ils manipulent. Mais ce recours à la "signification" doit demeurer optionnel. L'algébriste compétent cesse à certains moments d'interpréter ses calculs, et c'est cette "suspension du sémantique" qui fait précisément la force de l'algèbre (cf. la notion de "calcul aveugle" chez Leibniz). Interpréter chaque fois qu'on le désire, n'est pas interpréter tout le temps (cela ne doit pas être non plus ne jamais le faire). Il faut donc que l'élève, certaines fois (mais pas toujours) puisse ne pas interpréter les écritures, et donc les considérer d'un point de vue purement syntaxique. C'est cela que j'appelle tenir un discours légitime sur la syntaxe. Drouhard (1992) p. 378

Suspendre n'est donc pas ignorer la sémantique, mais ne consiste pas non plus à y référer sans cesse. C'est ainsi que les praxéologies de modélisation, reposant de façon essentielle sur une dialectique entre système et modèle, et donnant par là une place prépondérante à la dénotation, semblent prises dans un rapport entre les dimensions qui n'incorpore pas l'idée de cette suspension (elle pourra alors venir d'autres contraintes didactiques, ou d'effets de contrat comme nous l'avons vu précédemment). La dénotation doit pour cela être articulée aux transformations de mouvement.

Cette suspension optionnelle a aussi une conséquence du côté de la nature du discours susceptible d'accompagner le travail formel. Le discours peut à un moment donné se trouver uniquement du côté syntaxique :

> […] l'élève peut légitimement dire quelque chose comme :
> *"je passe x de l'autre côté du signe 'égal' en changeant son signe".*
> Il doit avoir le choix entre un tel énoncé (qui porte sur les signifiants, ici les écritures) et un énoncé qui porte sur les signifiés (ici les nombres) tel que :

> *"j'additionne de part et d'autre l'opposé du nombre x"*
> Ce second énoncé n'est ni plus, ni moins "correct", que le premier. Simplement, il porte sur les dénotations au lieu de porter sur les ESA. Ce qui est dangereux, c'est le glissement sans contrôle ni précaution d'un plan vers un autre (Bauersfeld et Zawadowsky 1981), mais pas le fait de se tenir dans le plan des ESA quand le lien qui l'unit aux objets mathématiques (la dénotation) est par ailleurs bien assuré. En d'autres termes, parler de "changer de membre un terme" n'est pas un abus de langage ou je ne sais quelle métaphore qu'il faudrait proscrire au profit d'une description mathématique convenable. Il s'agit de la description légitime d'une transformation légitime entre ESA, correspondant à une opération mathématique non moins légitime. Drouhard (1992) p. 377

Lorsqu'on permute les termes dans l'écriture $3x + 5$ pour écrire $5 + 3x$ selon la transformation de mouvement que nous noterons « $3x + 5$» $\xrightarrow[commut]{}$ « $5 + 3x$ » le dénoté de « $3x + 5$ », la fonction $x \mapsto 3x + 5$, est le même que celui de « $5 + 3x$ ». La description afférente pourra tout aussi bien correspondre à « j'échange la place de $3x$ et de 5 » que « je permute les termes de la somme ». L'essentiel étant de pouvoir convoquer sous une forme ou une autre, la propriété mathématique assurant la légitimité de la transformation (et donc l'égalité) : la commutativité de l'addition.

Nous postulons par ailleurs que cette distinction est de nature à lever de possibles malentendus entre professeurs et élèves quant à la nature des discours attendus et leur légitimité.

Les transformations de mouvement nous semblent donc revêtir un certain potentiel, comme objet d'étude, pour penser le travail formel dans une perspective fonctionnelle que tout usage d'un langage suppose, tout en faisant le lien avec la dénotation, qui fait (avec le sens et l'interprétation) la sémantique des expressions du point de vue linguistique. En particulier, cette modélisation linguistique des manipulations algébriques permet *a priori* de légitimer et structurer le discours sur les signifiants sans pour autant ignorer le signifié.

> Com-prendre les ESA [expressions symboliques algébriques] c'est prendre ensemble leur syntaxe, leur dénotation, leur sens et leur interprétation. […] si l'une des composantes manque, il n'y a pas compréhension. Drouhard (1992) p. 376

Nous terminons ce chapitre en revenant sur la perspective de modélisation numérico-algébrique que nous avons évoquée à la fin de la partie 1.3, et les potentialités quant à l'articulation des praxéologies de modélisation et celle de déduction, au travers d'enjeux formalisateur, unificateur et généralisateur (Robert 1998) des savoirs à enseigner sur le calcul algébrique.

1.5 LE CALCUL ALGEBRIQUE : DES SAVOIRS A ENSEIGNER AUX ASPECTS FORMALISATEURS, UNIFICATEURS ET GENERALISATEURS

Nous nous intéressons dans cette partie à ce que Robert nomme les caractères formalisateur, généralisateur et unificateur (Robert 2008) des savoirs à enseigner. Ces spécificités peuvent-elles se constituer comme aspects fondateurs de la construction concomitante des domaines numériques et algébriques qui se dégagent comme enjeu de la construction de la théorie algébrique ? Afin d'apporter des éléments de réponse, nous commençons par définir les termes employés, avant d'en donner des exemples issus du curriculum officiel. Nous nous centrons dès lors sur la propriété de distributivité comme savoir mathématique fondamental pour les praxéologies liées au calcul algébrique, et aux transformations de mouvement afférentes. Cette propriété a en réalité traversé l'ensemble des parties précédentes, et s'érige ici comme élément central de notre étude, bien que, comme nous l'avons vu, le théorème en lui-même dans son écriture symbolique ne paraît pas suffire à l'émergence de ce que nous avons appelé un praxème de calcul au sein des praxéologies de déduction. Les praxéologies de modélisation laissent également ouverte la question de la constitution de ce praxème comme pratique de calcul, à la fois dans les dimensions mathématique et sémio-linguistique, du moins dans la dialectique numérico-algébrique telle qu'elle est usuellement envisagée dans les recherches s'y référant. Nous avons avancé l'idée d'un autre type de dialectique entre numérique et algébrique à l'issue de la partie précédente, qui prendrait notamment en compte les connaissances numériques anciennes. Cette dialectique nouvelle, reposerait sur les aspects formalisateur, unificateur et généralisateur de la distributivité. Notre projet nous amène dès lors à envisager la distributivité dans les savoirs à enseigner sous cet angle, dans le processus de transposition didactique. Cette partie consiste à étudier d'un point de vue global sur le curriculum, les savoirs à enseigner sur la distributivité, afin d'en caractériser les potentialités formalisatrice, généralisatrice et unificatrice. Nous la reprendrons par la suite (au chapitre suivant) pour en préciser les aspects, en particulier du côté des savoirs enseignés. Cette vue d'ensemble que nous abordons ici, vise à déterminer en quoi ces caractères peuvent donner des pistes pour aborder la question des adaptations fines des techniques de calcul algébrique, mais aussi la manière dont le travail sur les nombres et les praxéologies numériques peut servir de soutien, et articuler les dimensions sémio-linguistiques et mathématiques. Ceci nous amène à penser le lien avec les constructions de ce que nous avons appelé *praxèmes* de calcul et que nous avons défini comme transformations de mouvement.

1.5.1Caractères formalisateur, unificateur et généralisateur des savoirs à enseigner

« A l'intérieur d'une transposition imposée ».

La genèse de cette catégorisation des aspects des notions[24] à enseigner s'inscrit dans une problématique particulière (Robert 1983). Il s'agit de construire une situation permettant d'introduire une notion nouvelle : celle de la définition de limite dans le cadre de la convergence de suites réelles à l'Université. La construction s'avère difficile dans la perspective d'une dialectique outil / objet[25] susceptible de présenter les connaissances nouvelles comme nécessaires et porteuses d'une solution à un problème, problème que l'on pourrait néanmoins aborder en étendant l'utilisation de connaissances anciennes. Le lecteur intéressé pourra se référer à Robert (1998, 2011), dont nous ne retiendrons ici que quelques éléments essentiels à notre étude : la catégorisation introduite alors est certainement un élargissement considérable pour l'analyse des notions mathématiques, mais elle éclaire pour notre étude les contraintes institutionnelles et interroge la distance et le lien entre connaissances anciennes et connaissances nouvelles.

> L'élargissement correspondant […] a été de questionner plus systématiquement l'écart entre l'ancien et le nouveau, entre les outils en place chez les étudiants et les outils à introduire pour les faire accéder à la conceptualisation visée, ou dit autrement, d'interroger les milieux disponibles. Robert (2011) p. 210

Cette centration sur la distance entre connaissances anciennes et connaissances nouvelles nous permet de réinterroger l'articulation entre les praxéologies du domaine numérique et celle du domaine algébrique au moment de sa construction.

Ainsi dira-t-on qu'une notion nouvelle à un moment donné du curriculum d'un élève revêt un caractère unificateur si elle unifie des notions anciennes traitées de manière isolée jusque là. On dira qu'elle présente un caractère généralisateur si elle apporte une extension de l'ancien, en ayant une portée plus large, et enfin qu'elle témoigne d'un caractère formalisateur si la notion nouvelle offre un nouveau formalisme, non nécessairement symbolique. La typologie des notions introduite par Robert dépend alors de la combinaison de ces aspects. Ainsi une notion à la fois généralisatrice et unificatrice ou unificatrice et formalisatrice est-elle désignée comme relevant de celles qui peuvent se constituer comme *réponses à un problème*. Lorsque les notions présentent un caractère généralisateur, ou formalisateur étendant des formalismes anciens, elles sont alors désignées comme *extensions de notions* anciennes. Un dernier type correspond aux notions qui présentent à la fois les trois caractères : les notions sont alors dites formalisatrice, unificatrice et généralisatrice, ou en abrégé, FUG.

Cette typologie s'intéresse alors aux enjeux des « notions en mathématiques et dans les mathématiques à enseigner ». Les travaux de recherche conduits en appui sur les aspects FUG des notions (Dorier 1997 et Bridoux 2011 entre autres) se sont tout d'abord tournés vers l'histoire et l'épistémologie des notions pour éclairer leur genèse et les réorganisations des

[24] Notons que le terme de notion peut renvoyer, dans un sens très large, à un chapitre du découpage de l'enseignement, comme à un théorème qui y trouve une place importante, ou encore, à un ensemble de concepts comme les notions de topologie dans les travaux de Bridoux (2011).

[25] Douady (1992) distingue les dimensions outil (dont l'usage permet la résolution d'un problème) et objet (objet culturel, reconnu, faisant alors partie d'un ensemble de connaissances mathématiques) dont la dialectique est désignée comme essentielle pour la construction du sens des concepts.

connaissances théoriques concomitantes. Nous n'adoptons pas tout à fait cette démarche néanmoins dans un premier temps (mais elle sera au fondement de notre étude ultérieure à propos de la substitution, nous y reviendrons). Les analyses de type épistémologiques ont pour première fonction de comprendre comment les notions peuvent émerger, vivre et se développer, comme visées dans l'enseignement, au travers des programmes. Mais notre volonté finalement de nous situer au plus près des pratiques nous amène à penser la transposition à rebours, c'est-à-dire, à considérer, et à questionner en même temps, le fonctionnement épistémologique scolaire comme un effet d'une transposition d'un fonctionnement épistémologique possible au sein des mathématiques. Ce fonctionnement est, dans une certaine mesure, corrélé à l'origine de la notion, et à son développement dans les mathématiques, mais nous ne questionnerons pas ici la pertinence du choix d'une telle transposition, ou d'une autre en concurrence, au regard des genèses historiques. C'est-à-dire que nous prenons comme point de départ les mathématiques à enseigner, telles qu'elles apparaissent dans les programmes, comme savoirs de référence, avant celui des mathématiques. Nous nous situons dans la perspective de Robert (2011) qui montre en quoi cette démarche peut être particulière, en la comparant à d'autres, comme celle qu'elle entrevoit dans les travaux de Schneider (2011) :

> Peut-être, plus généralement, les différences viennent-elles beaucoup du fait que je me place à l'intérieur des programmes, et pas à l'extérieur ; que j'adopte une visée relativement plus locale, et que je travaille en aval de la description mathématique, comme déjà suggéré, prenant les cadres institutionnels comme donnés, même s'ils sont critiqués ou si des aménagements sont proposés.
>
> Schneider questionne beaucoup plus que les situations fondamentales au sein d'ingénieries. Elle questionne d'abord les mathématiques (en amont), puis les mathématiques à enseigner. Robert (2011) p. 215

Ce point de vue nécessite donc une certaine vigilance, consistant à questionner les organisations curriculaires, même si elles sont considérées comme données. Le questionnement est en cela local, se situant à l'intérieur d'une certaine transposition imposée.

1.5.2Unification de pratiques anciennes numériques et des pratiques algébriques

Un premier parcours global des programmes de primaire permet de déterminer une utilisation en acte de la distributivité, c'est-à-dire qu'elle est implicitement employée dans l'accomplissement de types de tâches dont les techniques reposent, sans que cela soit dit, sur cette propriété. La distributivité, lorsqu'elle est mise à l'étude en classe de 5^e de collège, est donc une notion ancienne de ce point de vue. Les praxis anciennes associées sont issues du domaine numérique. Il s'agit des types de tâches T_{calc_m} : calculer un produit de deux entiers mentalement, et T_{calc_p} : calculer un produit de deux entiers en posant la multiplication. Ainsi, le calcul mental de 28×102 peut consister *a priori* à multiplier 28 par 100 puis par 2 avant d'ajouter les résultats. La technique posée usuellement rencontrée en primaire, par exemple pour le produit 563×24, consiste à calculer le produit de 563 par 4 dans une première ligne, puis celui de 563 par 20 dans une seconde ligne, avant d'ajouter ces produits partiels dans une dernière ligne. Dans les deux cas, les techniques reposent sur l'utilisation de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition avec une décomposition additive de l'un des facteurs. Les types de tâche sont cependant isolés dans le sens où ils sont, par nature, traités de façon séparée, puisqu'ils s'excluent *a priori* l'un l'autre. Dans l'état actuel de l'organisation curriculaire, la distributivité revêt donc un caractère unificateur vis-à-vis de ces praxis numériques préexistantes. De façon concomitante, elle complète les praxéologies afférentes, en se constituant comme technologie dans le domaine numérique. Les organisations mathématiques ponctuelles s'agrègent ainsi en organisations mathématiques locales. Cette technologie est en outre intimement liée à l'équivalence de programmes de calcul arithmétiques, et à leur dénotation. Tout d'abord, le fait que le programme de calcul $28 \times 100 + 28 \times 2$, constituant la technique, donne le résultat du produit 28×102, qui correspond à un autre programme de calcul, peut-être questionné à l'aune de l'émergence de la distributivité. Ensuite, le fait que deux expressions numériques renvoient le même nombre, peut, dans une certaine mesure apparaître comme une première approche de l'équivalence, et de la dénotation, dans le domaine numérique, pour constituer un support pour le domaine algébrique.

Cette unification des pratiques numériques anciennes, au sein des pratiques algébriques de calcul, apparaît de fait comme un passage obligé dans la transposition des savoirs à enseigner. Pourtant, des recherches telles que celles de Mok (2010) à propos du sens donné à la distributivité pour des élèves à Hong Kong, laissent à penser qu'une telle unification peut ne pas aller de soi du point de vue des savoirs enseignés ou appris. Mok (2010) rencontre à Hong Kong ce manque d'unification pour un élève à l'occasion d'un entretien. Il fait suite à un test à propos de la distributivité dans le cadre numérique. L'une des questions consiste à dire si l'égalité 62.(23 + 49) = 62.23 + 62.49 est vraie et pourquoi. Voici ce qu'en relate l'auteure :

> The question 'Is 62 · (23 + 49) = 62 · 23 + 62 · 49 correct? Why?' (Task 1) was asked to see how students argued given a numerical example. Students demonstrated successful numerical application when they could say that 62 · (23 + 49) = 62 · 23 + 62 · 49 was correct without carrying out any computation. This represents a minimum knowledge of the distributive property as a property that they can apply in arithmetic. Students who failed to do this may have treated arithmetic and algebra as separate domains. In cases like this, the students may have been able to say that $a(b + c) = ab + ac$ but they still needed to check using calculation when they encountered numerical cases because they may have believed that 62 · (23 + 49) and 62 · 23 + 62 · 49 represented two different computation procedures and thus could possibly give different results. For example, a student did not know whether 62 · (23 + 49) = 62 · 23 + 62· 49 was correct. He needed to calculate the answer. When asked whether he had other methods besides calculation, he said that he learned 'algebra' in primary school but was not sure whether this question was the same as the 'algebra' he had learned. He was not able to elaborate any further (Mok, 2010, p. 65).

Mok (2010) cherche à partir d'entretiens d'explicitation à caractériser le sens donné par les élèves à la distributivité et leur capacité à raisonner en utilisant cette propriété. Elle montre au travers de cet épisode que la dialectique entre numérique et algébrique peut ne pas advenir, pour l'élève auquel elle se réfère ici, il n'y a pas de lien assuré entre les pratiques dans ces cadres. Sans avoir d'étude portant sur la représentativité de tels épisodes, nous pouvons néanmoins en conclure qu'en l'absence d'enseignement l'organisant, l'unification peut ne pas avoir lieu et faire obstacle aux apprentissages.

Par ailleurs, la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition unifie de fait, deux autres praxéologies, liées à deux genres de tâche qui apparaissent avec elle dans les textes officiels, dans le domaine algébrique, comme dans le domaine numérique. Il s'agit de développer et de factoriser des expressions numériques ou algébriques. Cette prise en compte de l'enjeu d'unification, bien qu'il aille de soi du côté des organisations mathématiques telles qu'institutionnellement organisées, nous paraît en réalité essentielle au vu des erreurs et des difficultés d'adaptations que nous avons soulevées dans la première partie de ce chapitre. Les travaux de Croset (2009) nous renseignent du côté des savoirs appris, pour lesquels la distributivité ne s'est pas constituée comme unificatrice en ce qui concerne les élèves qui commettent des erreurs.

De la même façon que précédemment, si l'unification des types de tâches du calcul algébrique liés aux développements et aux factorisations avec la distributivité sous ses différents formalismes (simples, double, identités remarquables) paraît un passage obligé dans la transposition des savoirs à enseigner, il ne semble pas aller de soi dans les savoirs enseignés. Les conclusions de Croset (2009) quant à l'analyse de manuels qu'elle conduit paraissent l'indiquer :

> Bien peu de manuels explicitent le lien existant entre ces huit types de tâches. Bien peu montrent comment passer de l'un à l'autre. Or, la différenciation des cas peut faire, en fait, obstacle à la force de généricité des règles, à l'unification. Croset (2009) p. 45

Ceci nous paraît d'autant plus important que les programmes organisent l'étude de cette technologie sur un temps long, avec éventuellement des ruptures du point de vue de l'unification comme en 4^{e} où, les programmes mettent l'accent sur le développement. Ce dernier constitue en effet, un thème d'étude à part entière, dans la rubrique connaissances, tandis que la factorisation n'apparaît que dans un commentaire, indiquant que les factorisations se limitent au cas où le facteur commun est de la forme a, ax ou x^2. Ceci s'accompagne du fait que les développements doivent concerner des expressions de la forme $(a+b)(c+d)$, tandis qu'aucune factorisation n'y conduira *a priori*, compte tenu du commentaire précédent.

Ces quelques éléments nous amènent à envisager l'unification envisagée dans la transposition en réalité peu présente dans les savoirs enseignés et appris. Ainsi une analyse détaillée de la transposition de ce point de vue nous paraît-elle essentielle afin de caractériser les savoirs à enseigner et enseignés. Ce sera l'objet du second chapitre de notre thèse. En outre, cette unification est également liée aux différents systèmes de nombres qui jalonnent le curriculum. C'est ce que nous allons voir maintenant.

1.5.3 Double mouvement de généralisation et systèmes de nombres

L'organisation des rencontres et de l'étude des différents systèmes de nombres tout au long de la scolarité obligatoire témoigne d'un caractère généralisateur de la distributivité dans les savoirs à enseigner. Lorsqu'elle apparaît en 5^{e}, son utilisation s'étend des nombres entiers, aux nombres décimaux, déjà rencontrés en primaire. Notons par ailleurs, que la construction de la multiplication par addition itérée pour les nombres entiers permet de constituer une justification de la distributivité, complétant ainsi le niveau théorique des praxéologies dans ce cas particulier. Lorsque son usage s'étend aux nombres décimaux toutefois, cette justification ne tient plus, et l'extension est admise. Ce premier mouvement de généralisation concerne les ensembles de nombres construits, pour lesquels les lois et leurs propriétés se transmettent.

Il existe un deuxième mouvement de généralisation, qui dicte la construction même de systèmes de nombres. Ainsi, dans les savoirs à enseigner, l'extension se poursuit en 4e au moment de l'émergence de la règle de multiplication sur les nombres relatifs. Il s'agit d'un autre mouvement de généralisation car la distributivité est alors axiome : la règle est élaborée de façon à ce que la multiplication demeure distributive par rapport à l'addition (construite en 5e). L'extension est alors un enjeu pour la construction d'un nouveau système de nombres, qui englobe les systèmes déjà connus, et dont on cherche à prolonger les propriétés des opérations.[26] Il est intéressant de noter ici une inversion curriculaire par rapport aux savoirs savants, du moins tels qu'ils se sont historiquement constitués. L'analyse épistémologique de Dauriac (2014) montre en particulier que le rapport des objets « calcul algébrique » et « nombres relatifs » s'est aussi inversé dans les savoirs à enseigner. L'étude qu'il mène sur la période du XIXe siècle au travers de deux ouvrages d'enseignement en témoigne : le calcul algébrique est défini comme ensemble d'opérations sur les polynômes, et vit antérieurement à l'introduction des nombres appelés alors « algébriques », l'existence de nombres relatifs étant à cette époque niée. Le qualificatif renvoie à l'utilisation de « quantités négatives » pour la résolution de questions par l'algèbre qui conduisent à étendre les pratiques connues sur les autres nombres et les polynômes. Dans les savoirs à enseigner aujourd'hui, les nombres relatifs apparaissent en amont des polynômes, qui du reste ont disparu des programmes. Ce mouvement de généralisation des propriétés des opérations sur d'anciens systèmes de nombres aux nouveaux en construction, peut interroger par rapport à l'extension des interprétations ou des modes de constructions de ces anciens nombres reposant sur les grandeurs et leurs mesures. Dans le cas des nombres relatifs, il y a une rupture, qui a été un obstacle historique majeur (Glaeser 1981, Dauriac 2014), et qui peut alors poser difficulté vis-à-vis des changements de cadres tels qu'ils peuvent exister dans l'enseignement (géométrique / numérique) : comment les articuler avec ce mouvement de généralisation ?

Par ailleurs, l'extension se poursuit en 3e avec l'apparition, dans les savoirs à enseigner, des « racines carrées », c'est-à-dire de certains nombres irrationnels, et d'une certaine manière, des nombres réels plus généralement (cet ensemble de nombres n'étant pas objet d'étude).

Ce double mouvement de généralisation est-il dès lors pris en compte dans les savoirs enseignés ? Comment les difficultés évoquées quant à l'organisation des savoirs à enseigner sont-elles surmontées ? Le second chapitre de notre thèse s'attachera à analyser également de ce point de vue les savoirs enseignés.

1.5.4 Généralisation du côté des polynômes et formalismes nouveaux

On peut également s'interroger sur une extension muette qui paraît émerger en filigrane, à des monômes voire plus généralement à des polynômes. Il s'agit d'une caractéristique du calcul algébrique, qui transparaît dans le curriculum. L'extrait des programmes de 4e que nous avons vu plus haut, demandant de factoriser par un facteur commun de la forme ax ou x^2, pose

---

[26] Notons que le cas des nombres rationnels est quelque peu particulier, et se trouve finalement à l'interface de ces deux mouvements, essentiellement parce qu'ils sont « reconstruits » en tant que nombres en 6e définis comme quotients. Les opérations et leurs propriétés se construisent subtilement à la fois du côté des grandeurs, et du côté de quotients, nous reviendrons précisément sur ce point dans le chapitre suivant s'intéressant à une exploration détaillée des caractères FUG de la distributivité.

cependant la question d'interprétation de cette extension de l'utilisation de la distributivité. Comment, en l'absence de la notion de polynôme, décrire, voire justifier, ce genre de généralisation ? Les travaux de Pilet (2012) montrent que l'extension de l'usage de la distributivité à des monômes, se fait en réalité dès les premiers apprentissages, sans toutefois faire l'objet de réel travail, les manuels les introduisant comme pratiques transparentes. Les analyses de Ferraton et Chaachoua (2013) concordent également pour montrer le peu de techniques exposées dans les manuels concernant les types de tâches à propos des monômes. Nous allons y revenir, après avoir fait le point sur une certaine organisation des savoirs à enseigner sur la distributivité qui a émergé des parties précédentes. Cette organisation fondée sur les aspects généralisateur, unificateur et formalisateur de la notion peut être schématisée de la façon suivante :

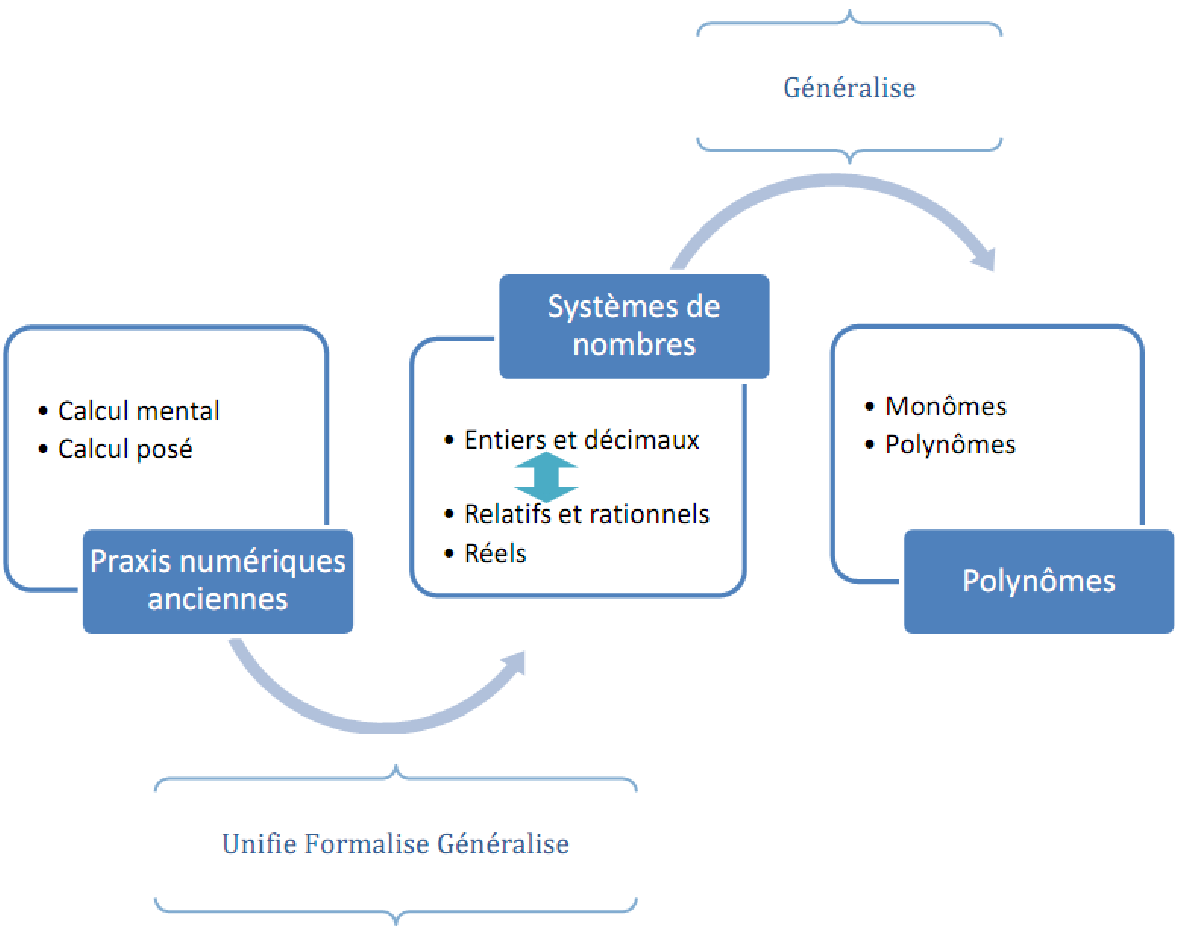


Figure 1.5 – schéma général d'une organisation possible des savoirs à enseigner autour de la distributivité

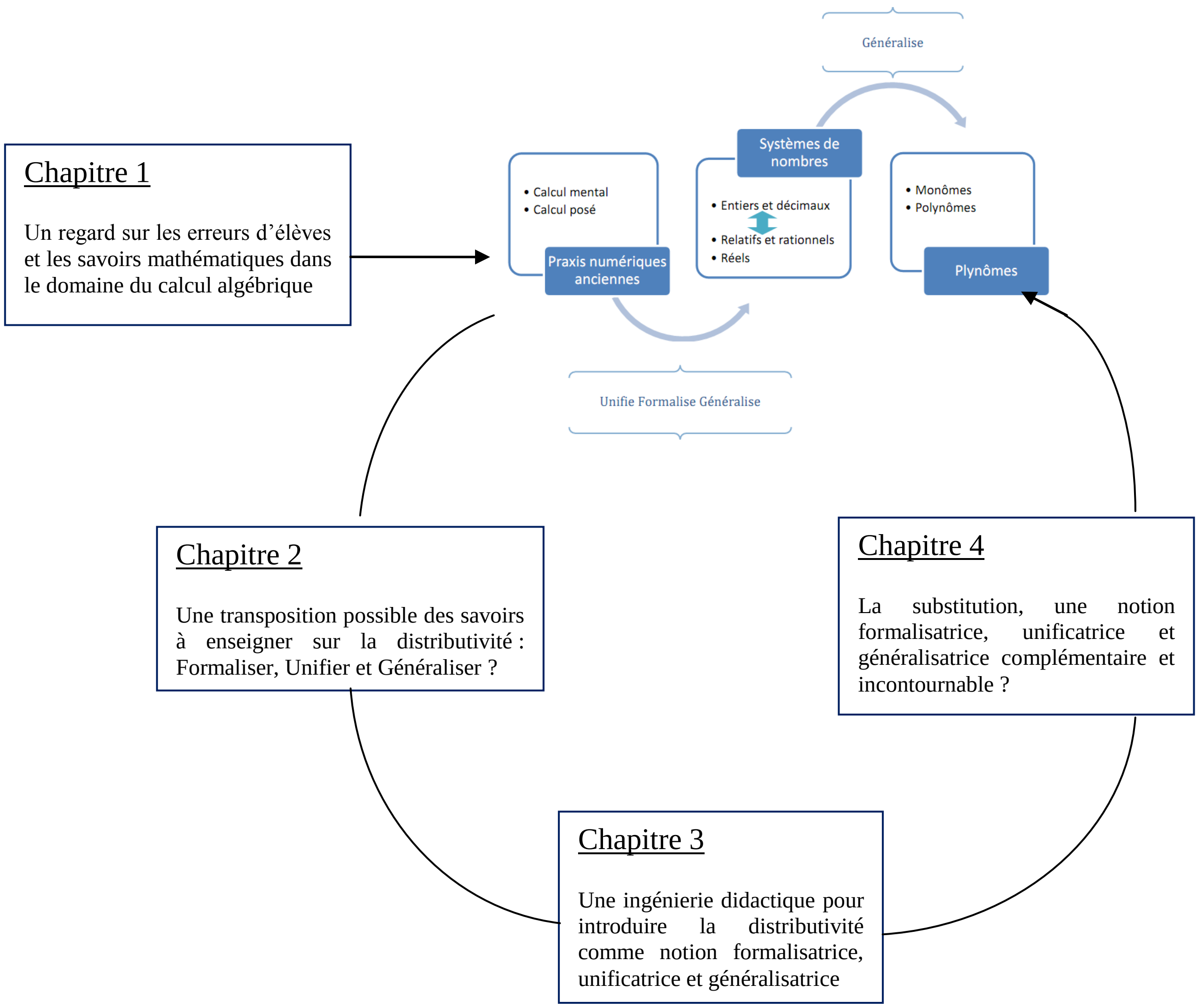
La distributivité émerge comme unificatrice de praxis numériques anciennes de calcul mental et posé sur des entiers, qu'elle unifie et formalise en s'en constituant comme technologie, avant de généraliser les propriétés des opérations connues sur certains ensembles de nombres, dans un double mouvement (d'abord admise puis axiome pour des constructions). Les systèmes sont de plus en plus vastes (des entiers aux nombres réels) et son usage s'étend de façon concomitante mais semble-t-il muette, aux polynômes.

Cette extension du côté des polynômes nous semble également à interroger du point de vue des différents formalismes de la distributivité dans les savoirs à enseigner. Les programmes du collège les échelonnent selon les niveaux de classe. Ces formalismes sont avant tout symboliques, ils se présentent sous la forme d'identités algébriques, dont les expressions sont entièrement paramétrées. En 5e, ces formalismes sont nouveaux, et deux écritures sont présentes, $k(a+b)=ka+kb$ et $k(a-b)=ka-kb$. Il y a une distinction entre la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition et à la soustraction, du fait de l'absence de multiplication sur les nombres relatifs (qui comme on l'a vu, se construit en classe de 4e). En 4e, le formalisme, correspond à $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$. Notons toutefois que ce formalisme n'apparaît pas explicitement dans les textes officiels, ceux-ci ne mentionnant que le membre de gauche de l'égalité. Ceci conduit à s'interroger sur la façon dont on peut utiliser le formalisme ancien pour l'étendre, et introduire éventuellement un nouveau formalisme, dit de la « double » distributivité. Est-ce par extension praxémique, ou dans d'autres termes, par extension de la transformation de mouvement ancienne à une somme ? Ou est-ce par substitution, de k, par une somme ? Quoi qu'il en soit, d'autres formalismes sont également introduits en 3e, les identités correspondantes étant désignées comme identités remarquables : $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$, $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, et $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$. Ces trois identités réalisent une sorte de particularisation, pour des formes spécifiques, c'est-à-dire des catégories d'expressions et de sous-expressions singulières, apparentées à des carrés. L'enjeu de ces formalismes (extensions/particularisations) et de leurs usages nous paraît alors porteur pour l'étude à la fois des adaptations des techniques algébriques, mais aussi des transformations de mouvement, dans une dialectique entre les dimensions sémio-linguistique et mathématique. Notons par ailleurs que l'étude que nous en avons faite précédemment nous conduit aussi à envisager un autre formalisme, couplé aux formalismes algébriques, qui serait rhétorique, et dont les programmes ne s'en font pas l'écho.

Des aspects porteurs d'enjeux

Cette première analyse d'ensemble des savoirs de référence des programmes attenants à la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition nous semble donc porteuse d'enjeux véhiculés par les aspects formalisateur, unificateur et généralisateur de la notion. Ces enjeux nous semblent de nature à éclairer les questions relatives à l'enseignement du calcul algébrique prenant en compte les connaissances anciennes, et l'évolution de la notion tout au long de la scolarité obligatoire. L'unification de praxis numériques pré-existantes en primaire nous semble potentiellement pouvoir amorcer une prise en compte de ce que Mercier (1996) et Abou Raad (2006) nomment une technologie du côté de la numération à des fins de soutien du calcul algébrique. L'unification également du côté des praxéologies liées au développement et à la factorisation, nous paraît de plus engager une certaine complexification des praxéologies du calcul algébrique, mais aussi en lien avec le domaine numérique et la dénotation, autour de leur composante technologique idoine : celui de la distributivité. Elle complète dans le même mouvement les praxéologies anciennes, essentiellement réduites à leur composante pratico-technique, de calcul mental et de calcul posé. En cela, ces praxéologies semblent émerger comme milieu disponible pour l'étude en 5e de la distributivité. Quelles sont dès lors les spécificités des connaissances anciennes et les contraintes qu'elles peuvent véhiculer pour se constituer comme un tel milieu ? En outre, la distributivité semble accompagner de façon essentielle les différentes constructions de systèmes de nombres, soit qu'elle se transmette des nombres entiers aux nombres décimaux, en l'admettant a posteriori, soit qu'elle soit axiome, pour l'élaboration même des opérations sur de nouveaux systèmes de nombres, plus vastes, englobant les précédents, comme pour celui des nombres relatifs. La distributivité orchestre donc un double mouvement de généralisation, qui tout en levant le voile de son rôle, semble potentiellement à même de lui conférer une place technologique robuste, dans une dialectique entre numérique et algébrique. La dialectique s'exprime par le fait que, le domaine numérique s'étend *via* la distributivité. En retour, la distributivité est de fait étendue, dans une généralisation de l'usage des formalismes algébriques qui l'accompagnent. Ces formalismes nous semblent également pouvoir se constituer comme enjeu d'étude permettant à la fois d'aborder la question des transformations de mouvement, et des extensions de l'usage de la lettre comme de l'égalité, mais aussi celle des adaptations, du moins dans une certaine mesure (on ne dira jamais tout d'une technique ou de l'ensemble des adaptations possibles). Comment dès lors articuler les différents formalismes qui apparaissent dans les programmes ? Ceux-ci semblent également couplés aux enjeux d'extension, et interrogent alors les systèmes sur lesquels portent les généralisations qui s'effectuent. Qu'en est-il en particulier d'une extension implicite du côté des polynômes qui semble affleurer dans les programmes ? Quoi qu'il en soit, ces extensions de l'usage des formalismes interrogent aussi les propriétés des écritures correspondantes : la substitution n'est-elle pas alors implicitement utilisée, à plusieurs niveaux, c'est-à-dire non pas uniquement pour des systèmes de nombres de plus en plus vastes, mais aussi pour des écritures référant à quelque chose de plus qu'un nombre ? Enfin l'enjeu des constructions des différents systèmes de nombres nous paraît également pouvoir servir de terreau pour un embryon théorique, au fondement des extensions successives, grâce à la théorie de l'addition itérée, dont nous avons déjà mentionné les potentialités pour un « calcul démonstratif ».

Dès lors, nous centrons notre étude plus précisément sur ces caractères FUG de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, pour en explorer plus avant les potentialités, mais aussi les contraintes, à des fins d'enseignement. Ce sera l'objet du second chapitre de cette thèse. Cette étude constituera les fondements pour l'élaboration et l'expérimentation d'une ingénierie, dont nous analyserons, *a priori* et *a posteriori*, les effets potentiel d'un enseignement tourné vers ces spécificités des savoirs à enseigner sur la distributivité, en classe de 5^{e}. Ce sera l'objet de notre troisième chapitre. Enfin, dans un dernier chapitre, nous terminerons notre étude par une exploration plus approfondie de la question des formalismes, et en particulier de la substitution comme prolongement possible de l'expérimentation menée. Le schéma ci-après récapitule ainsi le projet de notre thèse :


Chapitre 1
Un regard sur les erreurs d'élèves et les savoirs mathématiques dans le domaine du calcul algébrique
Généralise
Systèmes de nombres
• Calcul mental
• Calcul posé
Praxis numériques anciennes
• Entiers et décimaux
• Relatifs et rationnels
• Réels
• Monômes
• Polynômes
Plynômes
Unifie Formalise Généralise
Chapitre 2
Une transposition possible des savoirs à enseigner sur la distributivité : Formaliser, Unifier et Généraliser ?
Chapitre 4
La substitution, une notion formalisatrice, unificatrice et généralisatrice complémentaire et incontournable ?
Chapitre 3
Une ingénierie didactique pour introduire la distributivité comme notion formalisatrice, unificatrice et généralisatrice

Chapitre 2

Une transposition possible des savoirs à enseigner sur la distributivité : Formaliser, Unifier et Généraliser ?

INTRODUCTION

Dans la continuité du chapitre précédent, nous nous nous intéressons aux aspects Formalisateurs Unificateurs et Généralisateurs[27] de la distributivité. Nous avons d'ores et déjà identifié de façon globale certains de ces aspects dans les savoirs à enseigner sur la distrbutivité et étudié de manière théorique les potentialités en termes d'enjeux d'enseignement à même d'en résulter.

Dans une première partie, nous menons une étude de la transposition didactique des savoirs à enseigner tout au long de la scolarité obligatoire, fondée par le propos théorique tenu dans le chapitre précédent. Cette étude s'appuie sur des analyses de manuels de la fin de primaire à la fin du collège. Il s'agit de mettre en exergue, plus précisément, les caractères formalisateur, unificateur et généralisateur des savoirs à enseigner à propos de la distributivité. Dans quelle mesure ces savoirs présentent-ils véritablement ces spécificités ? Sont-ils organisés autour de ces enjeux d'unification, de généralisation ou de formalisation ? Ou du moins, peuvent-ils se constituer en tant que tels ? Afin de dégager des éléments de réponses à ces questions, nous approfondissons, en plusieurs temps, l'étude des programmes amorcée au chapitre précédent, en la complétant par des analyses de manuels. Précisons dès à présent que ces analyses poursuivent un double objectif : celui de déterminer à la fois des possibilités, et des incomplétudes éventuelles, dans les savoirs à enseigner, du point de vue de leurs aspects formalisateur, unificateur et généralisateur.

Dans une seconde partie, nous nous centrons sur un moment particulier où les caractères formalisateur, unificateur et généralisateur de ces savoirs semblent pouvoir émerger dans l'enseignement : celui de l'introduction officielle de la distributivité, en 5^{e}. Ce choix est issu des résultats de l'analyse globale que nous avons menée au chapitre précédent. C'est à ce niveau de classe que peuvent se construire l'unification de praxis numériques anciennes de calcul, et les premières généralisations (des nombres entiers aux nombres décimaux) dans la dialectique numérico-algébrique particulière que nous avons envisagée. C'est également alors que de nouveaux formalismes émergent. Cette focale nous permet de plus, de préciser les conditions et les contraintes d'un tel enseignement, et par suite, de l'ingénierie centrée sur l'introduction de la distributivité qui sera l'objet de notre troisième chapitre. Ces conditions et contraintes sont portées tout d'abord par les spécificités des praxis anciennes préexistantes engageant la propriété de distributivité dans le domaine numérique. Elles sont ensuite liées aux incomplétudes que donnent à voir des tentatives de manuels, où les caractères FUG affleurent pourtant.

Dans une dernière partie, nous étudions les conditions et les contraintes relatives au discours susceptible d'accompagner un tel enseignement dans les classes. Cette étude se fonde sur des entretiens menés auprès de quatre enseignants de collège qui montrent une certaine sensibilité à ces aspects de la notion au moment de son introduction, voire, pour l'un d'entre eux, un projet d'enseignement fondé par ceux-ci.

[27] Nous utiliserons parfois l'acronyme FUG pour formalisateur, unificateur et généralisateur.

2.1 DES ASPECTS FORMALISATEUR, UNIFICATEUR ET GENERALISATEUR QUI AFFLEURENT DANS LES SAVOIRS A ENSEIGNER

Cette partie vise à étudier l'ensemble des programmes du primaire et du collège, pour caractériser les savoirs à enseigner relatifs à la propriété de distributivité et les rapports entre des savoirs anciens et nouveaux quant aux aspects formalisateur, unificateur et généralisateur de ces savoirs. Nous considérons plus particulièrement les relations entre des savoirs numériques et algébriques, afin de préciser d'éventuelles généralisations, unifications et formalisations rendues possibles, voire représentées dans les programmes et les manuels.

Nous nous appuyons donc sur des extraits de manuels issus de collections diverses : Outils pour les maths, Euromath et Capmath pour le primaire, et Prisme, Triangle, Sésamath, Transmath et Phare pour le collège. Les éditions correspondent aux programmes parus au Bulletin Officiel Spécial n° 6 du 28 août 2008 en vigueur actuellement. Cette diversité n'a pas pour objet d'effectuer des analyses comparatives, ou exhaustives de l'existant, mais de pouvoir pister différents possibles quant aux caractères FUG des savoirs enseignés sur la distributivité. Les extraits étudiés sont choisis parfois isolément dans un manuel ou dans un autre. Il s'agit d'éclairer en quoi et comment les savoirs enseignés peuvent plus ou moins présenter des aspects FUG. Nous complétons ponctuellement notre analyse par des éléments plus quantitatifs, de manière à déterminer la représentativité de certaines organisations du savoir à enseigner. Les résultats de l'étude menée par Assude, Coppé, Pressiat (2012) viendront également enrichir nos propres analyses. Ces dernières nous permettront de montrer en quoi et comment des aspects FUG des savoirs à enseigner sur la distributivité affleurent au sein du curriculum actuel (du CM_2 à la sixième). En cela, l'on pourrait considérer cette étude comme une reconstruction théorique d'un modèle épistémologique en arrière-plan des savoirs à enseigner depuis le primaire jusqu'à la fin de collège. Toutefois, comme nous le verrons par la suite, cette organisation des savoirs à enseigner n'est pas assumée, et présente de nombreuses incomplétudes.

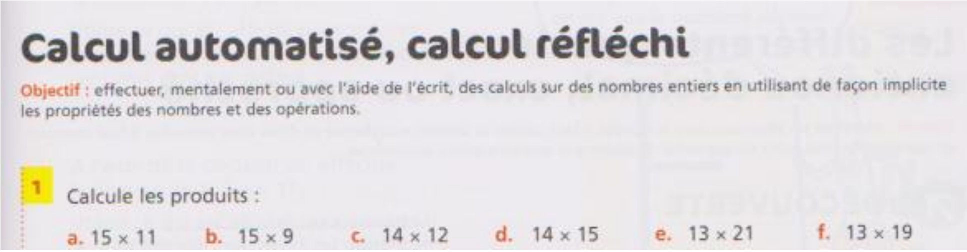
2.1.1 Unification de praxis numériques anciennes : calcul mental et calcul posé

Une notion ancienne utilisée en acte

Dans les programmes actuels la distributivité devient un objet d'enseignement officiel en classe de 5^e au collège. Elle vit pourtant de manière implicite dans les programmes des classes antérieures, du primaire et en 6^e au collège, outillant un certain nombre de techniques de calcul mental et de calcul posé.

Calcul mental

Ainsi, l'une des techniques permettant d'accomplir le type de tâche de calcul d'un produit de deux nombres entiers mentalement, consiste à décomposer l'un des facteurs en somme ou en différence, puis à calculer la somme ou la différence des produits partiels du second facteur par chacun des termes. L'extrait suivant du manuel EuroMaths CM_2, permet d'observer des spécimens relevant potentiellement de ce bloc praxique :



Calcul automatisé, calcul réfléchi

Objectif : effectuer, mentalement ou avec l'aide de l'écrit, des calculs sur des nombres entiers en utilisant de façon implicite les propriétés des nombres et des opérations.

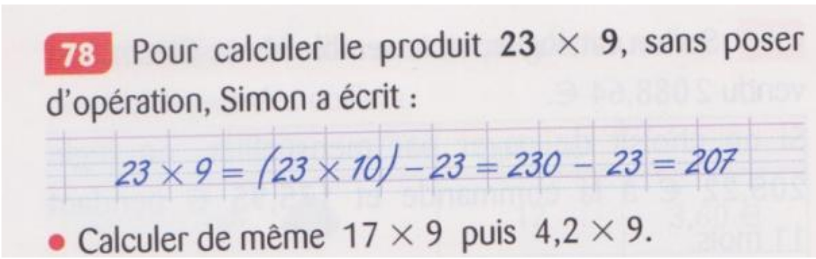
1 Calcule les produits :

a. 15 × 11 b. 15 × 9 c. 14 × 12 d. 14 × 15 e. 13 × 21 f. 13 × 19

Figure 2.1 - EuroMaths CM_2 2009 p. 185

On peut envisager par exemple pour calculer 14×12 d'effectuer les produits 14×10 et 14×2 avant d'en ajouter les résultats. De telles descriptions apparaissent dans le document ressources intitulé Le nombre au cycle 3, Apprentissages numériques, associé aux programmes de l'école primaire[28]. Elles attestent de l'utilisation en acte attendue par les programmes, de la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

De la même façon, pour le produit 13×19, une technique possible consiste à calculer 13×20 puis 13×1 pour ensuite soustraire les résultats. On pourrait donc conclure à l'utilisation en acte de la distributivité de la multiplication par rapport à la soustraction. Pourtant, la technique consistant à soustraire 13 au produit 13×20 semble plutôt être celle qui est attendue, ce qui n'engage pas tout à fait l'utilisation de la distributivité en acte, mais plutôt la définition de la multiplication par addition itérée. Cette hypothèse semble confortée par l'absence, en calcul mental, dans le manuel EuroMaths, de produits par un nombre dont le complément à la dizaine supérieure soit différent de 1, et strictement supérieur à 5, comme 15×18. Dans ce cas en effet, l'on pourrait être conduit à utiliser la distributivité de la multiplication par rapport à la soustraction dans un souci d'économie, plutôt que par rapport à l'addition, et plutôt que par rapport à l'addition itérée dont on aurait à effectuer deux, trois ou quatre soustractions. Ainsi pour calculer 15×18, la technique consistant à calculer $15 \times 20 - 15 \times 2$ pourrait d'autant plus être envisagée, qu'elle pourrait être plus efficace ou moins coûteuse que $15 \times 10 + 15 \times 8$ ou $15 \times 20 - 15 - 15$. Cependant de tels spécimens n'apparaissent pas dans le manuel EuroMaths CM_2. C'est-à-dire que la place occupée implicitement par la distributivité pour les pratiques anciennes de calcul mental de produits, peut être, dans les classes, réduite. Cela ne signifie pas qu'elle n'existe pas pour autant. Nous y reviendrons plus précisément dans la partie suivante. Cependant, de la même manière que pour le calcul précédent 13×19, les manuels de 6^e peuvent montrer des explicitations de techniques shuntant la distributivité –qui, du reste n'est ni nécessaire, ni plus efficace selon les calculs- :



78 Pour calculer le produit **23 × 9**, sans poser d'opération, Simon a écrit :

$23 \times 9 = (23 \times 10) - 23 = 230 - 23 = 207$

• Calculer de même 17 × 9 puis 4,2 × 9.

Figure 2.2 – Phare 6^e (2014) p.69

[28] Nous analyserons plus en détail les spécificités des techniques et des technologies à l'œuvre dans la partie consacrée à l'étude des praxéologies construites en primaire. Nous ne soulevons ici que l'existence de telles techniques, non leur unicité.

L'étude du contenu de ce manuel de 6^e montre peu d'utilisation en acte de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition en calcul mental. En effet, dans le chapitre consacré aux multiplications, 24 exercices sont spécifiquement consacrés à du calcul mental de produits. Parmi ces 24 exercices, les quatre qui pourraient reposer sur cette technologie, sont précédés d'une technique, comme nous venons de le voir, qui repose plutôt sur l'addition itérée. Les exercices suivent celui que nous venons de voir, et demandent de multiplier des nombres par 11, par 21 ou par 19. Les vingt autres exercices sont plutôt centrés sur des technologies liées à la numération avec des produits par des puissances de 10, ou à la commutativité et l'associativité de la multiplication pour des produits de plus de deux facteurs. Ainsi demeurent deux spécimens seulement qui permettent d'envisager l'utilisation en acte de la distributivité : le produit de 12 par 5 qui peut s'effectuer via la somme $5\times10 + 5\times2$ (mais on peut s'en affranchir en calculant la moitié de 12×10), ou le produit de 1,1 par 8 que l'on peut effectuer par la somme $8\times1 + 8\times0{,}1$. Quoi qu'il en soit, la place de l'utilisation de la distributivité dans le calcul mental pour ce manuel est extrêmement réduite, voire inexistante. Ce n'est pour autant pas ce que l'on observe dans tous les manuels de 6^e. Ainsi le manuel Transmath de 6^e (édition 2013) propose-t-il 19 exercices consacrés à du calcul mental de produits, dans le chapitre nommé Multiplication. Parmi ceux-ci, cinq exercices peuvent occasionner l'utilisation implicite de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition ou à la soustraction. On peut y voir en particulier des produits comme 35×12 qui sont du même type que ceux que l'on peut trouver dans les manuels de primaire (un produit de deux nombres entiers, dont le second facteur se décompose sous la forme d'une somme dont les termes sont des nombres dont les multiples sont aisément accessibles mentalement – produits par 2, par 10 ici-). Les deux manuels de 6^e donnent à voir des savoirs à enseigner différents. Ceci est en accord avec le caractère implicite de l'utilisation de la distributivité, dans le sens où elle n'apparaît pas explicitement dans les programmes afférents. Cet élément technologique est pourtant mentionné dans les documents d'accompagnement, mais il ne constitue pas un savoir à enseigner officiel. On peut donc supposer que son existence et le nombre d'occasions d'emploi pour le calcul mental, peuvent s'avérer très différents d'une classe à l'autre, selon les pratiques enseignantes.

En revanche, une autre technique de calcul de produits utilise de façon certaine la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et ce, en primaire comme en 6^e : c'est celle du calcul posé du produit de deux nombres entiers, telle qu'elle est construite en primaire et présentée dans les manuels.

Calcul posé

Le manuel EuroMaths de CM_2 donne à voir les traces des produits partiels, issus de cette utilisation en acte de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition :

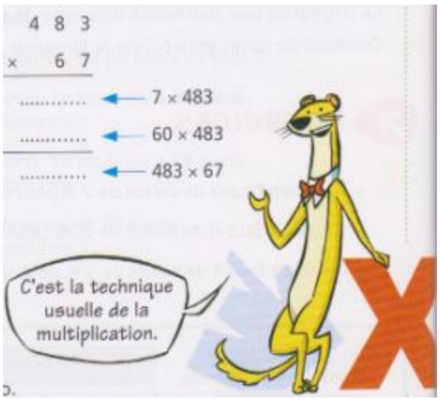


Figure 2.3 – EuroMaths CM_2 (2009) p. 24

La technique ici, consiste à effectuer le programme de calcul 483×7 + 483×60 qui repose bien sur l'égalité instanciée de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition $483 \times (7 + 60) = 483 \times 7 + 483 \times 60$. On pourrait cependant envisager que la technique puisse reposer sur une certaine complexification de la technologie avec des propriétés de la numération décimale de position susceptibles d'engendrer des descriptions de techniques fondées sur les chiffres, et implicitement une utilisation, par exemple, d'une égalité que l'on pourrait formaliser de la manière suivante : $(3 + 80 + 400) \times (7 + 60) = [3 \times 7 + (8 \times 7) \times 10 + (4 \times 7) \times 100] + [3 \times 6 + (8 \times 6) \times 10 + (4 \times 6) \times 100] \times 10$. Mais l'écriture des produits partiels suggère plutôt que la technologie se situe bel et bien du côté d'une utilisation implicite de la distributivité simple, et permet d'insister sur cette interprétation (et cette formalisation) du *logos* soutenant la technique. On retrouve aussi les écritures des produits partiels pour les calculs posés, de la même façon, dans le manuel CapMaths de CM_2.

Néanmoins, la distributivité semble avoir une place plus restreinte en 6^e par rapport au primaire, pour soutenir les techniques de calcul posé de produits. Car les spécimens présents dans les manuels relèvent essentiellement de produits de nombres décimaux non entiers, et les discours technologiques se centrent davantage sur les éléments liés à la numération. Ainsi peut-on comparer les parties consacrées à l'institutionnalisation de la technique de calcul posé de différents manuels de 6^e. Tout d'abord, le manuel Transmath (édition 2013) fait apparaître les produits partiels, et combine la distributivité avec les propriétés de l'écriture décimale de position (et des conversions) :

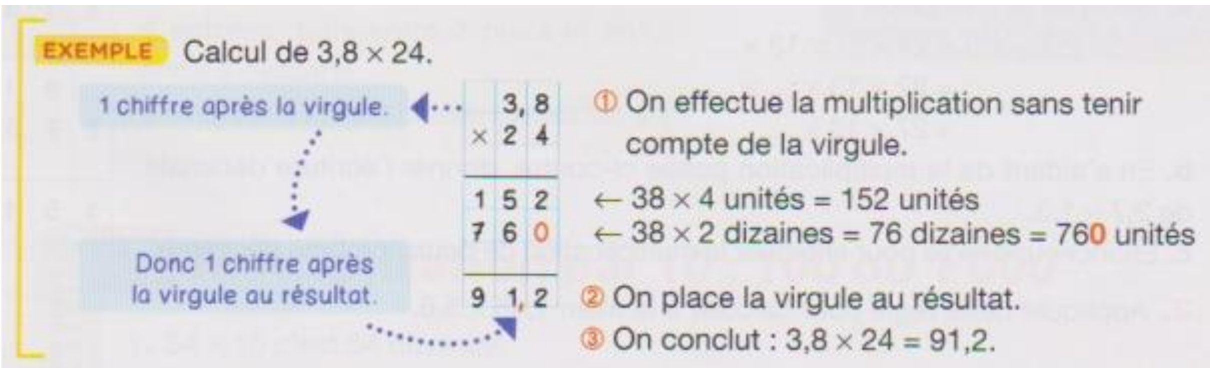


Figure 2.4 – Transmath 6^e (2013) p. 52

Pour chaque ligne, les produits partiels indiqués, 38×4 et 38×20, correspondent à l'utilisation en acte de la distributivité. Mais les formalismes choisis insistent sur la technologie de la numération. Ainsi 20 est réinterprété sous la forme 2 dizaines, de sorte que le produit effectué est celui de 38 par 2 dont on recompose le nombre 760 en tenant compte de la valeur de 2. Plus encore, l'insistance sur la virgule dans la description de la technique (tout comme la couleur rouge pour l'écriture du 0) confirme l'importance accordée à la numération et de façon concomitante, l'affaissement de la place de la distributivité.

Les manuels Triangle (édition 2010) et Phare (édition 2014) de 6^{e} ne montrent quant à eux aucune explicitation des produits partiels, et choisissent un formalisme qui tend, à notre sens, à masquer plus encore l'utilisation implicite de la distributivité par l'utilisation de points en lieu et place des zéros, pour l'écriture des résultats des produits partiels.


Exemple : On veut calculer le produit de 37,8 par 2,46.

3 7, 8	1 chiffre après la virgule
× 2, 4 6	2 chiffres après la virgule
2 2 6 8	
+ 1 5 1 2 •	
+ 7 5 6 • •	1 + 2 = 3
9 2 9 8 8	Donc : 3 chiffres après la virgule.

3 7, 8
× 2, 4 6
2 2 6 8
+ 1 5 1 2 •
+ 7 5 6 • •
9 2, 9 8 8

Conclusion : On a ainsi calculé le produit de 37,8 par 2,46 : 37,8 × 2,46 = 92,988.

Figure 2.5 – Phare 6^{e} (2014) p. 62

De sorte que cela puisse faire obstacle à l'interprétation de chaque ligne sous la forme de produit partiel de nombres (plutôt que de chiffres).

Dans un cas comme dans l'autre, la distributivité perd de sa prépondérance technologique en 6^{e} au profit d'éléments technologiques liés à la numération décimale de position. Ce qui s'explique sans doute par le type de nombres sur lequel porte l'essentiel du travail : des nombres décimaux plutôt que seulement des nombres entiers. Mais cela s'explique aussi par une construction curriculaire autour de l'unification qui en réalité n'est pas un enjeu des apprentissages. Et les programmes s'en font l'écho. Les documents d'accompagnement du programme du collège font ainsi référence à cette justification de technique fondée sur les écritures des produits partiels :

> Les techniques de calcul posé de la multiplication de deux entiers et de la division euclidienne ont fait l'objet d'un apprentissage à l'école élémentaire. Toutefois, pour les élèves qui en début de collège ne maîtrisent pas encore la technique de multiplication posée, il convient de travailler d'une part, la maîtrise des tables, et d'autre part, la justification de la technique, en lien avec la numération, comme par exemple en incitant à écrire à côté de chaque étape de la multiplication posée le calcul lui correspondant, ce qui permet de donner du sens au « décalage de rang ». (*Le calcul numérique au collège*, p. 8)

On voit que l'insistance est, comme dans les manuels, du côté de la numération, les produits partiels semblent avoir pour fonction d'éclairer le « décalage de rang » essentiellement, davantage que la décomposition de l'un des facteurs et par suite l'utilisation implicite de la distributivité. Plus encore, il semble que ce travail ne soit destiné qu'à une partie des élèves, ceux qui ne maîtrisent pas la technique. Il semble donc bien que l'on puisse envisager un affaissement de la technologie de la distributivité, même en acte, au travers des textes des programmes.

Il n'en demeure pas moins que la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition ou à la soustraction, lorsqu'elle devient un enjeu explicite d'étude dans les programmes, c'est-à-dire en 5^{e}, est une notion ancienne utilisée en acte. C'est une technologie implicite qui fonctionne dans des praxéologies de calcul posé et de calcul mental de certains produits, ces praxéologies étant essentiellement réduites à leur bloc praxique en primaire comme en 6^{e}. Mais ces deux types de tâches s'opposent par leur nature : le calcul mental exclut *a priori* de poser, y compris dans sa tête, l'objectif étant de développer d'autres techniques spécifiques aux nombres exposés, en lien avec des produits mémorisés, et ce que les programmes nomment la connaissance des nombres. Il s'agit d'une certaine intelligence du calcul qu'on entend développer par là. Ainsi, les tâches sont-elles traitées séparément dans les manuels, et l'organisation didactique et mathématique les cloisonne *a priori*.

Du point de vue des organisations mathématiques à enseigner, la distributivité apparaît donc en 5^{e} comme une notion éminemment unificatrice, bien qu'elle ne soit pas désignée comme telle. Elle permet en effet de compléter ces *praxis* numériques anciennes en justifiant les techniques et dans le même mouvement, de les unifier, ou dit autrement, d'agréger des organisations mathématiques ponctuelles en une organisation mathématique locale de calcul de produits, unifiées par une même technologie, et par les techniques afférentes s'y adossant.

Pourtant, si les programmes laissent entrevoir cette unification, les différentes interprétations que donnent à voir les manuels suggèrent que puissent exister, en l'absence d'une construction dans ce sens, un certain nombre d'incomplétudes voire de ruptures dans le curriculum en 6^{e} par rapport aux constructions du primaire. Ainsi observe-t-on une certaine diversité dans la place occupée par le type de tâche de calcul mental de produits reposant sur la distributivité dans les manuels de 6^{e}. Quant au calcul posé, si les techniques sont effectivement encore à l'étude dans cette classe, la distributivité est d'autant plus masquée que les éléments technologiques liés à la numération décimale prennent le pas dans les justifications.

2.1.2 Unification des types de tâches de développement et de factorisation ?

Du point de vue des organisations mathématiques de la 5^{e} à la 3^{e}, la distributivité unifie par ailleurs deux autres types de tâche ou plus exactement deux autres genres de tâche, développer et factoriser, notés $T_{Dév}$ et T_{Fact}, à la fois dans le domaine numérique et dans le domaine algébrique. Nous parlons d'unification car ces genres de tâches apparaissent en réalité cloisonnés dans l'existant.

Des types de tâches cloisonnés dans les manuels

L'étude de manuels de 5^{e}, menée par Assude, Coppé, Pressiat (2012) met à jour une contre-unification dans l'organisation du texte du savoir, comme dans les exercices, entre les types de tâche consistant à développer ou à factoriser une expression littérale donnée :

> Ces deux types de tâche sont séparés, la distributivité pouvant être spécifiée selon chacun. Ceci contribue selon nous, à accentuer l'atomisation des tâches.

> Une grande insistance est portée sur la forme des expressions. Ainsi, on explicite les techniques par l'idée de « transformation d'écriture » plutôt que par l'application de la propriété (comme on l'a vu pour réduire). Par exemple, « Pour développer une expression, on transforme une somme en produit » ou bien « Développer une expression, c'est l'écrire comme une somme algébrique ».
>
> Il en résulte que la propriété de distributivité perd de sa prépondérance technologique pour justifier et valider les calculs. Il y a donc un risque que les élèves ne l'utilisent pas et se rabattent sur des techniques portant sur les transformations d'écritures exclusivement basées sur des ostensifs, avec des critères de vérification peu opérationnels portant sur la forme des expressions. Assude, Coppé, Pressiat (2012) p. 55

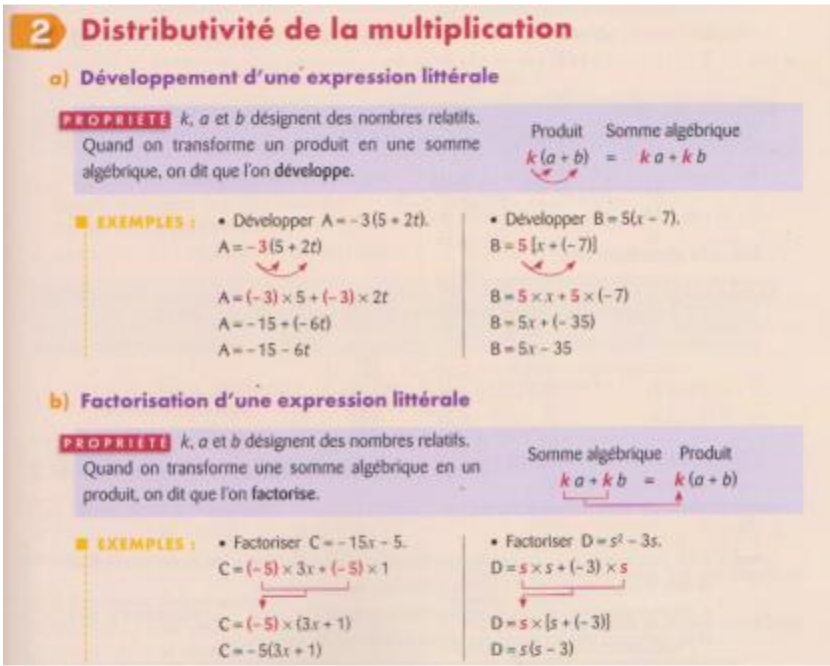
A titre d'illustration, une analyse rapide des parties institutionnalisant les techniques de calcul algébrique dans quatre collections tout au long du collège montre que les deux types de tâches sont séparés, y compris pour des éditions éventuellement plus récentes (2013 et 2014).

	PHARE			TRIANGLE			TRANSMATH			SESAMATH		
	5e	4e	3e	5e	4e	3e	5e	4e	3e	5e	4e	3e
Parties "Cours"												
Séparation en deux paragraphes	✓	✓			✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Propriété spécifiée pour $T_{Dév}$ et T_{fact}	✓	✓	±	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

Figure 2.6 – Séparation des types de tâches de développement et factorisation dans les manuels de la 5e à la 3e [29]

L'exposition des connaissances sépare en deux paragraphes distincts « Développement » et « Factorisation », et pour chacun, la propriété sous forme symbolique algébrique est réécrite dans le sens de lecture de gauche à droite, avant de donner des exemples. Le nom même de la propriété de distributivité peut n'apparaître que dans le titre de la partie consacrée à ces paragraphes, mais le peu de discours accompagnant les techniques n'en fait plus mention, de sorte que les pratiques sont centrées sur des manipulations ostensives soutenues par des reconnaissances de formes appuyées par des mises en couleur à l'instar de l'extrait suivant :

[29] Le manuel Phare de 3e propose les identités remarquables dans un seul sens (le sens du développement) dans l'encadré servant de technologie mais les réécrit par la suite dans le sens voulu pour les exemples de développements et de factorisations et ce, dans le même paragraphe, c'est la signification à donner à l'inscription ± dans le tableau.



2 Distributivité de la multiplication

a) Développement d'une expression littérale

PROPRIÉTÉ k, a et b désignent des nombres relatifs. Quand on transforme un produit en une somme algébrique, on dit que l'on **développe**.

Produit Somme algébrique
$k(a+b) = ka + kb$

EXEMPLES :
• Développer $A = -3(5 + 2t)$.
$A = -3(5 + 2t)$
$A = (-3) \times 5 + (-3) \times 2t$
$A = -15 + (-6t)$
$A = -15 - 6t$

• Développer $B = 5(x - 7)$.
$B = 5[x + (-7)]$
$B = 5 \times x + 5 \times (-7)$
$B = 5x + (-35)$
$B = 5x - 35$

b) Factorisation d'une expression littérale

PROPRIÉTÉ k, a et b désignent des nombres relatifs. Quand on transforme une somme algébrique en un produit, on dit que l'on **factorise**.

Somme algébrique Produit
$ka + kb = k(a+b)$

EXEMPLES :
• Factoriser $C = -15x - 5$.
$C = (-5) \times 3x + (-5) \times 1$
$C = (-5) \times (3x + 1)$
$C = -5(3x + 1)$

• Factoriser $D = s^2 - 3s$.
$D = s \times s + (-3) \times s$
$D = s \times [s + (-3)]$
$D = s(s - 3)$

Figure 2.7 – Phare 4e (2011) Cours p. 65

Ce cloisonnement peut de plus être renforcé par les consignes des exercices. Ainsi, dans le manuel Transmath de 5e par exemple, il est demandé soit d'effectuer des développements soit des factorisations mais à aucun moment un exercice technique ne les unifie, c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'occasion d'accomplir l'un ou l'autre. On peut pourtant trouver de tels exercices dans certains manuels, de façon très marginale. Ainsi le manuel Sésamath de 5e en propose-t-il un dans le premier chapitre où la distributivité apparaît dans le domaine numérique :

51 Recopie et complète ces égalités.

a. $7 \times (23 + 6) = 7 \times \ldots + 7 \times \ldots$

b. $(45 - 31) \times 5 = \ldots \times 5 - 31 \times \ldots$

c. $1{,}2 \times 7 + 1{,}2 \times 11 = \ldots \times (7 + \ldots)$

d. $3 \times 1{,}4 - 3 \times 0{,}8 = (1{,}4 \ldots 0{,}8) \ldots 3$

Figure 2.8 – Sésamath 5e p. 23

Cet exercice propose en effet deux écritures à produire dans le sens du développement, puis deux écritures dans le sens de la factorisation. Notons que le travail, fortement guidé, ne porte que sur les écritures (il n'y a pas de fonctionnalité pour un calcul par exemple, ni de justification attendue), ce qui peut renforcer finalement le découplage entre la propriété mathématique sous-jacente et les transformations de mouvements qu'elle pourrait unifier.

Plus encore, pour ce manuel, dans le chapitre consacré aux écritures littérales, aucun exercice de travail de technique relevant de la distributivité ne conjuguera les deux types de tâches. Les consignes les isolent en demandant soit de développer, soit de factoriser, soit de simplifier (de ce point de vue la question de la disjonction avec la factorisation peut aussi interroger, en particulier en 5e : Assude, Coppé et Pressiat (2012) montrent qu'« aucune technique et encore moins de technologie n'étayent cette définition, on se contente de montrer la forme finale, sans critères permettant le contrôle»).

Pourtant, dans le manuel Triangle de 5e (2010), apparaît une consigne peu ordinaire mettant l'accent sur la technologie : « Utiliser la distributivité pour transformer les expressions proposées ». Cette consigne concerne deux exercices. Mais l'un ne propose que des expressions permettant de factoriser, et l'autre ne montre que des expressions à développer. La séparation a de fait lieu malgré tout. Quant aux deux exercices suivants, la consigne est modifiée en « Utilise si possible la distributivité » ou « Parmi les expressions, quelles sont celles pouvant se transformer en utilisant la distributivité ? ». Les expressions proposées peuvent alors correspondre au développement ou à la factorisation, mais aussi ni à l'un ni à l'autre, comme $4 \times a + 5 \times b$ où le facteur commun serait à discuter selon que $a = b$, ou $8 + (a + b)$, dont l'échange des signes + et × laisse penser que le travail visé porte sur des reconnaissances de formes plutôt que sur une unification des types de tâches de développement et de factorisation d'expressions littérales. Le cloisonnement par ailleurs sera patent au moment du calcul mental dans ce manuel où les exercices ne proposent pas de mêler des expressions numériques relevant de l'un ou l'autre.

Les programmes de 5e pourtant regroupent dans un même thème d'étude intitulé « Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition », les deux « sens d'utilisation » de l'égalité sans spécification des écritures :

Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.	- Sur des exemples numériques, utiliser les égalités $k(a+b) = ka + kb$ et $k(a-b) = ka - kb$ dans les deux sens. - * *Sur des exemples littéraux, utiliser les égalités* $k(a+b) = ka + kb$ *et* $k(a-b) = ka - kb$ *dans les deux sens.*

Figure 2.9 – Programme de l'enseignement de mathématiques p. 21

Cette volonté d'unification que l'on peut y voir ne transparaît pas dans les interprétations qu'en font les manuels du point de vue des types de tâches du développement et de la factorisation.

Par ailleurs, Assude, Coppé, Pressiat (2012) montrent comment les programmes du collège organisent un découpage technologique des techniques du calcul algébrique de la 5e à la 3e qui peut faire obstacle à l'unification envisagée des types de tâches. En effet, la distributivité en 5e est « simple », puis « double » en 4e, et en 3e les identités remarquables complètent les technologies. Du point de vue des types de tâches afférents, il y a une rupture en 4e : la double distributivité ne servira jamais qu'au développement et non à la factorisation. De sorte que l'on puisse supposer que l'unification des genres de tâches $T_{Dév}$ et T_{Fact} ne soit que parcellaire en raison notamment de cette multiplicité des formes technologiques qui ne soutiennent pas toutes les deux genres de tâches.

Ceci se traduit aussi au moment des liens entre ces formes différentes. C'est-à-dire que lorsque les nouvelles formes de la technologie émergent (les écritures symboliques algébriques changent de la distributivité simple à la distributivité double), la démonstration de la double distributivité, à partir de la simple distributivité, n'est faite que dans le sens du développement. De la même façon, pour les identités remarquables en 3e, la démonstration dans le sens de la factorisation n'apparaît pas dans les manuels des collections analysées. Ceci fait écho aux conséquences possibles que nous avons vues dans la première partie de cette thèse. Abou Raad (2009) montrait un manque de calcul démonstratif pour des élèves qui, jusqu'en terminale ne parvenaient pas à reconstruire la transformation première fondée sur l'égalité $2ab = ab + ab$ pour effectuer, à la suite, une factorisation, et ainsi démontrer l'identité remarquable dans le sens d'écriture suivant : $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$.

Une autre conséquence du morcellement technologique du calcul algébrique entre les différentes classes du collège se situe dans le travail des techniques de factorisation qui risque d'être amoindri au profit de celles du développement au moment de la 4e. Ainsi, si les manuels Transmath et Phare de 4e accordent une certaine place à un retour sur des factorisations comme celles qu'on peut rencontrer en 5e, y compris pour démontrer des propriétés sur les nombres (comme prouver qu'un programme de calcul donne des multiples de 5), le manuel Triangle de 4e en revanche, ne propose que des exercices de « réduction » ou de « développement ». La partie exercices de ce manuel est en effet structurée en quatre rubriques intitulées : « Réduire une expression littérale », « Développer avec la distributivité », « Développer avec la double distributivité » et « Résoudre des problèmes ». L'ensemble des exercices de cette dernière partie où apparaissent des genres de tâches de preuve, peuvent se résoudre par des développements. Deux exercices demandent d'effectuer des factorisations néanmoins : il s'agit de compléter les écritures : $6x^2 + 23x + 20 = (\dots x + \cdots)(\dots x + \cdots)$ pour le premier exercice, et $48x^2 + 8x - 8 = (\dots x + \cdots)(\dots x + \cdots)$ pour le second. Ces exercices sont cependant dans une dernière rubrique « Recherche et créativité », de sorte que nous ne pensons pas que la technologie sur laquelle s'appuyer soit la double distributivité de la multiplication par rapport à l'addition dans le sens de la factorisation, compte tenu aussi de la réduction (il n'y a plus que 3 termes au lieu de 4 ce qui complique les identifications), mais plutôt des essais erreurs sur les coefficients, et contrôle par développements.

Il apparaît donc que, même si la distributivité du point de vue des organisations mathématiques revêt un caractère unificateur pour les types de tâches de développement et de factorisation d'expressions algébriques, ces types de tâches sont, en l'état, traités de façon fragmentée par les manuels, et les formes différentes de la technologie apparaissant dans différentes classes au collège accentuent le phénomène. Même si certains manuels tentent des retours en 4e sur la distributivité comme on la voit en 5e, ce n'est pas le cas de tous, de sorte que l'on peut supposer que les pratiques dans les classes pourront être assez diverses. Lorsque c'est du reste le cas, les parties « cours » cloisonnent tout de même les types de tâche, voire même les technologies (simple et double distributivité font par exemple l'objet de paragraphes distincts dans le manuel Transmath de 4e). Cette unification se heurte sans doute aux rencontres morcelées d'année en année des différentes formes de la technologie organisées par le programme. L'exploration de quelques manuels semble de ce point de vue confirmer les résultats des analyses de l'étude menée par Assude, Coppé, Pressiat (2012).

Plus encore nous pensons que les types de tâches $T_{Dév}$ et T_{Fact} peuvent être d'autant plus cloisonnés que leur représentativité dans les types de tâches de preuve est dissymétrique, T_{Fact} pouvant être absent comme dans le manuel Triangle, c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'exercices où la factorisation soit nécessaire pour aboutir à la démonstration demandée par l'énoncé. Ainsi pour prouver que deux expressions sont égales (correspondant à deux programmes de calcul dont on demande d'éprouver l'équivalence au préalable), T_{Fact} engage des reconnaissances de forme (avec des signes opposés éventuellement) qui rendent la technique plus ardue que $T_{Dév,}$ voire peu envisageable lorsque le développement repose sur la double distributivité. Nous supposons donc, que lorsque le choix existe, $T_{Dév}$ doit être plus présente dans les pratiques. En revanche, lorsque la preuve repose sur des propriétés de nombres, la factorisation devient nécessaire (à moins de conjecturer l'expression du programme de calcul équivalent y amenant à partir d'une exploration numérique par exemple). Ainsi trouve-t-on des exercices dans le manuel Transmath dont les énoncés sont par exemple : « La somme de deux multiples quelconques de 5 est-elle un multiple de 5 ? » ou « Le produit de deux nombres impairs quelconques est-il un nombre impair ? Justifier ». Ce dernier est particulièrement intéressant parce qu'il engage à la fois un développement et à la suite, une factorisation, sur une partie de l'expression développée, pour aboutir à la forme voulue (l'écriture d'un nombre impair). En effet, si n et n' désignent deux nombres entiers naturels, on peut envisager la suite d'égalités suivante pour la preuve : $(2n+1)(2n'+1) = 4nn' + 2n + 2n' + 1 = 2(2nn' + n + n') + 1$. Mais ce genre d'exercices est peu représenté : trois exercices seulement dans le chapitre consacré au calcul littéral, nécessitent une factorisation pour aboutir à la preuve cherchée. La dissymétrie s'exprime aussi au moment du passage en 3^{e} où les factorisations seront un enjeu plus fort, pour résoudre des équations du second degré pouvant se ramener à des équations « produit nul ».

Programmes et manuels donnent ainsi à voir une certaine séparation dans les types de tâches relevant du développement et de la factorisation. Cette séparation s'exprime à la fois par une dissociation dans les phases d'institutionnalisation avec des spécifications symboliques, et par un déséquilibre qui peut exister en 4^{e} dans les nombres de spécimens relevant de l'un ou de l'autre. Ce phénomène peut s'observer à la fois au moment du travail des techniques calculatoires, avec la non utilisation de la double distributivité pour factoriser par exemple, et dans les types de tâches de preuve où l'on peut résoudre la très grande majorité des exercices avec $T_{Dév}$.

Plus encore, ces deux types de tâches n'ont pas les mêmes propriétés du point de vue de leur traitement mathématique. Le développement est une transformation de mouvement qui revêt un caractère algorithmique, programmable. Au contraire, la factorisation engage d'autres habiletés fondées sur les reconnaissances de formes, et une certaine culture des expressions. Etant donné le caractère non univoque de la transformation de mouvement, l'issue est déterminante dans les choix à opérer, de sorte que pour le travail expert, la question du problème à résoudre est importante : on ne prendra pas les mêmes décisions pour démontrer qu'une expression peut s'écrire comme un multiple de 5 ou comme un carré

Ainsi, si d'un point de vue des organisations mathématiques, la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition unifie les deux genres de tâches de développement et de factorisation, les contraintes imposées par les découpages et les différents formalismes du programme comme les interprétations qu'en font les manuels amènent à supposer que cette fonction de la technologie n'est pas réellement assurée dans les pratiques.

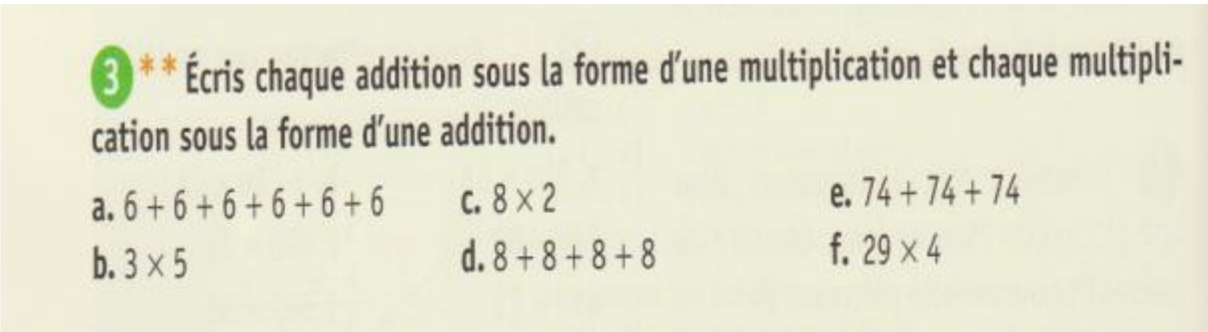
2.1.3 Caractères formalisateurs et généralisateurs de la distributivité

Un double mouvement de généralisation orchestré par la distributivité

Un premier mouvement de généralisation : des entiers aux décimaux
Nous avons vu précédemment, que lorsque la distributivité devient un objet d'étude explicite, dans les programmes de 5^{e}, elle unifie du point de vue des praxéologies construites à l'école élémentaire, des *praxis* anciennes où son usage était implicite. En même temps, elle formalise une propriété commune à des ensembles de nombres rencontrés jusque là (entiers, puis décimaux) de sorte qu'elle revêt un aspect généralisateur de ce point de vue.

Examinons plus avant les constructions antérieures des opérations et de leurs propriétés en primaire et en classe de 6^{e}, afin de caractériser les spécificités de cette extension. Tout d'abord, la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition peut être, pour les nombres entiers, justifiée à partir de la construction de la multiplication telle qu'elle est réalisée en primaire.

En effet, il existe un environnement théorique lié à la multiplication sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, définie par addition itérée, qui est travaillé à l'école primaire :

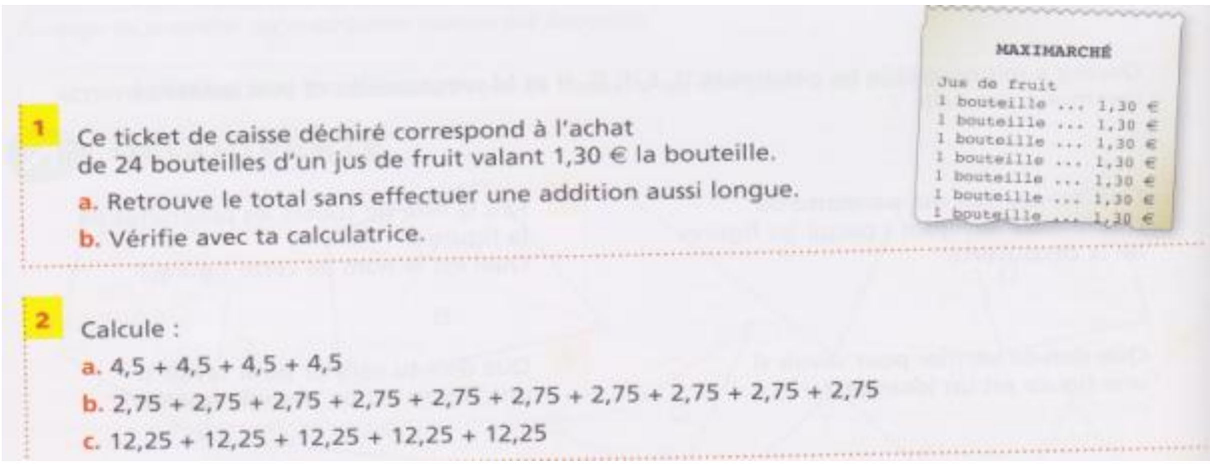

3 ** Écris chaque addition sous la forme d'une multiplication et chaque multiplication sous la forme d'une addition.

a. $6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6$ c. 8×2 e. $74 + 74 + 74$
b. 3×5 d. $8 + 8 + 8 + 8$ f. 29×4

Figure 2.10 – Magnard Outils pour les maths CE$_2$ (2012) Révisions p. 70

Cet extrait de manuel montre le lien fonctionner dans les deux sens, de l'addition vers la multiplication et inversement. La multiplication est alors orientée. Ainsi 74 + 74 + 74 = 74×3 se lit « 3 fois 74 » ou « 74 multiplié par 3 ». L'égalité entre « 5 fois 3 » qui s'écrit 3×5 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 et « 3 fois 5 » qui s'écrit 5×3 = 5 + 5 + 5, résulte de l'équivalence de ces programmes de calcul, c'est-à-dire de l'utilisation du fait que leurs résultats sont égaux (ceci est soutenu, dans certains manuels, par des dénombrements d'objets disposés sous la forme de rectangles, avec des comptages en lignes ou en colonnes).

Cette construction est ensuite reprise pour définir la multiplication sur $\mathbb{D}^+ \times \mathbb{N}$ à partir de l'addition sur les nombres décimaux. L'extrait suivant d'un manuel de CM_2 permet de voir fonctionner cette définition :


MAXIMARCHÉ
Jus de fruit
1 bouteille ... 1,30 €
1 bouteille ... 1,30 €
1 bouteille ... 1,30 €
1 bouteille ... 1,30 €
1 bouteille ... 1,30 €
1 bouteille ... 1,30 €
1 bouteille ... 1,30 €

1 Ce ticket de caisse déchiré correspond à l'achat de 24 bouteilles d'un jus de fruit valant 1,30 € la bouteille.
a. Retrouve le total sans effectuer une addition aussi longue.
b. Vérifie avec ta calculatrice.

2 Calcule :
a. 4,5 + 4,5 + 4,5 + 4,5
b. 2,75 + 2,75 + 2,75 + 2,75 + 2,75 + 2,75 + 2,75 + 2,75 + 2,75 + 2,75
c. 12,25 + 12,25 + 12,25 + 12,25 + 12,25

Figure 2.11 – EuroMath CM_2 (2009) p. 134

Ces exercices permettent en effet de faire le lien entre multiplication et addition itérée, l'effectuation des multiplications équivalentes aux sommes données étant *a priori* plus économe.

Ceci permet d'envisager une justification de la distributivité par addition itérée, lorsque la propriété devient un objet d'enseignement, sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ comme sur $\mathbb{D}^+ \times \mathbb{N}$, sur un exemple générique. Cette définition et l'associativité de l'addition justifient par exemple les égalités :

$$\begin{aligned} 2{,}75 \times (10+2) &= 2{,}75 + 2{,}75 + 2{,}75 + 2{,}75 + 2{,}75 + 2{,}75 + 2{,}75 + 2{,}75 + 2{,}75 + 2{,}75 + 2{,}75 + 2{,}75 \\ &= (2{,}75 + 2{,}75 + 2{,}75 + 2{,}75 + 2{,}75 + 2{,}75 + 2{,}75 + 2{,}75 + 2{,}75 + 2{,}75) + (2{,}75 + 2{,}75) \\ &= 2{,}75 \times 10 + 2{,}75 \times 2 \end{aligned}$$

La généralisation peut être construite dans une certaine mesure. Néanmoins, lorsqu'en 6^e la multiplication est étendue sur $\mathbb{D}^+ \times \mathbb{D}^+$, elle ne peut plus être définie par addition itérée. L'environnement théorique change de nature. Les documents d'accompagnement des programmes du collège suggèrent des constructions fondées sur des raisonnements sur des grandeurs (aires ou prix) ainsi que l'utilisation du point de vue théorique de la notion de quotient permettant de définir par exemple le produit $2{,}14 \times 3{,}7$ comme quotient par 10 du produit connu $2{,}14 \times 37$. Cela se justifie en effet par l'égalité reposant sur l'associativité étendue de la multiplication sur les nombres décimaux :

$$(2{,}14 \times 3{,}7) \times 10 = 2{,}14 \times \left(\frac{37}{10} \times 10\right) = 2{,}14 \times 37$$

Si la commutativité[30] (sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$) et l'associativité (sur $\mathbb{D}^+ \times \mathbb{N}$) de la multiplication anciennement connues sont étendues (sur $\mathbb{D}^+ \times \mathbb{D}^+$), alors la multiplication est ainsi définie. La distributivité de la multiplication par rapport à l'addition est, par suite, nécessairement étendue. L'exemple générique suivant pourrait être envisagé comme élément justificatif. La

[30] La commutativité de la multiplication permet de définir les produits sur $\mathbb{N} \times \mathbb{D}^+$.

distributivité sur $\mathbb{D}^+ \times \mathbb{N}$ permet, avec l'associativité de la multiplication postulée sur $\mathbb{D}^+ \times \mathbb{D}^+$ de justifier les égalités suivantes :

$$(2{,}14 \times 3{,}2 + 2{,}14 \times 0{,}5) \times 10 = (2{,}14 \times 3{,}2) \times 10 + (2{,}14 \times 0{,}5) \times 10 = 2{,}14 \times 32 + 2{,}14 \times 5$$

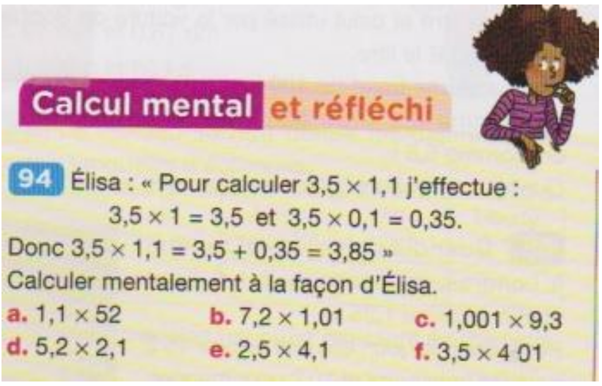
et :

$$[2{,}14 \times (3{,}2 + 0{,}5)] \times 10 = 2{,}14 \times [(3{,}2 + 0{,}5) \times 10] = 2{,}14 \times (32 + 5) = 2{,}14 \times 32 + 2{,}14 \times 5$$

Ainsi, $2{,}14 \times (3{,}2 + 0{,}5)$ et $2{,}14 \times 3{,}2 + 2{,}14 \times 0{,}5$ apparaissent comme étant le quotient de $2{,}14 \times 32 + 2{,}14 \times 5$ par 10. L'unicité du quotient assure l'égalité $2{,}14 \times (3{,}2 + 0{,}5) = 2{,}14 \times 3{,}2 + 2{,}14 \times 0{,}5$ qui témoigne de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition sur $\mathbb{D}^+ \times \mathbb{D}^+$.

L'environnement théorique et la construction des opérations tels que les programmes et les manuels les donnent à voir permettent de dégager une particularité de ce premier mouvement de généralisation de la propriété de distributivité : cette propriété peut se déduire dans la théorie numérique dont disposent les élèves au moment de son introduction en 5e. Autrement dit elle peut passer du statut de préconstruit[31] implicitement manipulé au travers de techniques de calculs au statut d'objet construit.

Nous avons vu précédemment qu'elle était utilisée en acte sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en calcul mental comme en calcul posé en primaire. L'extension sur $\mathbb{D}^+ \times \mathbb{D}^+$de cette utilisation implicite peut également avoir lieu en 6e pour du calcul mental (nous avons vu plus haut que les techniques de calcul posé sur $\mathbb{D}^+ \times \mathbb{D}^+$ reposaient en réalité sur la distributivité sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ avant une division par une puissance de 10). L'extension, lorsqu'elle apparaît, est, très normalement[32], préconstruite, par monstration, comme on peut l'apercevoir dans le manuel Transmath en 6e :


Calcul mental et réfléchi

94 Élisa : « Pour calculer 3,5 × 1,1 j'effectue :
3,5 × 1 = 3,5 et 3,5 × 0,1 = 0,35.
Donc 3,5 × 1,1 = 3,5 + 0,35 = 3,85 »
Calculer mentalement à la façon d'Élisa.

a. 1,1 × 52 **b.** 7,2 × 1,01 **c.** 1,001 × 9,3
d. 5,2 × 2,1 **e.** 2,5 × 4,1 **f.** 3,5 × 4 01

Figure 2.12 – Transmath 6e(2013) p. 62

[31] Rappelons qu'un « objet » est dit préconstruit lorsque son concept est absent (Chevallard 1989), son existence est assurée par monstration, dans une sorte d'évidence qui ne permet ni questionnement ni savoir scientifique à son propos. Les savoirs qui lui correspondent sont peu explicitables, fortement dépendants du contexte, et donc peu robustes. Notons qu'ici nous employons dans une acception un peu plus large le terme de préconstruit pour un objet qui n'est pas même désigné (il ne porte pas de nom, il est seulement utilisé implicitement, en acte). Ce sont les techniques calculatoires qui sont traitées en préconstruction et par conséquent le savoir implicitement à l'œuvre. Nous parlerons dans ce sens de préconstruction à propos de la distributivité à l'école primaire et au collège.

[32] Car, de même qu'à l'école primaire elle n'est pas objet d'enseignement défini par les programmes, et « un savoir scientifique quel qu'il soit fonctionne sur une strate profonde de préconstruit » (Chevallard 1989, p. 92)

La technique n'étant pas construite, mais simplement présentée, l'on peut s'interroger sur les possibles adaptations que demandent certains spécimens : par exemple la décomposition du facteur écrit à gauche pour le a. ou le c. Notons toutefois que ce genre de calcul est très inégalement représenté dans les manuels de 6^{e} (on ne trouve par exemple aucun exercice de ce genre dans le manuel Triangle de 6^{e}). Cela peut s'expliquer par les intitulés des programmes qui ne laissent pas transparaître cette extension. Le document d'accompagnement *Le calcul numérique au collège*, évoque néanmoins dans le paragraphe consacré aux entiers naturels l'utilisation en acte de la distributivité :

> Il est également important que les élèves construisent « en actes » et soient capables de verbaliser sur des exemples, sans toutefois recourir à leur dénomination, les propriétés ainsi que les « non propriétés » de la multiplication, comme par exemple le fait qu'elle n'est pas distributive par rapport à elle-même. *Le calcul numérique au collège* (2007) p. 8

Cependant, rien n'apparaît de tel pour ce qui est des nombres décimaux, y compris dans le document consacré aux nombres au collège. Nous supposons donc que l'utilisation en acte de la distributivité pour le calcul mental de produits de nombres décimaux dépend fortement des pratiques enseignantes. Le premier mouvement de généralisation, des nombres entiers aux nombres décimaux, peut donc être inégalement vécu par les élèves, selon les classes.

Un deuxième mouvement de généralisation : les rationnels, les relatifs et les irrationnels

A partir du moment où la distributivité émerge, en 5^{e}, son extension répond à un nouvel enjeu : celui de la construction d'opérations sur de nouveaux nombres, et en premier lieu pour les nombres rationnels.

Le cas de la multiplication sur les nombres rationnels est toutefois assez particulier. Ces nombres sont construits de deux manières différentes : en référence à un partage de l'unité, ou à la définition de la notion de quotient écrit sous forme fractionnaire. L'addition, pour les fractions de même dénominateur, fonctionne déjà au primaire et en 6^{e}, de même que la multiplication d'une fraction par un entier, par addition itérée. La distributivité s'étend alors par préconstruction, sur les fractions. En 5^{e}, cette addition, c'est-à-dire définie comme opération portant sur des nombres, nouveaux, en quelque sorte (c'est le statut de nombre comme quotient qui est nouveau en 6^{e}), apparaît avec ses techniques à mettre en œuvre. De ce point de vue, non seulement elle étend les pratiques (qui ne sont pas véritablement des techniques de calcul sur des nombres parce qu'elles ne reposent pas sur une interprétation de type nombre) aux cas où numérateur et dénominateur ne sont plus des entiers naturels, mais elle permet aussi de prendre en compte la multiplication par un nombre décimal, en rupture par rapport à l'addition itérée. De sorte que pour les nombres rationnels en 5^{e}, en construction de ce point de vue, l'émergence de l'addition et de la multiplication « suppose que soit postulée l'extension des propriétés des opérations sur les entiers naturels à ces nouveaux nombres que sont les quotients » (Le calcul numérique au collège p. 10) :

Posons $\frac{a}{c} = Q$ et $\frac{b}{c} = Q'$. Par définition du quotient de deux nombres :
Q est le nombre qui vérifie $c \times Q = a$ et Q' est le nombre qui vérifie $c \times Q' = b$.
On veut montrer que $Q + Q' = \frac{a+b}{c}$, c'est-à-dire, d'après la définition du quotient $\frac{a+b}{c}$, que $c \times (Q + Q') = a + b$. Or $c \times (Q + Q') = c \times Q + c \times Q'$ (distributivité de la multiplication par rapport à l'addition). De $c \times Q = a$ et $c \times Q' = b$, on déduit immédiatement que $c \times (Q + Q') = a + b$.
- Lorsque les dénominateurs sont différents, on remplace les écritures fractionnaires par des écritures fractionnaires équivalentes ayant le même dénominateur.

Figure 2.13 – Document d'accompagnement Le calcul numérique au collège p. 11

Malgré le document d'accompagnement, un seul manuel parmi les cinq manuels étudiés de 5^{e} présente cette démonstration, le manuel Transmath (2014). Mais c'est dans le contexte d'un unique exercice d'application, elle n'est pas l'objet d'une activité introductive et ne fait pas l'objet d'une institutionnalisation (dans la partie intitulée « j'apprends »). Il semble que l'on puisse supposer qu'elle soit peu présente dans les classes. Les programmes précisent pourtant que :

> La notion de quotient est sollicitée pour institutionnaliser la technique de l'addition à partir d'un exemple générique. En classe de 4^{e}, la technique de l'addition de deux nombres écrits sous forme fractionnaire de dénominateurs différents est construite de façon similaire, en recourant, pour l'institutionnalisation au calcul littéral ou à un exemple générique, selon la classe. *Le calcul numérique au collège* p. 11

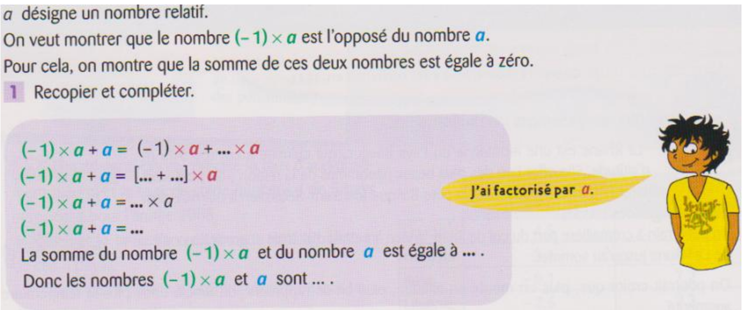
Ce deuxième mouvement d'extension en 4^{e} se poursuit au moment de la construction de la règle de multiplication sur les nombres relatifs. Le même document d'accompagnement précise que :

> La multiplication sur les décimaux relatifs ne peut résulter que d'une construction mathématique dans laquelle on cherche à étendre cette opération aux nombres relatifs en faisant en sorte que les propriétés de la multiplication sur les décimaux positifs continuent de s'appliquer. Toujours en utilisant la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, on commence par déterminer le produit de deux décimaux de signes différents […] ». *Le calcul numérique au collège* p. 20

Pourtant, Assude, Coppé, Pressiat (2012) n'en trouvent trace dans les manuels :

> Enfin, une étude rapide de manuels de 4^{e} montre que les liens entre distributivité et multiplication des relatifs ne sont pas clairement établis : d'une part, rien ne témoigne du fait que la définition de la multiplication des négatifs est choisie de façon à ce qu'elle soit (demeure) distributive par rapport à l'addition […] Assude, Coppé, Pressiat (2012) p. 53-54

Ce qui manque dans les manuels, c'est l'explicitation de l'enjeu de l'extension pour construire la multiplication sur les nouveaux nombres que sont les relatifs, c'est-à-dire cette volonté, en un sens, de prolonger les propriétés connues jusque là sur les autres nombres (ce qui permet de plonger $(\mathbb{D}^{+}, +)$ construit en 5^{e}, dans un anneau). C'est-à-dire que l'extension, lorsqu'elle est formalisée, se fait comme si elle allait de soi. Par exemple, le manuel Triangle propose de compléter des phrases pour deviner en quelque sorte la règle à partir d'exemples corrigés de produits. La distributivité n'apparaît pas. Le manuel Phare, utilise la distributivité pour établir un résultat préalable qui sera au cœur de la construction de la multiplication sur les nombres relatifs. Il s'agit de démontrer « que le nombre $(-1) \times a$ est l'opposé du nombre a ». Pour cela un certain nombre d'égalités sont à compléter, avec l'indication « j'ai factorisé par a »



a désigne un nombre relatif.
On veut montrer que le nombre $(-1) \times a$ est l'opposé du nombre a.
Pour cela, on montre que la somme de ces deux nombres est égale à zéro.

1 Recopier et compléter.

$(-1) \times a + a = (-1) \times a + ... \times a$
$(-1) \times a + a = [... + ...] \times a$
$(-1) \times a + a = ... \times a$
$(-1) \times a + a = ...$
La somme du nombre $(-1) \times a$ et du nombre a est égale à ... .
Donc les nombres $(-1) \times a$ et a sont ... .

Figure 2.14 – Manuel Phare 4e (2011) p. 30

Il y a donc bien implicitement évocation de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition que l'on étend aux nombres relatifs a et -1. Cependant, cette extension est utilisée comme si elle allait de soi, avec la mise en facteur de a. Elle n'est pas déclarée généralisée à des fins de construction de la règle de la multiplication. La suite de la construction repose sur ce résultat et sur l'associativité de la multiplication qui permet de se ramener à des produits de nombres positifs. Le manuel Sésamath parle explicitement de la propriété de distributivité à utiliser, pour factoriser une expression, dans l'activité consacrée à la justification de la règle du produit de deux nombres relatifs :

Activité 3 : Justification du produit de deux nombres relatifs

Le but de cette activité est de justifier que le produit de deux nombres de signes contraires est un nombre négatif et que celui de deux nombres négatifs est un nombre positif.

1. Calcul de (– 3,5) × 1,2 :

On considère l'expression Z = 3,5 × 1,2 + (– 3,5) × 1,2.

a. En utilisant la distributivité, factorise par 1,2 et calcule la valeur de Z.

b. Que peut-on en déduire pour les nombres 3,5 × 1,2 et (– 3,5) × 1,2 ? Déduis-en la valeur de (– 3,5) × 1,2.

Figure 2.15 – Manuel Sésamath 4e (2011) p. 21

Cependant, comme dans le manuel précédent, l'extension praxémique semble aller de soi, et l'enjeu de la généralisation n'est pas indiqué. Au contraire, le manuel Transmath témoigne d'un choix porté par la généralisation de l'utilisation de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition sur ces nouveaux nombres.

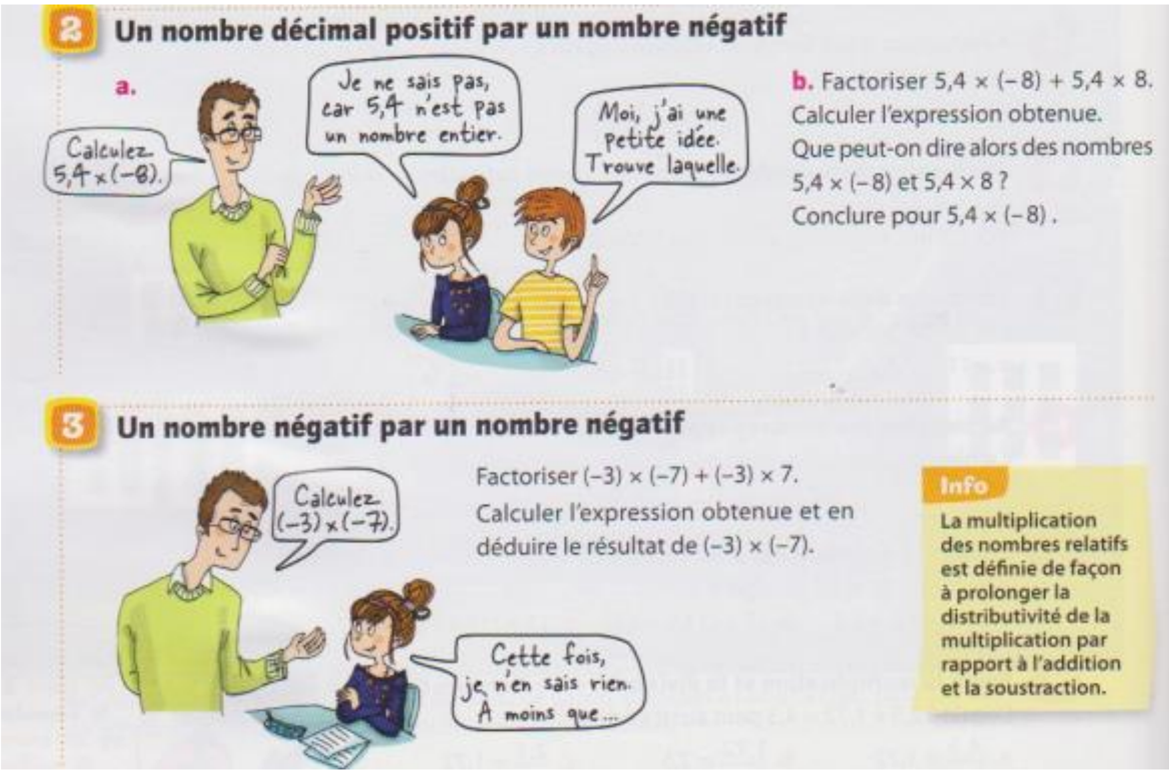
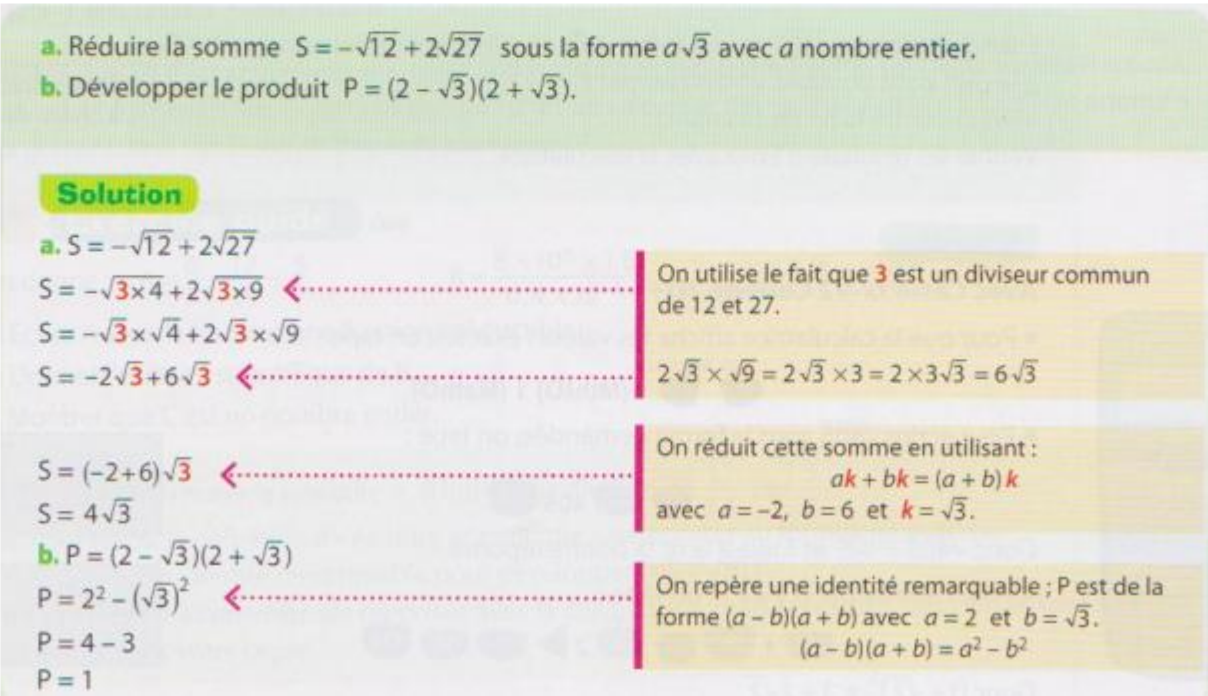


Figure 2.16 – Transmath 4e (2011) p. 14

Le discours autour de l'enjeu de l'extension, celui de prolonger les propriétés connues des opérations sur les nombres connus jusqu'alors, fait ici explicitement l'objet d'une note. Toutefois, c'est le seul manuel parmi les quatre analysés à le faire.

L'extension de l'usage de la distributivité se poursuivra encore en 3e sur certains nombres irrationnels et sur les réels plus généralement. A ce niveau sont introduits de nouveaux nombres, les racines de nombres positifs, dont les écritures afférentes acquièrent le statut de nombre avec les calculs. L'analyse des manuels de 3e montre que le travail calculatoire s'effectue le plus souvent avec des nombres de l'ensemble $\{a\sqrt{b}\,;(a,b)\in\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}^{+}\}$ voire $\{a\sqrt{b}\,;(a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}\}$. Le document d'accompagnement ne mentionne pourtant pas, comme il a pu le faire pour les nombres relatifs ou rationnels, la question de l'extension. Elle semble aller de soi dans une note concernant la preuve pour des nombres a et b strictement positifs (dont la nature n'est pas davantage explicitée) de $\sqrt{a+b}<\sqrt{a}+\sqrt{b}$. La note en effet montre une utilisation implicite (ce qui n'est pas anormal, le document s'adresse au professeur) d'une identité remarquable $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=a+b+2\sqrt{a}\sqrt{b}$. Ce qui peut paraître étonnant, est l'absence à ce moment là, de discours à propos d'une extension, bien que, de la même façon que pour les nombres relatifs ou les nombres rationnels, les opérations se construisent en 3e pour ces nombres nouveaux. A partir de l'ensemble $\{a\sqrt{b}\,;(a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}\}$, l'addition et la soustraction, construites par extension des opérations et de leurs propriétés sur les anciens nombres, conduit également à de nouveaux nombres, puisqu'elles ne sont pas internes. $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ par exemple n'appartient pas à l'ensemble. La preuve peut reposer sur l'extension praxémique de l'utilisation de l'identité remarquable mentionnée par le document d'accompagnement. Le carré $7+2\sqrt{10}$ n'est pas un nombre entier. Les nouveaux nombres comme $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ obtenus à partir d'opérations sur les « racines carrées » introduites n'ont pas de désignations véritables : ils ne sont ni entiers, ni rationnels, ni « racines carrées ». Le mouvement de généralisation se construit doublement. D'une part, à partir de nouveaux nombres introduits (les racines carrées), les propriétés des opérations sur les anciens nombres sont étendues pour pouvoir effectuer des opérations sur ces nouveaux nombres (mais on ne pourra définir de règles d'addition par exemple). Et, dans un second mouvement, ces opérations d'addition et de soustraction conduisent à étendre l'ensemble formé par les anciens nombres (rationnels) et les nouveaux (racines carrées de nombres positifs), pour les plonger en réalité dans l'ensemble des nombres réels[33]. Cette particularité tient à ce que l'addition n'est pas interne. Elle peut l'être dans certains sous-ensembles néanmoins, comme sur $\{a\sqrt{3}\,;a\in\mathbb{Z}\}$, lorsque par exemple on ajoute $4\sqrt{3}+5\sqrt{3}$, en généralisant la distributivité sur les nouveaux nombres, on obtient par factorisation $9\sqrt{3}$. L'addition repose alors sur une extension praxémique, de l'utilisation de la distributivité. Les manuels généralisent ainsi les techniques de factorisation ou de développement en utilisant une extension de la propriété (sous sa forme « simple » de 5e comme sous la forme des identités remarquables). Le manuel Transmath par exemple propose l'exercice résolu suivant :


a. Réduire la somme $S=-\sqrt{12}+2\sqrt{27}$ sous la forme $a\sqrt{3}$ avec a nombre entier.

b. Développer le produit $P=(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})$.

Solution

a. $S=-\sqrt{12}+2\sqrt{27}$

$S=-\sqrt{3\times4}+2\sqrt{3\times9}$ ← On utilise le fait que 3 est un diviseur commun de 12 et 27.

$S=-\sqrt{3}\times\sqrt{4}+2\sqrt{3}\times\sqrt{9}$

$S=-2\sqrt{3}+6\sqrt{3}$ ← $2\sqrt{3}\times\sqrt{9}=2\sqrt{3}\times3=2\times3\sqrt{3}=6\sqrt{3}$

$S=(-2+6)\sqrt{3}$ ← On réduit cette somme en utilisant : $ak+bk=(a+b)k$ avec $a=-2$, $b=6$ et $k=\sqrt{3}$.

$S=4\sqrt{3}$

b. $P=(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})$

$P=2^2-(\sqrt{3})^2$ ← On repère une identité remarquable ; P est de la forme $(a-b)(a+b)$ avec $a=2$ et $b=\sqrt{3}$. $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

$P=4-3$

$P=1$

Figure 2.17 – Transmath 3e (2012) p. 99

Le discours qui accompagne les techniques est soutenu par des affectations nouvelles des variables des identités connues, en particulier $k=\sqrt{3}$ dans le premier exemple et $b=\sqrt{3}$ dans le second exemple. L'extension se situe bien au niveau des pratiques sémio-

[33] Plusieurs auteurs montrent que la construction des nombres réels n'est pas prise en charge dans les savoirs à enseigner. Tonnelle (1979) l'évoquait comme nous l'avons entrevu dans notre premier chapitre. Bronner (1997) parle de « vide didactique » pour qualifier l'absence de passage dans le curriculum des décimaux et des rationnels aux nombres réels. Les travaux plus récents d'Erdogan (2006) s'en font également l'écho dans la description de ce qu'il définit comme le site numérico-algébrique au collège, où apparaît l'absence du concept de nombre réel.

linguistiques, sans questionnement pourtant, ni même de discours autour de l'extension de la technologie mathématique qui les accompagne. Ceci est corroboré par l'absence, dans les parties « activités » et « cours », des deux genres de tâches de réduction et de développement dont on observe deux spécimens, c'est-à-dire qu'ils apparaissent dans la partie « savoir faire », sans exploration technologique antérieure. L'utilisation de la distributivité simple ou des identités remarquables se révèle en fait sous la forme d'une extension de l'utilisation de l'écriture algébrique qui implicitement en montre une portée plus large : les lettres peuvent désigner les nouveaux nombres à l'étude, comme $\sqrt{3}$. Le fait que la propriété ne soit cependant pas nommée peut renforcer un découplage entre les dimensions sémio-linguistique où se situe l'essentiel du travail ici, et mathématique. Ceci semble d'autant plus probable que la propriété de distributivité apparaît sous une écriture symbolique plutôt inhabituelle, le facteur k étant écrit à droite dans l'égalité donnée $ak + bk = (a + b)k$ dans le premier cas. Dans le second cas, la reconnaissance se fait par la forme de l'expression. La généralisation qui s'exerce n'est donc pas clairement exprimée.

On observe également dans d'autres manuels qu'au moment de la construction des techniques de calcul sur ces nouveaux nombres, l'évocation même de la technologie peut être faible. Ainsi, dans le manuel Phare de 3e, la distributivité (le mot comme les écritures symboliques) n'apparaît ni dans la partie « activités », ni dans la partie « cours » ni dans la partie « savoir faire », seule l'indication « j'ai factorisé par $\sqrt{5}$ » l'évoque implicitement dans un exercice de réduction. Dans le manuel Triangle, la distributivité n'est pas mentionnée non plus pour soutenir l'exemple de développement donné dans la partie « connaissances » :

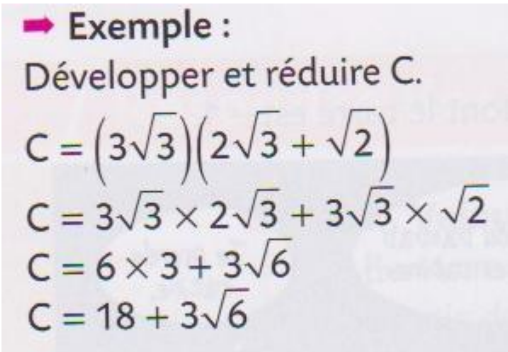

Exemple :
Développer et réduire C.
$C = (3\sqrt{3})(2\sqrt{3} + \sqrt{2})$
$C = 3\sqrt{3} \times 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} \times \sqrt{2}$
$C = 6 \times 3 + 3\sqrt{6}$
$C = 18 + 3\sqrt{6}$

Figure 2.18 – Triangle 3e (2012) p. 54

Elle n'apparaît que dans la partie « méthodes » pour « calculer une somme avec des racines carrées » sous le paragraphe « En utilisant la distributivité ». Le texte qui l'accompagne porte l'attention sur des reconnaissances de formes plutôt que sur l'élément technologique : « Cette méthode s'applique lorsque figurent, dans le calcul, des racines carrées d'un même nombre. ». Ce texte est du reste ambigu : non seulement il ne fait pas état de la fonction syntaxique cruciale pour l'utilisation de la distributivité (celle de facteur commun aux produits constituant les termes de l'expression), mais plus encore, l'identification n'est pas celle de nombres communs comme $\sqrt{6}$ mais de *racines de* nombres communs. Cette reconnaissance ostensive risque de faire obstacle à la reconnaissance de l'écriture $\sqrt{6}$ comme celle d'un nombre tout comme celle d'un facteur commun. L'idée que la pratique est celle d'une manipulation d'écriture sans fondement théorique dans la dimension mathématique semble donc ici renforcée par le discours.

Manuels et programme montrent que cette extension s'opère de façon silencieuse, ce qui va de pair avec le problème de l'absence de quantificateurs des expressions tout au long du collège, qui, d'une certaine manière, permet cette pratique. Mais elle est aussi de nature à entretenir des malentendus[34] quant à la généralisation de l'usage de la lettre à différents types de nombres.

Au-delà des constructions des opérations sur ces nombres, ce phénomène peut s'accentuer au moment de l'utilisation, dans le cadre numérique, de la distributivité de la multiplication. Les types de nombres en jeu sont inégalement représentés. Il y a, tout au long du collège, un déséquilibre certain entre les nombres entiers, décimaux (positifs), relatifs, rationnels et les nombres de l'ensemble $\{a\sqrt{b}\,;(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}\}$. En témoigne le dénombrement, dans les manuels, des spécimens de calculs, ou d'égalités (à écrire ou à compléter), pour chaque type de nombres. L'analyse des exercices des chapitres où l'utilisation de la distributivité peut apparaître en 5^e (calcul sur les nombres, nombres en écriture fractionnaire, et calcul littéral) donne les résultats suivants :

	PRISME	PHARE	TRIANGLE	TRANSMATH 2014	SESAMATH
	5^e	5^e	5^e	5^e	5^e
Entiers naturels	74	22	10	34	19
Nombres décimaux	36	25	1	25	26
Nombres rationnels	0	0	0	1	1

Figure 2.19 – Tableau comparatif des types de nombres engagés dans l'utilisation de la distributivité en 5^e

Notons tout d'abord que les deux exercices des manuels Sésamath et Transmath, correspondant à la distributivité sur des nombres rationnels, sont tout à fait similaires, et apparaissent dans le chapitre consacré aux opérations sur ces nombres. Ils demandent d'évaluer deux expressions littérales qui correspondent aux membres de l'égalité de la distributivité, avant de demander une justification pour l'égalité constatée :

57 On donne $a = \frac{1}{6}$, $b = \frac{4}{9}$ et $c = \frac{5}{3}$.

a. Calcule $a \times b + a \times c$.

b. Calcule $a \times (b + c)$.

c. Que remarques-tu ? Explique pourquoi.

Figure 2.20 – Sésamath 5^e p. 39

[34] Assude Coppé Pressiat (2012) le soulèvent par exemple à propos du traitement de l'égalité de deux expressions pour lesquelles « le problème de la quantification des énoncés est donc laissée à la charge de l'élève ».

On note donc qu'il n'y a pas de production d'égalité fondée sur une transformation de mouvement, l'égalité se déduit de la dénotation identique des expressions numériques. Et l'extension de la propriété la conforte (ou la légitime ?).

On ne trouve pas, dans les manuels analysés, d'écritures de calculs à effectuer sous la forme $a \times b + a \times c$, avec a, b, c nombres en écriture fractionnaire. Cela peut paraître étonnant car on peut envisager de nombreux cas où une factorisation serait à même de représenter une économie de calcul[35]. On trouve cependant dans les manuels, des calculs de produits d'un nombre (sous forme fractionnaire ou décimale) par la somme de deux rationnels. Cependant, nous ne les avons pas comptabilisés comme spécimens engageant dans le domaine numérique l'utilisation de la distributivité ; soit que les exercices soient précédés du titre « en utilisant les priorités », soit que le coût des calculs augmenterait avec un développement.

En 4^{e} l'utilisation de la distributivité sur les nombres relatifs est plutôt réduite, même si elle peut exister de la même façon que ce que nous avons pu observer en 5^{e}, pour du calcul mental. Le manuel Transmath 4^{e} par exemple propose quatre exercices consacrés au calcul mental, avec des utilisations dans le sens de la factorisation comme du développement. Parmi les expressions proposées se trouvent par exemple 73×(-2,51) + 27×(-2,51) ou 27×(-99) dont on demande, pour ce dernier calcul, d'utiliser la décomposition -99 = 1 – 100 en complétant une égalité.

Au contraire, en 3^{e}, l'utilisation de la distributivité sur les nombres écrits sous la forme de « racines carrées » est très importante. Le manuel Transmath de 3^{e} par exemple consacre 22 exercices à des techniques de calcul fondées sur la distributivité (et plus encore, la grande majorité des exercices consacrés à des types de tâches de preuves occasionne des réductions de sommes donc, des factorisations sur ces nombres aussi).

De façon concomitante, et nous y reviendrons dans la dernière partie de cette thèse, il existe une extension muette du côté des polynômes dans les usages que l'on fait des écritures algébriques, de sorte que l'on pourra trouver des expressions à développer comme $2x(4x + 5)$ où la distributivité s'applique sur des monômes par exemple.

Ces analyses donnent à voir des extensions de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition à différents types de nombres, qui s'exercent tout au long du collège. Ces généralisations de son usage répondent à un double mouvement, pour les propriétés de systèmes de nombres déjà connus comme les entiers ou les décimaux, et pour la construction de nouveaux nombres comme les nombres relatifs. Or, cet enjeu de conservation des propriétés, n'apparaît que rarement dans les manuels, et on peut faire l'hypothèse qu'il en soit de même globalement dans les classes. Les extensions peuvent aussi se révéler muettes et ne

[35] Si l'on reprend par exemple, l'exercice du manuel Sésamath, le calcul $\frac{1}{6} \times \frac{4}{9} + \frac{1}{6} \times \frac{5}{3}$ demande deux multiplications suivies de l'addition $\frac{4}{54} + \frac{5}{18}$, il y a donc trois opérations à effectuer. L'addition conduit à utiliser $\frac{5}{18} = \frac{15}{54}$, dont on peut par exemple trouver le facteur commun 3 par lequel multiplier le numérateur et le dénominateur, en analysant le calcul précédent. Cela semble plus coûteux néanmoins que le calcul $\frac{1}{6} \times \left(\frac{4}{9} + \frac{5}{3}\right)$ qui engage une opération de moins et dont l'addition demande des manipulations de nombres ici plus petits. Le calcul aboutit en effet au produit $\frac{1}{6} \times \frac{19}{9}$ après avoir utilisé $\frac{5}{3} = \frac{15}{9}$ pour l'addition.

s'exercer que dans un travail sémio-linguistique alors désarticulé de sa composante technologique que l'on étend implicitement, sans la questionner. L'usage inégal de la distributivité selon les types de nombres est, par ailleurs, de nature à renforcer cette opacité des généralisations qui se jouent. Les manuels comme les programmes montrent que cet enjeu semble en grande partie ignoré dans le curriculum. Les généralisations que nous venons de voir s'accompagnent par ailleurs de généralisations de l'utilisation de la lettre (à différents types de nombres par exemple) et de l'égalité, c'est ce que nous allons voir maintenant.

Généralisation de l'utilisation de la lettre et de l'égalité dans l'expression de la distributivité
Le formalisme de la distributivité $k(a+b)=ka+kb$ introduit en 5e, accompagne tout d'abord, les différentes extensions sur les nombres que nous avons vues, de sorte que les variables, implicitement typées[36], sont typées différemment selon les nouveaux nombres rencontrés au fur et à mesure des différents niveaux de classe au collège. Il y a donc dans le même mouvement d'extension une généralisation de l'utilisation de la lettre : l'écriture $k(a+b)=ka+kb$ ayant une portée plus large. Cette généralisation s'exprime par l'extension à des nombres de types différents, mais aussi avec des lettres les représentant, donc par un usage de la lettre comme nombre indéterminé. L'extension du côté des polynômes aboutit aussi à une généralisation du côté des expressions algébriques dans l'utilisation du formalisme précédent de la distributivité : k peut ainsi désigner un monôme comme $5x$ ou en 3e pour certaines factorisations, un binôme comme $4x-3$.

Parallèlement, l'utilisation du signe = s'étend, en partie en rupture avec l'usage que l'on en fait en arithmétique. Essentiellement employé comme annonce de résultat en primaire, non seulement la lecture en est orientée (de gauche à droite), mais encore, le membre de droite est très majoritairement, une écriture décimale de nombre. De sorte que lorsque l'égalité est envisagée comme relation d'équivalence, cela engage une portée plus large de son usage où la réversibilité des écritures s'associe au caractère symétrique de la relation. Plus encore peut-on alors envisager une relation entre expressions (de deux programmes de calcul) et non plus seulement entre une expression numérique (de programme de calcul arithmétique) et une écriture décimale de nombre. De ce point de vue la nature des objets en relation change. Cela ne signifie pas que de telles égalités n'aient jamais existé en primaire, on a vu plus haut par exemple un exercice demander de produire l'égalité $4+4+4=4\times 3$, mais cela ne constitue pas l'essentiel de son usage. De sorte qu'il y a une certaine distance entre l'ancien et le nouveau. Plus encore, avec le calcul algébrique, la production d'une égalité ne va plus reposer sur une effectuation, mais sur une transformation de mouvement. Or nous avons vu que les deux rapports avec la dimension mathématique étaient extrêmement différents. Dans le cas de l'effectuation en effet, il y a un déplacement de la dimension sémio-linguistique vers le mathématique via la dénotation avant un retour dans la première. Dans le cas d'une transformation de mouvement, le changement de point de vue sur l'égalité est considérable : l'écriture devient un objet transformable, et l'égalité décrit aussi le résultat de cette

[36] « Les variables des formules algébriques sont *implicitement typées* (en informatique les variables sont dites *typées* quand on doit déclarer explicitement si elles sont de type entier, booléen, décimal, alphanumérique etc.), ce qui contribue encore à désorienter bon nombre d'élèves. » Drouhard, Panizza (2012) p. 226

transformation de mouvement, ce qui peut ne pas aller de soi comme nous l'avons vu dans la première partie de cette thèse.

Ces extensions semblent pourtant peu prises en charge par les manuels en l'état, c'est-à-dire qu'aucun discours ne les accompagne pour en clarifier les enjeux ou simplement les désigner. De façon concomitante, la distributivité vit sous différents formalismes au collège dans les programmes, de sorte que l'on peut s'interroger sur le morcellement potentiel de cette technologie et par suite son affaiblissement à la fois comme justificatrice dans les praxéologies, et unificatrice dans l'organisation des connaissances.

Des formalismes multiples
Les programmes montrent en effet, une certaine diversité dans le formalisme apporté à la propriété de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. Ainsi en 5^{e} elle apparaît sous deux écritures : $k(a+b) = ka + kb$ et $k(a-b) = ka - kb$, conséquence de l'absence de la multiplication sur les nombres relatifs à ce niveau. Or, lorsque cette opération est construite en 5^{e}, seule la première écriture symbolique devient nécessaire. Cela ne signifie pas pour autant que la seconde ne soit pas utile : pour développer comme pour factoriser, cela permet de s'affranchir d'un travail sur les signes selon les expressions, qui serait nécessaire si l'on ne disposait que de la somme en quelque sorte. Cependant, c'est l'écriture symbolique de la propriété mathématique qui n'a plus besoin de revêtir deux formes différentes. Ou du moins peut-on les unifier, pour justement unifier la technologie, et ainsi considérer qu'il n'y a qu'une propriété mathématique qui peut s'exprimer de façons différentes et les différents formalismes peuvent être utiles selon les formes d'expressions rencontrées. Assude, Coppé et Pressiat (2012) montrent qu' « on ne trouve dans le cours, aucune reprise sous une seule formulation algébrique », c'est-à-dire une formulation unificatrice pour la propriété de distributivité dans les manuels de 4^{e}. Plus encore, les mêmes auteurs soulignent qu'il n'y a pas non plus d'extension envisagée à l'écriture $k(a-b) = ka - kb$. Car en 5^{e}, en l'absence de la multiplication sur les relatifs, cette écriture « suppose des conditions restrictives sur a - b qui ne sont jamais précisées ». Pourtant, en 4^{e}, ces conditions peuvent être levées. Mais cela n'apparaît pas davantage dans les manuels, où les implicites demeurent, que dans les programmes.

En outre, en 4^{e}, un nouveau formalisme émerge sous le nom de « double distributivité » : $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$. Cette double dénomination peut poser question au regard de l'identification par les élèves d'une propriété mathématique commune exprimée de deux manières différentes. Ce second formalisme étend pourtant l'ancien, sans le supplanter pour autant. Là encore, cela dépendra des formes des expressions. On voit par exemple le manuel Transmah de 4^{e} exposer les deux formalismes (simple et double, avec l'addition) dans la partie Cours du chapitre consacré au Calcul littéral. De même qu'en 3^{e} les identités remarquables viendront compléter ce panel de formalisations algébriques, mais d'une autre manière. Car les identités remarquables réalisent des particularisations en réalité de la distributivité sous sa forme double, au cas par exemple où les deux facteurs sont la même somme. Or on peut se demander quelles sont au fond les motivations de ces multiples formalismes, dont certains ne réalisent pas même d'extension ou d'unification de l'ancien. Nous rappelons bien sûr que nous nous positionnons ici du point de vue des pratiques du calcul algébrique, c'est-à-dire des transformations de mouvement : pourquoi avoir des formalismes différents d'une même propriété ? La réponse se situe peut-être du côté d'une certaine culture des expressions dont l'enseignement organise les rencontres : par exemple, des monômes ou des binômes - restriction qui n'apparaît pas par exemple au Chili (Verdugo-Hernandez, 2013) -, mais aussi l'utilisation implicite d'une seule variable, qui conduit à une certaine préconstruction des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ qu'organise le collège. D'un point de vue pratique, le fait que l'ensemble des écritures correspondent à des caractères binaires satisfait à une sorte de minimum dans la portée des écritures pour pouvoir les étendre dans des transformations de mouvement portant sur des expressions plus complexes. Ainsi a-t-on des formalismes mettant en jeu des sommes de deux termes, et des produits de deux facteurs (ou de carrés). Si l'on veut développer un produit de trois facteurs en utilisant la distributivité, on peut toujours se ramener à un produit de deux facteurs par associativité. De même pour la somme. Cette interprétation des « besoins » de la pratique du calcul algébrique ne convient pour autant pas à l'émergence des identités remarquables. Peut-être la raison de ces différentes formes de savoir se situe-t-elle aussi du côté d'une unification de $T_{Dév}$ et T_{Fac} dans le cas de binômes (essentiellement de degré 1) qui émergent dans le travail des expressions (et des polynômes associés). La « double distributivité » ne permet pas facilement de factoriser une expression développée d'un produit de deux binômes donnée par son écriture canonique (donc avec réduction), au contraire d'une identité remarquable. Quoi qu'il en soit, pour se ramener à l'un de ces formalismes au caractère « binaire », l'on se trouve conduit à utiliser des substitutions. Cette notion ne faisant pas partie du programme, l'on peut alors s'interroger sur l'enseignement qui y a trait. Nous avons vu plus haut un extrait de manuel de 3^{e} montrer une substitution en posant explicitement $a = -2,\ b = 6\ et\ k = \sqrt{3}$, c'est-à-dire des substitutions par des types de nombres différents. Ces substitutions existent de fait, mais peuvent également se révéler implicites, et s'étendre à des monômes ou des binômes, sans que les manuels ne le mentionnent. La pratique de ces substitutions, qui accompagne les extensions et l'usage des formalismes nouveaux de la distributivité au fur et à mesure de la scolarité, est elle alors ou peut-elle être transparente ? Autrement dit cette incomplétude *a priori* dans les objets de l'enseignement peut-elle faire obstacle à l'usage et à l'organisation des différents formalismes du savoir à enseigner ?

L'analyse des manuels montre néanmoins un formalisme absent : aucune description rhétorique n'apparaît pour dire la distributivité, dans son intégralité. Un seul manuel montre une tentative de discours en ce sens, mais il se révèle lacunaire comme nous le verrons dans la partie suivante.

2.1.4 Conclusion et perspectives

L'étude des manuels et des programmes donne à voir une possible organisation curriculaire basée sur les caractères formalisateur, unificateur et généralisateur des savoirs à enseigner sur la distributivité. Au regard des pratiques numériques de l'école primaire, la notion unifie en effet, des types de tâches liés au calcul mental ou au calcul posé de produits de nombres entiers. Ces types de tâches s'excluent *a priori* par leur nature, et sont donc traités de façon isolée dans les manuels. Pourtant, lorsque la distributivité apparaît comme un enjeu d'étude des programmes, c’est-à-dire en classe de 5e, on ne trouve pas de travail d’unification dans ce sens dans les manuels, qui pourrait conduire à une complexification des praxéologies ponctuelles de calcul rencontrées jusqu’alors. De la même façon, tandis que la propriété de distributivité devrait les unifier, les types de tâches de développement et de factorisation apparaissent cloisonnés dans les manuels tout au long du collège. La propriété est souvent spécifiée dans un sens et dans l’autre, les paragraphes les concernant les séparent, tout comme les exercices. L’unification que pourrait, ou que devrait organiser la distributivité, se révèle donc en l’état, incomplète ou ignorée.

En outre, lorsqu'elle est mise à l'étude explicitement en 5e, la distributivité orchestre un double mouvement de généralisation. Dans un premier mouvement, son utilisation s'étend des nombres entiers (en lien avec l'addition itérée support de la définition de la multiplication) aux nombres décimaux. Ce premier mouvement de généralisation concerne les ensembles de nombres pour lesquels les lois et leurs propriétés se sont transmises implicitement par préconstruction. Lorsqu’elle se constitue comme objet d’étude, la propriété de distributivité peut alors être construite pour ces ensembles, à partir de l’environnement théorique des systèmes de nombres qui a présidé à leur émergence.

Dans un deuxième mouvement, l'extension se poursuit en 5e pour la construction de la technique de l’addition sur les nombres rationnels. Il s’agit alors d’un autre mouvement de généralisation car la distributivité est axiome : la règle est construite de façon à ce que la multiplication demeure distributive par rapport à l'addition sur un nouvel ensemble de nombres. Les mêmes enjeux d’extension sont aux fondements de la règle de multiplication sur les nombres relatifs en 4e. Pourtant, l’explicitation est peu mise en avant dans les manuels, et l’extension souvent réalisée comme allant de soi. Le même phénomène se poursuit en 3e avec les « racines carrées ». De façon concomitante, une certaine extension muette du côté des polynômes semble s’exercer tout au long du collège. La propriété de distributivité concerne non seulement des nombres issus d’ensembles de plus en plus vastes, pour lesquels elle participe à la construction des opérations, mais aussi plus généralement, des expressions algébriques. Cette généralisation de son usage est pourtant peu discutée dans les manuels, et s’accompagne d’extensions des formalismes de la propriété.

Les programmes échelonnent six formalismes différents selon les niveaux de classe. La distributivité est « simple » en 5e, et se présente séparément, pour l’addition et la soustraction. Elle est « double » en 4e, et ne concerne plus que l’addition. Elle prend encore une autre forme avec les identités remarquables en 3e. Pourtant, on ne trouve aucun retour sur les formalismes anciens qu’elle généralise et dont l’extension aux nombres relatifs change implicitement la quantification des égalités vues en classe de 5e. C’est-à-dire que les aspects formalisateurs et généralisateurs, qui vivent du fait de l’organisation des programmes, sont peu mis à l’étude, ou pas du tout, laissant à la charge de l’élève ces implicites et les recompositions afférentes.

La focale apportée par les caractères formalisateur, unificateur et généralisateur de l’utilisation de la distributivité depuis l’école élémentaire jusqu’en fin de collège permet d’entrevoir une organisation curriculaire basée sur ces spécificités. Ceci nous paraît pouvoir être associé à l'idée d'un modèle épistémologique algébrico-numérique sous-jacent évoqué dans la première partie de ce chapitre. Cependant, manuels et programmes montrent qu'en l'état, ce n'est pas une organisation qui existe véritablement pour les savoirs à enseigner sur la distributivité. De nombreuses incomplétudes existent dans les constructions qui apparaissent dans les programmes et les manuels, de sorte qu'une organisation curriculaire véritablement fondée sur les aspects FUG de ces savoirs pourrait se constituer comme une alternative possible à l'existant. Les lignes directrices en seraient donc les suivantes.

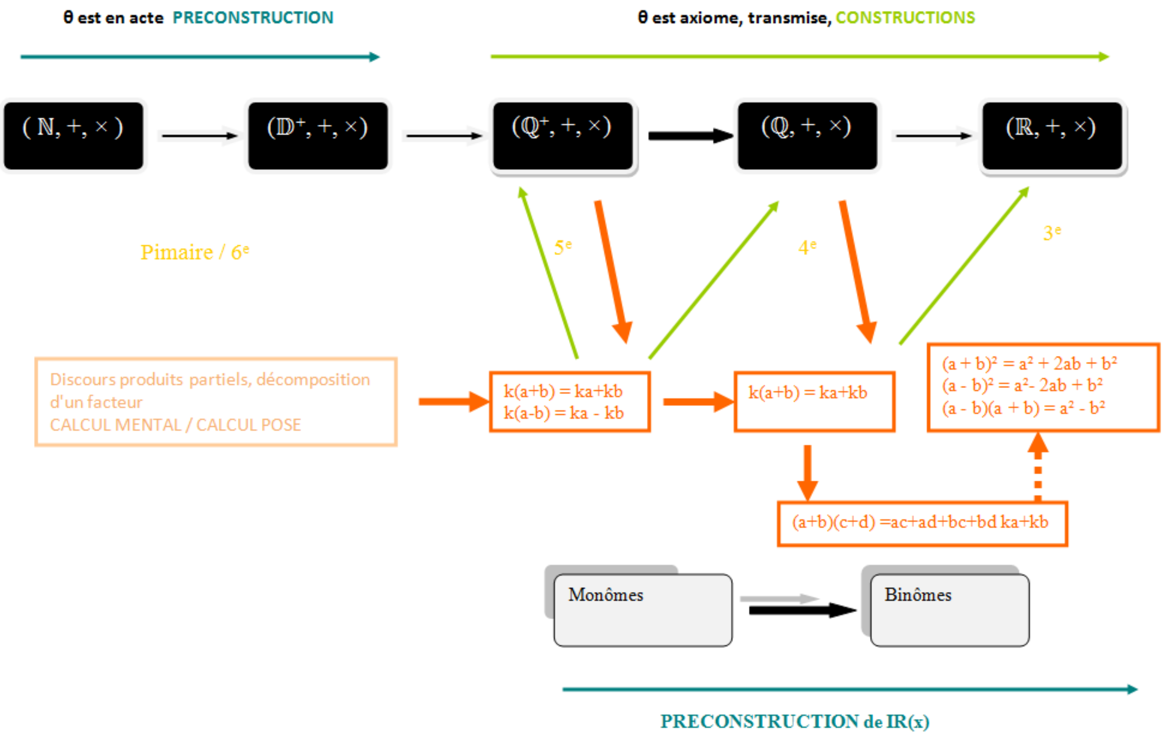


Figure 2.21 – Schéma des caractères formalisateurs, unificateurs et généralisateurs de la distributivité

Dans cette organisation apparaissent les techniques de calcul mental et de calcul posé de produits de nombres entiers et décimaux, fondées sur l'utilisation implicite de la distributivité, en primaire comme en 6e. La distributivité porte alors en 5e, une unification des types de tâches afférents, tout en complétant les organisations mathématiques anciennes dans la composante technologique. Elle est également productrice de nouvelles praxis de calcul mental en unifiant des types de tâches de développement ou de factorisation d'expression numériques. Elle généralise la propriété aux nombres entiers (que l'on peut démontrer) et décimaux (admise par préconstruction), puis aux nombres en écriture fractionnaire (axiome) pour construire l'addition sur les nombres rationnels (positifs). Deux formalismes coexistent : l'un a trait à la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, l'autre à la distributivité de la multiplication par rapport à la soustraction. Pour chacun, l'utilisation concerne les nombres entiers, décimaux et rationnels positifs. On peut également envisager d'expliciter une première extension de l'utilisation du formalisme pour les monômes de degré 1. On peut voir une certaine dialectique s'exercer entre formalisme de la propriété et ensemble de nombres. Dans un premier sens, l'utilisation de la propriété permet de construire l'addition pour les rationnels[37]. En retour, cette construction étend de fait le domaine d'application de la propriété à ces nouveaux nombres, c'est-à-dire que le formalisme ancien correspond alors à un ensemble de nombres plus vaste. Autrement dit, la quantification des égalités en est modifiée.

Le même phénomène se produit en 4e où la distributivité est choisie comme axiome pour étendre les opérations et leurs propriétés aux nouveaux nombres que sont les relatifs pour construire la règle de multiplication. Ceci engendre une première généralisation de l'utilisation du formalisme ancien, et parallèlement de la propriété de distributivité. Les lettres peuvent désormais désigner à la fois des nombres entiers, décimaux, et rationnels relatifs. On peut envisager une unification des formalismes anciens de l'addition et de la soustraction. Cela ne signifie pas que le cas de la soustraction ne soit plus utile ou utilisé. Les formalismes anciens sont unifiés, mais continuent de coexister, comme sous-formalismes possibles. L'unification des types de tâche de calcul mental, de développement ou de factorisation d'expressions numérique peut ainsi être poursuivie pour l'ensemble des nombres connus.

Une nouvelle extension du côté des polynômes apparaît : les lettres peuvent désigner des binômes ou plus généralement des expressions algébriques. Cette généralisation de l'usage permet de construire le nouveau formalisme de la double distributivité, qui étend lui-même les précédents. Ce dernier ne peut en revanche unifier développement et factorisation.

Le formalisme restrictif des identités remarquables en 3e le permet néanmoins (particularisation en pointillé sur le schéma). La généralisation à des ensembles de nombres de plus en plus vastes se poursuit à ce niveau avec l'introduction des « racines carrées » de nombres positifs. De tels nombres ne permettent cependant pas de construire des règles d'addition ou de soustraction de même facture que celles connues sur les anciens nombres. Ces problèmes peuvent conduire néanmoins à envisager des sous-ensembles sur lesquels opérer pour construire des additions internes. La distributivité de la multiplication par rapport à l'addition en est alors étendue, sur ces sous-ensembles comme sur les autres nombres créés à partir des opérations. La quantification des égalités formalisant la propriété de façon multiple s'étend à nouveau.

Cette organisation curriculaire brossée à grands traits ici pose alors la question des conditions et des contraintes susceptibles de peser sur une telle construction. Afin d'en réaliser une étude plus précise, nous nous centrerons sur le moment de l'introduction de la propriété de distributivité, qui dans les programmes actuels, se situe en 5e. Cette focale occupera les deux parties suivantes de ce chapitre. Les questions qui nous animent sont les suivantes. Quelles sont d'une part, les spécificités des pratiques numériques anciennes existantes en primaire qui peuvent peser sur les savoirs à enseigner sur la distributivité ? D'autre part, quelles sont les conditions d'un enseignement centré sur les aspects formalisateurs, généralisateurs et unificateurs de cette notion ? Au travers de cette étude, nous entendons mettre à jour un

[37] Il y a une double construction pour l'addition des fractions, la première est issue de l'addition itérée et peut être liée aux grandeurs et mesures, ainsi que les fractions sont construites en primaire. Cependant en 5e, les fractions ayant été réinterprétées comme quotients dans la classe de niveau précédent, l'addition est dans un second temps reconstruite à partir de la notion de quotient.

certain nombre d'éléments pour l'élaboration d'une ingénierie pour ce moment d'introduction de la distributivité. Cette élaboration et l'expérimentation de cette ingénierie feront l'objet de notre troisième chapitre.

En outre, les analyses précédentes laissent entrevoir une extension qui semble traverser les programmes du collège, du côté des monômes voire des polynômes, au-delà des types de nombres, dans l'usage de la distributivité. Cet usage semble muet dans les programmes comme dans les manuels. Par ailleurs, les formalismes particuliers de la propriété tels qu'ils apparaissent dans les programmes, c'est-à-dire constitués d'expressions à caractères binaires (des sommes de deux termes, des produits de deux facteurs), induisent un usage de substitutions pour certaines adaptations (des produits de trois facteurs) par exemple. Ces substitutions sont-elles dès lors transparentes, ou peut-on y voir une nouvelle incomplétude dans l'organisation des savoirs à enseigner ? Nous reviendrons sur ces généralisations et cette pratique des substitutions dans notre quatrième chapitre.

2.2 UNE FOCALE SUR L'INTRODUCTION DE LA DISTRIBUTIVITE COMME FORMALISATRICE, UNIFICATRICE ET GENERALISATRICE

Dans cette partie, nous centrons notre étude sur le moment de l'introduction de la propriété de distributivité, qui a lieu en 5e dans les programmes actuels. Il s'agit de déterminer les conditions et les contraintes susceptibles de peser sur un enseignement fondé sur les aspects unificateur, formalisateur et généralisateur de la notion. Dans un premier temps, nos analyses retournent de façon plus spécifique sur les programmes et manuels de primaire pour dégager plus précisément les particularités des praxis numériques anciennes que nous avons déterminées dans la partie précédente. A cet effet, nous serons amené à reprendre en particulier certains extraits de manuels précédents afin d'en approfondir les analyses. Nous enrichirons notre étude par d'autres extraits de manuels et du programme. Il s'agit de déterminer la façon dont se construisent les praxis pour le calcul posé, comme pour le calcul mental de produits de nombres entiers ou décimaux. Quelles sont les praxéologies qui peuvent fonctionner et s'articuler avec ces praxis ? Quels formalismes y sont associés, et quelles spécificités peuvent-ils engendrer implicitement dans les usages en acte de la propriété ?

Afin de compléter cette étude, nous conduirons dans un second temps, des analyses de manuels de 5e dont les organisations apparaissent prendre en charge, du moins en partie, les caractères formalisateur, unificateur et généralisateur des savoirs à enseigner sur la distributivité. Dans quelle mesure et de quelle manière ces enjeux font-ils alors l'objet d'un enseignement dans ces manuels ? Deux genres de situations émergent dans cette optique. Le premier est celui de situations d'introduction dans les manuels où apparaissent du calcul mental. Celles-ci visent-elles alors à construire une certaine unification vis-à-vis de types de tâches de calcul anciens ? Le deuxième genre est celui de situations d'introduction fondées sur la figure du rectangle partagé en plusieurs rectangles. Ces dernières permettent-elles alors de véhiculer une certaine généralisation pour l'usage de la distributivité ?

Dans un dernier temps, enfin, nous mettrons en regard ces analyses avec celles d'entretiens réalisés auprès d'enseignants. Ces entretiens révèlent comme nous le verrons, au travers des pratiques qui y sont décrites, des projets d'enseignement qui portent des préoccupations tournées vers les aspects formalisateur, unificateur et généralisateur des savoirs à enseigner sur la distributivité. Quelles sont alors les difficultés d'enseignement qui peuvent transparaître ? Les résultats de nos analyses nous conduiront à émettre des hypothèses quant aux conditions d'existence d'une telle organisation curriculaire.

Examinons tout d'abord les conditions et contraintes héritées des praxis numériques anciennes du primaire utilisant implicitement la propriété de distributivité.

2.2.1 Conditions et contraintes héritées des praxis numériques anciennes du primaire

La distributivité pour le calcul mental : un élément technologique parmi d'autres

Dans les techniques de calcul mental, l'utilisation de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition peut se révéler n'être que l'une des propriétés des nombres et des opérations utilisées en acte. Ainsi, le document ressources intitulé *Le nombre au cycle 3*, *Apprentissages numériques*, propose-t-il une exemplification dans ce sens pour calculer 48×250 :

– décomposition additive canonique de 250[8] :
$48 \times 250 = 48 \times 200 + 48 \times 50 = 48 \times 2 \times 100 + 48 \times 5 \times 10 = 96 \times 100 + 240 \times 10$
$48 \times 250 = 9\,600 + 2\,400 = 12\,000$
ou
$48 \times 250 = 48 \times 200 + 48 \times 50 = 48 \times 2 \times 100 + 48 \times 100 \div 2 = 96 \times 100 + 4\,800 \div 2$
$48 \times 250 = 9\,600 + 2\,400 = 12\,000$
Etc.

Figure 2.22 - Calcul et conceptualisation (Butlen et Masselot) p. 38 (Le nombre au cycle 3, Apprentissages numériques, Collection « Ressources pour faire la classe » MEN-CNDP, 2012)

La première étape témoigne d'une utilisation de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, avec une décomposition implicite du facteur 250 écrit à droite en 200+50. L'égalité suivante engage une décomposition des nombres 200 et 50 en produits de puissances de dix, soit 2×100 et 5×10 ici, pour ensuite utiliser l'associativité de la multiplication afin d'effectuer les produits des facteurs autres que les puissances de 10 en premier, c'est-à-dire 48×2 et 48×5. Ceci permet de retarder ces derniers produits dont l'effectuation repose sur des propriétés de l'écriture décimale de position. Dans un même temps, on peut questionner les techniques pour calculer les produits 48×2 et 48×5. Selon les habiletés de chacun, et par là le caractère éventuellement problématique de l'exécution, ces calculs vont pouvoir s'exprimer dans la technique globale. Ainsi, pour la tâche consistant à calculer 48×250, les éléments composant à la fois la technique de calcul et la technologie implicitement à l'œuvre peuvent être multiples. Il n'y a rien là de surprenant, dans le sens où ces techniques sont en construction au cycle 3.

Ce fait n'est pas systématique, on trouve bien sûr dans les manuels des occasions d'emploi plus isolées de la distributivité en calcul mental comme nous avons pu le voir dans la partie précédente de ce chapitre. Ainsi l'EuroMaths de CM_2 (2009) montre-t-il au moins deux calculs s'appuyant sur la distributivité en acte de la multiplication par rapport à l'addition :

4 On sait que 23 × 16 = 368.
Calcule sans poser les multiplications. Explique comment tu fais.
a. 23 × 17 **b.** 24 × 16 **c.** 23 × 26 **d.** 33 × 16

Figure 2.23 – EuroMaths CM_2 2009 p. 56

On peut *a priori* supposer que les calculs c. et d. reposent sur les égalités suivantes :

$23 \times 26 = 23 \times 16 + 23 \times 10$ et $33 \times 16 = 23 \times 16 + 10 \times 16$. Dans les deux cas, la multiplication par 10 engage des techniques fondées sur des éléments de technologie liée à la numération. Par ailleurs on peut s'interroger sur le bloc technologico-théorique implicite pour la seconde égalité compte tenu de la décomposition du facteur écrit à gauche. Nous y reviendrons dans le paragraphe suivant consacré à la multiplicité des formalismes implicitement utilisés. Notons de même que les auteurs du document Ressources :

> Pour des raisons de facilité de lecture, nous traduisons la démarche de l'élève de manière formalisée, en utilisant des signes mathématiques. Cette formalisation n'est pas attendue des élèves. (Ibid. p. 38)

Dans les pratiques de calcul mental proposées par le document Ressources des programmes comme dans les manuels, la distributivité peut ne pas être unique dans la composante technologique des pratiques du primaire, mais une parmi d'autres. Ainsi peut-elle être couplée avec l'associativité de la multiplication qui permet de décomposer par exemple des produits, pour faire apparaître des facteurs puissances de 10, (avec des quotients éventuels comme 50 = 100 : 2) et donc à des technologies relevant de la numération décimale de position. On voit aussi s'exercer un jeu très fin entre changements d'écritures de nombres, (comme quotients ou produits de puissances de 10), propriétés des opérations (associativité de la multiplication mais aussi l'utilisation implicite de $a \times (b \div c) = (a \times b) \div c$) et programmes de calcul à effectuer, avec notamment les propriétés de l'écriture décimale de position.

En outre, pour un même spécimen du type de tâche T_{calc_m}, consistant à calculer mentalement un produit de deux nombres entiers, les couples (τ ;θ) peuvent varier. C'est là l'un des objectifs du calcul mental raisonné en primaire : les comparaisons de techniques et de leur efficacité selon les nombres en jeu permettant par ailleurs d'en évaluer les domaines d'efficacité. Ainsi l'extrait suivant du DicoMaths lié aux manuels CapMaths pour le cycle 3 institutionnalise-t-il trois techniques pour calculer mentalement 5×16 :

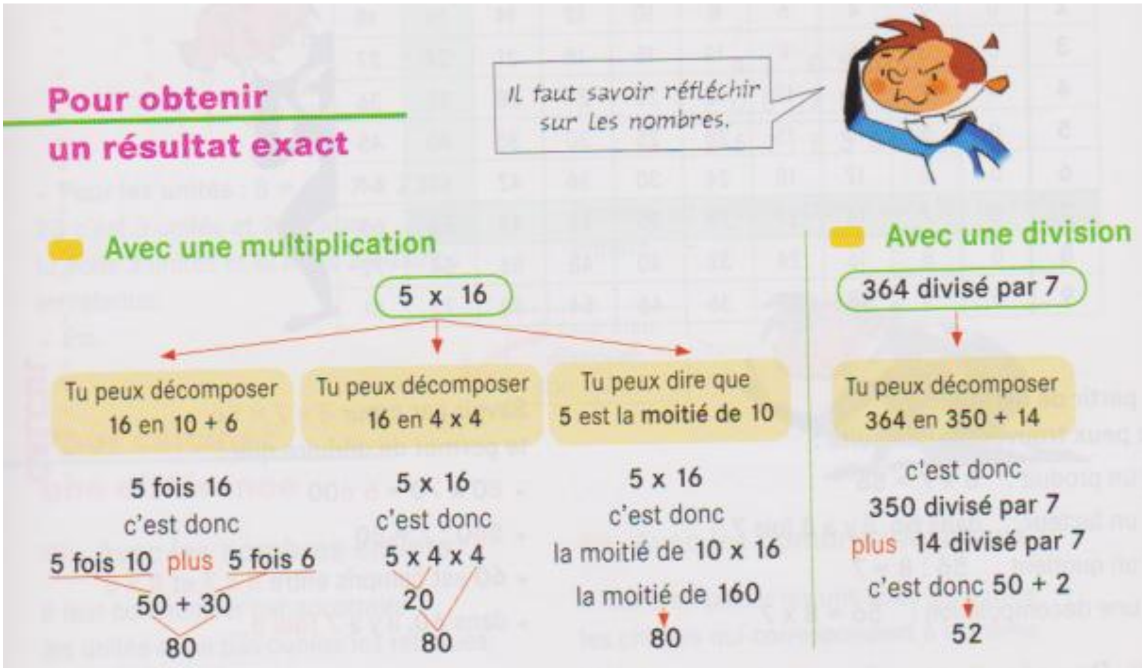


Figure 2.24 – Le DicoMaths cycle 3 2010 p. 18

La première technique repose sur la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition utilisée en acte. Les autres techniques s'appuient sur des écritures différentes de nombres que nous avons mentionnées plus haut –sous la forme de produits ou de quotients permettant de faire apparaître des puissances de 10-. Les propriétés de la multiplication engagées sont donc de différente nature. Ainsi le type de tâche consistant à calculer mentalement un produit apparaît-il subdivisé en trois praxéologies reposant sur des composantes technologiques différentes.

Ceci amène à s'interroger sur les occasions d'emploi de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition ou à la soustraction réellement vécues. Ceci fait écho au lien entre technologie et théorie que nous avons vu dans la première partie de ce chapitre : on peut envisager qu'en certaines occasions, la théorie de l'addition itérée puisse se substituer à la distributivité. Ainsi dans l'extrait précédent du manuel EuroMaths CM_2, le calcul de 23×17 à partir de 23×16 peut-il reposer sur l'égalité $23 \times 17 = 23 \times 16 + 23$ et non sur $23 \times 17 = 23 \times 16 + 23 \times 1$. La subtilité tient à la mention du facteur 1, qui correspond à une décomposition de 17 sous la forme de la somme 16 + 1, et que n'exprime pas la première égalité. On peut *a priori* penser que cette première égalité repose plus directement sur la théorie de l'addition itérée, en utilisant implicitement l'associativité de l'addition :

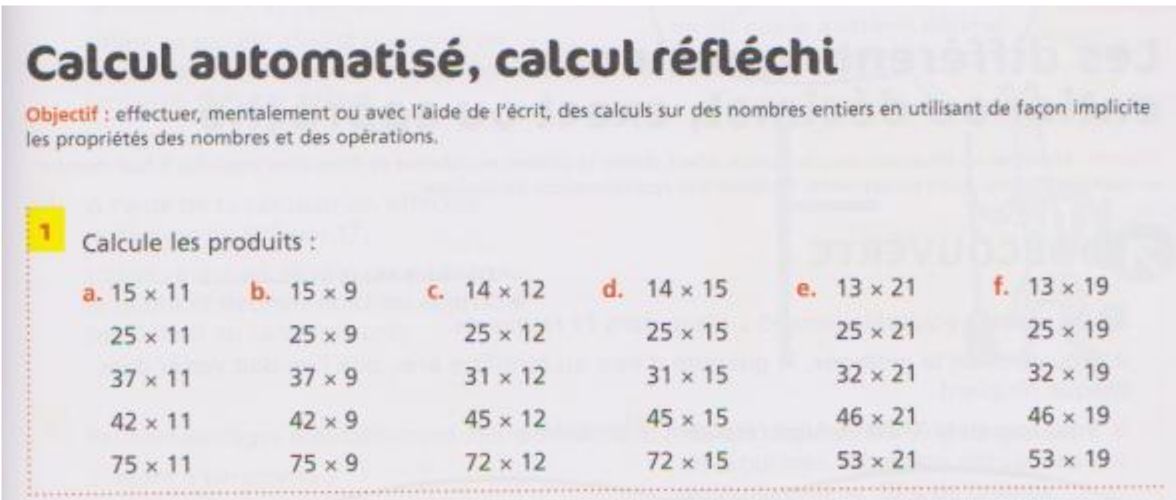
$$23 \times 17 = \underbrace{23 + 23 + \cdots + 23}_{16\ termes} + 23 = 23 \times 16 + 23$$

17 fois 23 est bien une somme de 17 termes tous égaux à 23 dont on peut, par associativité, regrouper les 16 premiers, correspondant au produit 23×16 par définition de la multiplication sur les entiers. Ce faisant, la distributivité n'est pas véritablement utilisée ici. Bien sûr, l'institutionnalisation précédente et les références claires à la distributivité du document Ressources permettent d'assurer qu'elle existe et qu'elle est employée en calcul mental.

Une théorie de l'addition itérée qui prend parfois le pas sur la distributivité

Cas du calcul mental

Néanmoins, pour l'exercice précédent, on peut s'en passer pour 2 des 4 calculs proposés (avec une certaine subtilité pour le second, nous y reviendrons). De même la page 185 du même manuel dont nous avons déjà observé un extrait, montre que les calculs réfléchis proposés peuvent se faire avec peu de recours à la distributivité :



Calcul automatisé, calcul réfléchi

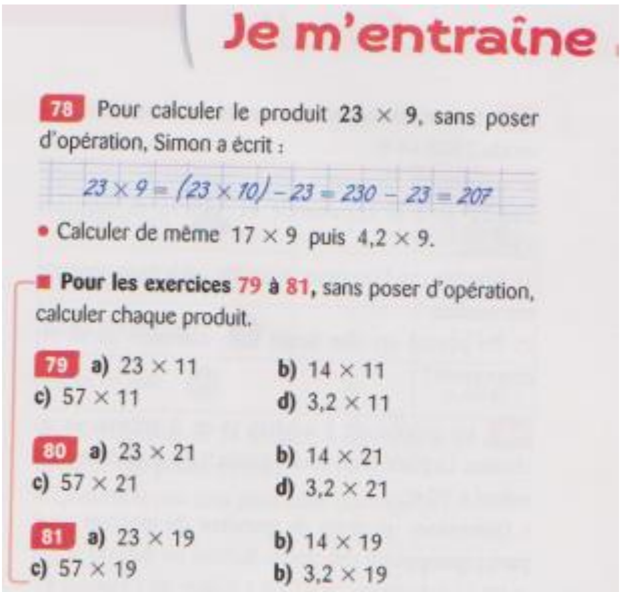
Objectif : effectuer, mentalement ou avec l'aide de l'écrit, des calculs sur des nombres entiers en utilisant de façon implicite les propriétés des nombres et des opérations.

1 Calcule les produits :

a.	b.	c.	d.	e.	f.
15 × 11	15 × 9	14 × 12	14 × 15	13 × 21	13 × 19
25 × 11	25 × 9	25 × 12	25 × 15	25 × 21	25 × 19
37 × 11	37 × 9	31 × 12	31 × 15	32 × 21	32 × 19
42 × 11	42 × 9	45 × 12	45 × 15	46 × 21	46 × 19
75 × 11	75 × 9	72 × 12	72 × 15	53 × 21	53 × 19

Figure 2.25 - EuroMaths CM_2 2009 p. 185

Comme nous l'avons déjà vu, si elle peut être à l'œuvre pour l'ensemble des calculs, la question du remplacement par la théorie de l'addition itérée est posée par le fait que les facteurs de droite engagent des décompositions faisant apparaître *a priori* des termes égaux à 1, comme 11 = 10 + 1 ; 9 = 10 - 1 ; 21 = 20 + 1 et 19 = 20 – 1. Or, la distributivité nécessiterait à la fois de mettre à jour cette décomposition et d'effectuer des produits par 1, ce qui est certainement moins utile et efficace que le recours direct à la théorie. Ce n'est cependant pas le cas pour les facteurs 12 et 15, dont on peut raisonnablement penser que la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition soit véritablement celle qui soit essentiellement à l'œuvre. Notons bien sûr que pour chacun des calculs, plusieurs techniques peuvent être envisagées. Cet extrait témoigne d'un phénomène possible de remplacement de la technologie par la théorie des praxéologies qui émergent implicitement dans les pratiques du primaire. L'addition itérée peut se substituer à la distributivité, ce qui potentiellement peut réduire les rencontres réellement vécues par les élèves. Le manuel Phare de 6^e^ (2014) montre plus clairement le phénomène où il impose l'addition itérée plutôt que la distributivité comme nous l'avons décrit plus haut :


Je m'entraîne

78 Pour calculer le produit 23 × 9, sans poser d'opération, Simon a écrit :

23 × 9 = (23 × 10) – 23 = 230 – 23 = 207

• Calculer de même 17 × 9 puis 4,2 × 9.

■ Pour les exercices 79 à 81, sans poser d'opération, calculer chaque produit.

79 a) 23 × 11 b) 14 × 11
c) 57 × 11 d) 3,2 × 11

80 a) 23 × 21 b) 14 × 21
c) 57 × 21 d) 3,2 × 21

81 a) 23 × 19 b) 14 × 19
c) 57 × 19 b) 3,2 × 19

Figure 2.26 – Phare 6^e^ 2014 p. 69

Ainsi l'addition itérée peut-elle être à la fois un fondement théorique de la distributivité mais aussi paradoxalement un obstacle à son émergence. Du moins dans ce manuel est-elle shuntée pour le calcul mental. Notons que sur le chapitre intitulé multiplication de ce manuel par exemple, sur l'ensemble des spécimens du type de tâche T_{calc_m}, 5 peuvent reposer sur la distributivité contre 14 qui relèvent de l'addition itérée, 13 sur la commutativité ou l'associativité de la multiplication avec des produits de trois ou quatre facteurs pour se ramener à des puissances de 10, et 51 relèvent directement de techniques reposant sur des technologies de la numération décimale de position (avec des produits par des puissances de 10 ou des produits comme 0,7 × 6 que l'on peut effectuer par exemple comme 6 fois 7 dixièmes qui donne 42 dixièmes qui s'écrit 4,2). On peut en conclure, que les occasions de travail des techniques anciennes de calcul mental en utilisant implicitement la distributivité peuvent s'avérer marginales. Il y a donc un risque d'affaissement dans le curriculum en 6^e^ des praxis anciennes. Cet affaissement peut aussi concerner le calcul posé. Bien qu'il repose sans équivoque sur la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition de façon implicite, nous avons vu plus haut que l'attention était plutôt portée en 6^{e} sur des éléments de numération.

Outre cet affaissement possible dans le curriculum, le lien entre technologie et théorie implicitement utilisée en primaire pose question. Revenons par exemple à l'extrait du document Ressources précité pour le calcul du produit 48 × 250. Les auteurs proposent une autre technique fondée sur la décomposition du facteur écrit à gauche, c'est-à-dire du nombre 48 :

– décomposition additive canonique de 48 : ici 48 multiplié par 250 est « traduit » en 48 fois le nombre 250, soit 40 fois 250 plus 8 fois 250

$48 \times 250 = 40 \times 250 + 8 \times 250 = 4 \times 10 \times 25 \times 10 + 2 \times 4 \times 25 \times 10$

$48 \times 250 = 4 \times 25 \times 10 \times 10 + 2 \times 4 \times 25 \times 10 = 100 \times 10 \times 10 + 2 \times 100 \times 10$

$48 \times 250 = 10\,000 + 2\,000 = 12\,000$

$48 \times 250 = 40 \times 250 + 8 \times 250 = 4 \times 250 \times 10 + 8 \times 250 = 1\,000 \times 10 + 1\,000 \times 2$

$48 \times 250 = 10\,000 + 2\,000 = 12\,000$

Etc.

Figure 2.27 - Le nombre au cycle 3, Apprentissages numériques

Les auteurs suggèrent ici une lecture qui occasionne une inversion du sens de la multiplication, c'est-à-dire en amont de la technique, une utilisation implicite de la commutativité pour ce faire. En effet, 48×250 se lit en toute rigueur 250 fois 48 et la lecture 48 fois 250 pour cette seconde technique décrite, correspond au produit 250×48, si l'on tient compte de la sémantique des expressions en lien avec l'addition itérée. Le fait que les produits soient égaux est une construction qui a lieu en primaire et qui permet d'aboutir à la commutativité de la multiplication. Toutefois, cela change alors la praxéologie. Il y a une rupture dans les écritures proposées par les auteurs par rapport à la description rhétorique du programme de calcul : « 40 fois 250 plus 8 fois 250 » s'écrit en effet $250 \times 40 + 250 \times 8$. Etant donné que les écritures formelles du document ne sont pas attendues des élèves, nous supposerons que la technique visée est celle formulée de façon rhétorique. Les deux premières étapes de la technique peuvent s'écrire sous la forme des égalités suivantes : $48 \times 250 = 250 \times 48 = 250 \times 40 + 250 \times 8$. Du point de vue du sens de la multiplication, 48×250 est une somme de termes égaux à 48 alors que 250×48 est une somme de termes égaux à 250. Cependant, ce passage en premier lieu par la commutativité est nécessaire, en continuité avec la théorie, pour envisager la décomposition d'un facteur qui n'est pas écrit à droite, car c'est ce facteur de droite qui correspond au nombre de termes. Cette technique ne repose pas sur une distributivité à droite de la multiplication par rapport à l'addition, mais bien sur la distributivité à gauche couplée à la commutativité.

Cas du calcul posé

La technique usuelle du calcul posé du produit de deux nombres entiers repose sur la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition avec une décomposition liée à la numération, du facteur écrit en bas. Ceci correspond à l'écriture en ligne de gauche à droite (de haut et bas) et aboutit bien à la décomposition du facteur idoine correspondant à la théorie de l'addition itérée.

Lorsque cette technique est usuellement étendue au produit de nombres décimaux non entiers, la technologie s'exerce toujours sur les nombres entiers, c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'extension technologique à ce moment-là. La technique consiste à calculer un produit d'entiers avant de « placer la virgule », ce qui correspond à une division ainsi que le décrit le manuel suivant :

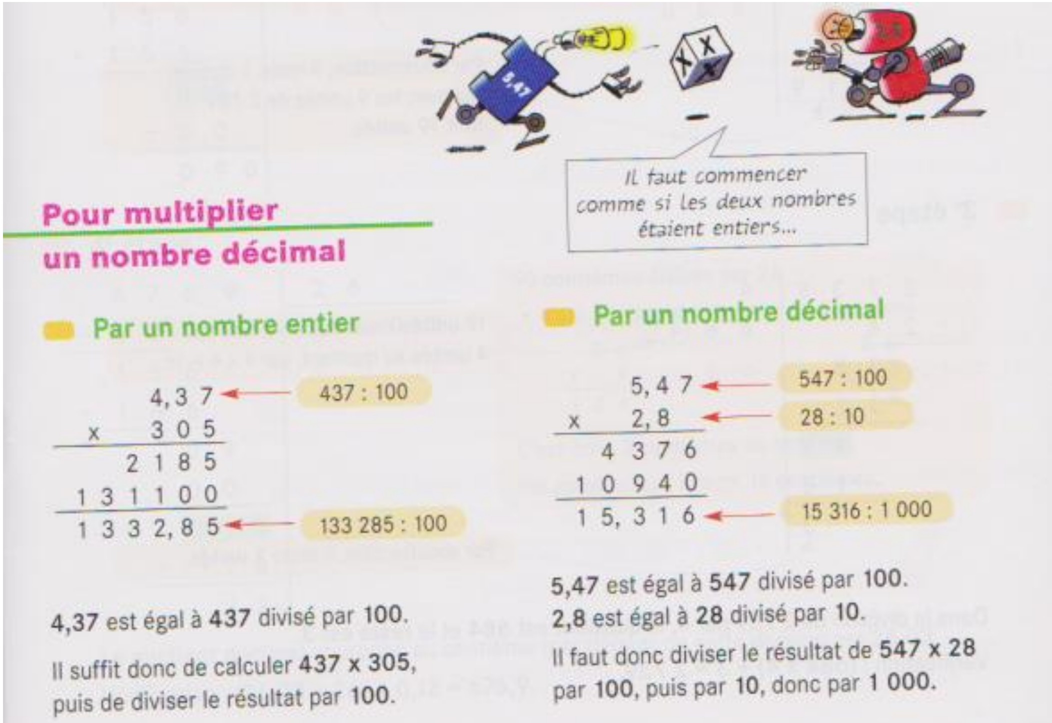


Figure 2.28 – Le DicoMaths cycle 3 2010 p. 18

La distributivité est toujours utilisée sur des nombres entiers dans ce cas.

Le manuel EuroMaths de CM_2 propose une technique alternative dans la partie « découverte » qui repose sur une extension de la technologie de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition sur $\mathbb{D} \times \mathbb{N}$.

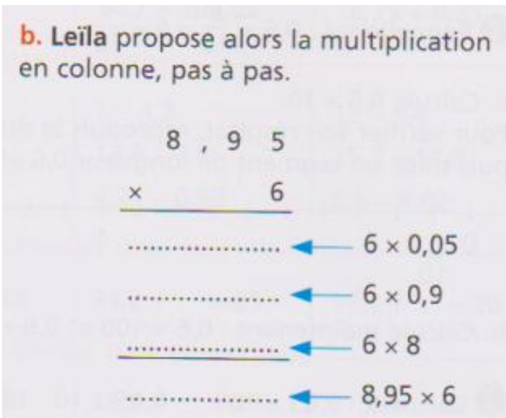


Figure 2.29 – EuroMaths CM_2 2009 p. 90

On notera ici les inversions de produits, qui sont pour le coup, en rupture avec l'addition itérée : la décomposition ne correspond pas à un regroupement de termes lorsqu'on écrit *in extenso* $8{,}95 \times 6 = 8{,}95 + 8{,}95 + 8{,}95 + 8{,}95 + 8{,}95 + 8{,}95$. Il y a donc de façon très ponctuelle (le manuel consacrera le c. de cette même partie à ce qu'il nomme la technique usuelle), une première rencontre avec une extension de la technologie véhiculée, malgré les inversions des écritures du manuel, par $8{,}95 \times 6 = (0{,}05 + 0{,}9 + 8) \times 6 = 0{,}05 \times 6 + 0{,}9 \times 6 + 8 \times 6$ qui relève bel est bien de la distributivité, avec décomposition du facteur écrit à gauche.

Extension aux nombres décimaux ?

Cet exemple qui véhicule une extension implicite de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition sur des nombres décimaux est néanmoins relativement isolé. De la même façon que pour la technique « classique » de la multiplication, les techniques de calcul mental de produits s'affranchissent de l'extension en utilisant des éléments technologiques de la numération décimale. Les exercices demandant de calculer des produits de nombres décimaux mentalement sont plutôt destinés à soutenir la technique de calcul posé. Ainsi de tels calculs n'apparaissent que dans l'unité 9 et l'unité 11 dans CapMath sans apparaître dans les pages de calcul mental et réfléchi jalonnant le manuel. L'unité 9 est consacrée à la multiplication de nombres décimaux par un nombre entier. Les exercices de calcul mental suivent la découverte de la technique posée, et sont soutenus par un produit donné sur les nombres entiers. Par exemple, l'exercice 3 de la page 94 demande de calculer 20,8×15 après avoir demandé de calculer 208×15 mentalement. On voit donc que la distributivité s'exerce sur les nombres entiers. La propriété utilisée ensuite comme technologie pour la multiplication de nombres décimaux peut s'écrire de différentes manières mais repose implicitement sur l'associativité combinée à la commutativité de la multiplication. On peut la décrire par exemple pour le cas précédent, avec les notations suivantes : pour $a \in \mathbb{D}$ tel que $a' = a \times 10 \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$, $(a \times b) \times 10 = (a \times 10) \times b$, ou en utilisant des lectures fondées sur la numération (que l'on peut associer à des écritures avec quotients par 10) : a' dixièmes × b = (a' × b) dixièmes. La distributivité n'est pas véritablement utilisée avec les nombres décimaux. Une seule occasion semble apparaître implicitement à l'unité 11. Il s'agit de calculer des doubles de nombres décimaux comme par exemple le double de 2,4. On peut envisager deux techniques. Soit la précédente consistant à calculer le double de 24 puis à diviser par 10 (ou calculer le double de 24 dixièmes c'est 48 dixièmes) soit, calculer le double de 2 et lui ajouter le double de 4 dixièmes. Notons néanmoins qu'il n'y a aucune institutionnalisation dans le DicoMath de calcul mental de produits de nombres décimaux contrairement aux produits de nombres entiers. Nous pouvons donc en conclure que l'extension sur les nombres décimaux de la technologie est, si elle existe au moins dans des utilisations implicites, marginale.

Multiplicité des formalismes et germes de généralisation

Décompositions : nombre de termes et numération

L'exemple précédent montre aussi une décomposition sous la forme d'une somme de trois termes. Ce qui apparaît pour les calculs posés lorsque les facteurs comportent trois chiffres (non nuls) :

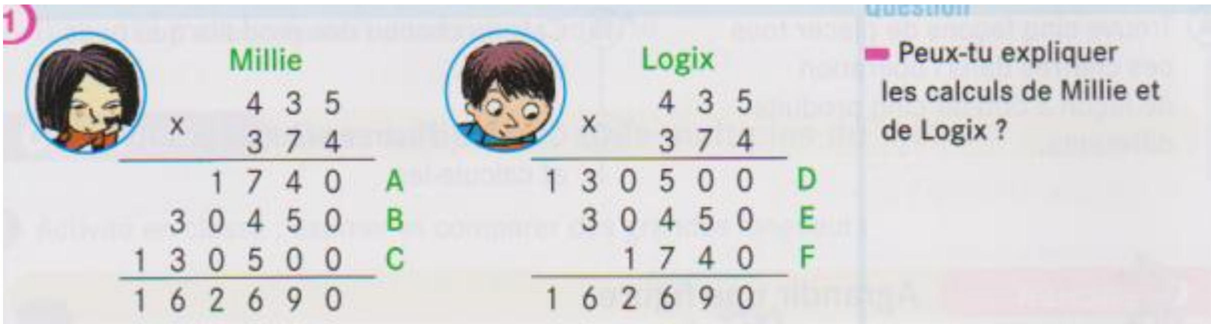


Figure 2.30 – CapMaths CM_2 p. 24

Cet extrait montre également que la forme de l'écriture de la technologie sous-jacente peut être multiple : pour Logix, les produits partiels sont écrits de haut en bas pour les facteurs issus de la décomposition décimale usuelle sous la forme 374 = 300 + 70 + 4. Ce n'est pas l'ordre usuel, qui est plutôt celui de Millie. L'écriture associée de la technologie est alors un peu différente, soit $435 \times (4 + 70 + 300) = 435 \times 4 + 435 \times 70 + 435 \times 300$. La décomposition commence par le chiffre des unités (à gauche dans la somme implicitement utilisée). Ainsi dans l'institutionnalisation proposée par DicoMaths on trouve une écriture symbolique dans le domaine numérique qui respecte bien cet ordre :

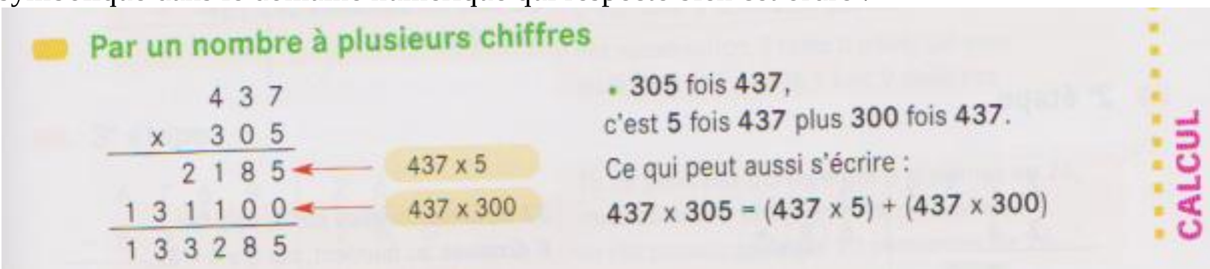


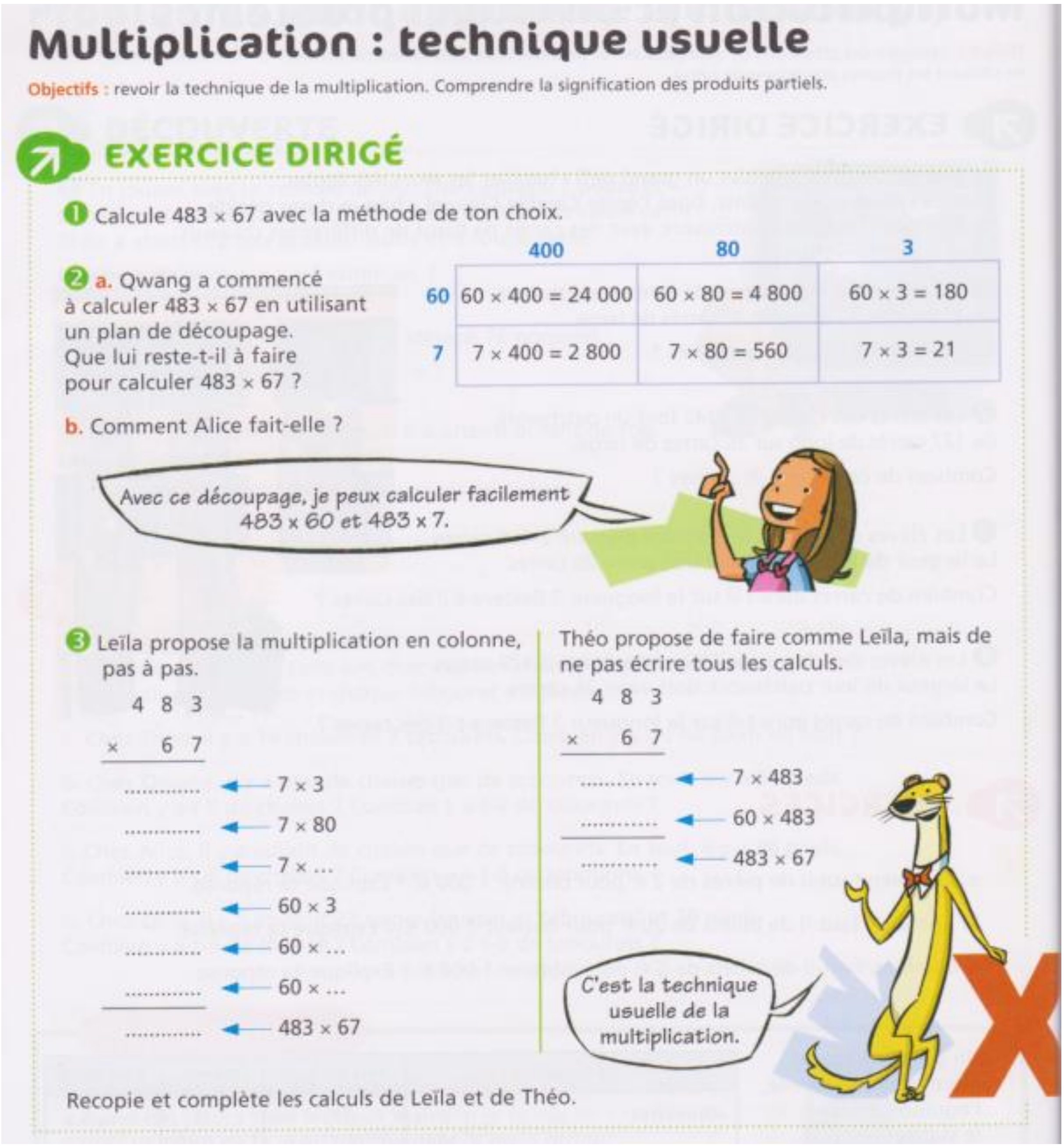
Figure 2.31 – Le DicoMaths cycle 3 2010 p. 18

Expressions rhétorique et symbolique

Cet extrait montre d'ailleurs deux formalismes possibles, à la fois rhétorique et symbolique exprimant une égalité entre le calcul à effectuer, et le programme de calcul effectivement exécuté. Si l'étape de décomposition est implicite, elle apparaît néanmoins dans la partie consacrée au calcul mental de façon tout à fait explicite comme nous l'avons vu plus haut. Cette formulation du reste, tend à faire le lien entre technique (programme de calcul) et addition itérée sur laquelle elle repose. Ceci laisse entendre que la distributivité est bien un intermédiaire technologique implicite.

Extensions en germe ou préconstruites ?

D'autres extensions implicites peuvent apparaître dans les manuels au moment de retrouver le sens de la technique de la multiplication posée. Les deux facteurs des produits sont alors décomposés en sommes issues des décompositions de la numération. De sorte que la distributivité peut être alors double, au sens des programmes de 4^{e}, ou, pourrait-on dire, 'multiple', lorsque les décompositions sont à plus de deux termes. Examinons ainsi les technologies implicites des techniques proposées par le manuel EuroMaths :



Multiplication : technique usuelle

Objectifs : revoir la technique de la multiplication. Comprendre la signification des produits partiels.

EXERCICE DIRIGÉ

1 Calcule 483 × 67 avec la méthode de ton choix.

2 a. Qwang a commencé à calculer 483 × 67 en utilisant un plan de découpage. Que lui reste-t-il à faire pour calculer 483 × 67 ?

	400	80	3
60	60 × 400 = 24 000	60 × 80 = 4 800	60 × 3 = 180
7	7 × 400 = 2 800	7 × 80 = 560	7 × 3 = 21

b. Comment Alice fait-elle ?

3 Leïla propose la multiplication en colonne, pas à pas.

```
    4 8 3
×     6 7
............ ← 7 × 3
............ ← 7 × 80
............ ← 7 × ...
............ ← 60 × 3
............ ← 60 × ...
............ ← 60 × ...
............ ← 483 × 67
```

Théo propose de faire comme Leïla, mais de ne pas écrire tous les calculs.

```
    4 8 3
×     6 7
............ ← 7 × 483
............ ← 60 × 483
............ ← 483 × 67
```


Recopie et complète les calculs de Leïla et de Théo.

Figure 2.32 – EuroMaths CM_2 2009

Le « plan de découpage » comme la multiplication de Leïla utilise une technique reposant sur la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition sous la forme suivante :

$$483 \times 67 = (400 + 80 + 3) \times (60 + 7) = 7 \times 3 + 7 \times 80 + 7 \times 400 + 60 \times 3 + 60 \times 80 + 60 \times 400$$

Les termes et facteurs peuvent être dans un autre ordre apparemment. On voit ici encore avec l'exemple suivant d'Alice, une utilisation d'une distributivité à gauche de la multiplication par rapport à l'addition puisque le facteur à décomposer est 483. On voit apparaître de nouveau une inversion dans les produits partiels de Théo qui sont écrits à l'envers, par rapport au produit donné et au sens de la multiplication. Ceci laisse à penser que les lectures ne sont pas signifiantes, et que l'amalgame est fait entre « fois » et « multiplié par ». Quoi qu'il en soit cet extrait de manuel montre une possible existence de plusieurs formalismes couplés à des blocs [τ ;θ] d'une certaine diversité. La distributivité simple : $483 \times 67 = 483 \times (60 + 7) = 483 \times 7 + 483 \times 60$ ou la distributivité double avec l'un des facteurs sous la forme d'une somme de trois termes : $(400 + 80 + 3) \times (60 + 7) = 7 \times 3 + 7 \times 80 + 7 \times 400 + 60 \times 3 + 60 \times 80 + 60 \times 400$ et avec inversions éventuelles des termes et des facteurs.

Des éléments prégnants dans les praxis anciennes

Prégnance de l'addition

L'analyse quantitative du manuel CapMaths CM_2 (2010) montre tout d'abord, que les tâches données aux élèves relèvent très majoritairement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. Outre l'ensemble des multiplications posées, le calcul mental montre également la prégnance de décompositions additives de l'un des facteurs. La page 17 du manuel par exemple, consacre 36 tâches afférentes au calcul mental et réfléchi. Parmi ces tâches utilisant potentiellement la distributivité de la multiplication en acte, 28 concernent l'addition et 6 seulement la soustraction. Plus encore, les occasions d'emploi de la distributivité de la multiplication par rapport à la soustraction engagent des décompositions de facteurs comme différence dont le deuxième terme est 1. Ainsi trouve-t-on les facteurs 19 = 20 - 1 ou 9 = 10 - 1 ou 24 = 25 – 1 ; ce dernier cas reposant a priori sur un produit par 25 facilité en interprétant le nombre comme le quart de 100.

Un seul produit par 28 est proposé. Or d'une part 28 est écrit à gauche (donc n'est pas a priori le plus probablement décomposable) et d'autre part les produits à calculer sont 28×24 ; 28×25 et 28×26. De sorte que les produits partiels par 30 qu'engageraient l'écriture 28 = 30 – 2, seraient a priori moins facilitants que la technique consistant à commencer par le produit par 25 en multipliant par 100 puis divisant par 4, puisque 28 est un multiple de 4.

On peut donc conclure que si les types de tâches correspondant au calcul mental et posé sont effectivement légitimes pour la construction d'un milieu destiné à introduire la distributivité en 5^e, l'addition est certainement plus favorable que la soustraction.

Prégnance du développement

Par ailleurs, le même manuel montre une dissymétrie dans les praxis anciennes entre développement et factorisation : cette dernière n'aurait qu'une occasion d'emploi implicite au moment de la construction d'une technique permettant de trouver mentalement le quotient et le reste de la division euclidienne de 340 par 5.

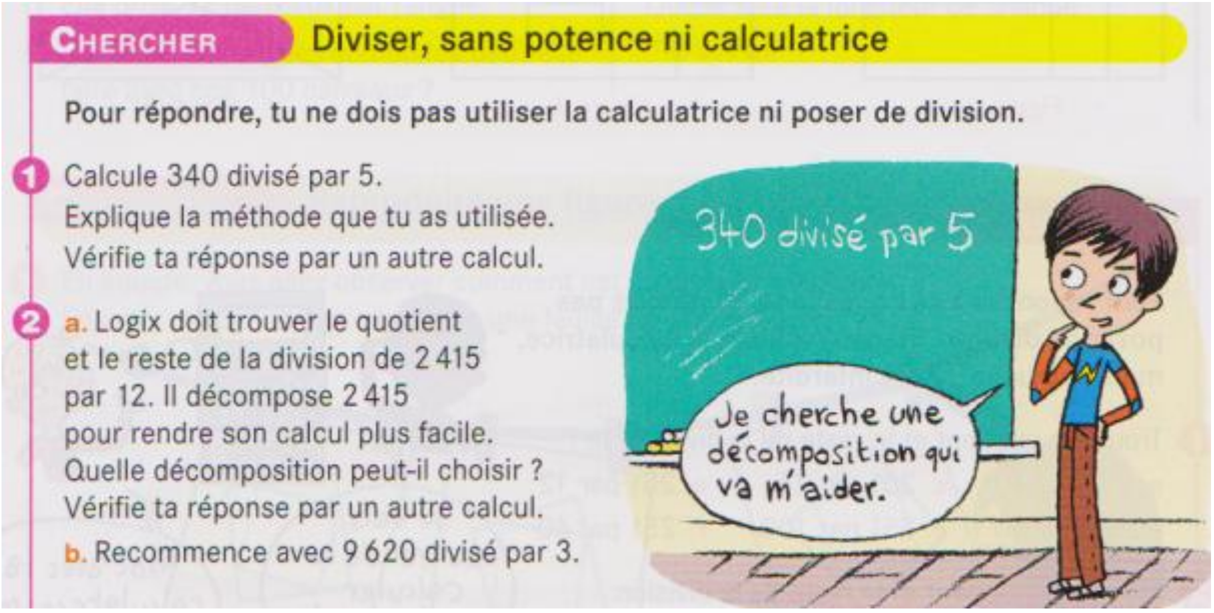


Figure 2.33 – CapMaths CM_2 2010 p. 29

Il s'agirait de décomposer 340 en somme de 300 et 40 pour établir ensuite que 300 c'est 60 fois 5 et que 40 c'est 8 fois 5. En ajoutant 60 et 8 on obtient le quotient cherché car 5×60 + 5×8 = 5×(60 + 8). Mais cette technique, très liée à la définition du quotient par rapport à la multiplication, ne semble pas être celle visée par le manuel. La distributivité de la division par rapport à l'addition (à gauche) est vraisemblablement plus attendue si l'on se fonde sur les exemples suivants sur la même page qui demandent de se reporter à la page 18 du DicoMaths.

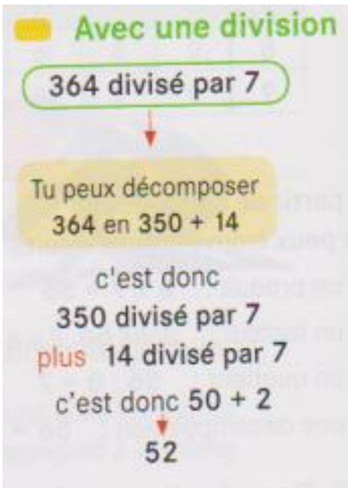


Figure 2.34 – Le DicoMaths cycle 3 2010 p. 18

La technique explicitée correspond en effet à l'égalité $364 \div 7 = (350 + 14) \div 7 = 350 \div 7 + 14 \div 7$. Ce qui apparaît aussi dans le document Ressources associé aux programmes du primaire :

Le calcul du quotient 28 056 ÷ 7

– décomposition additive de 28 056 s'appuyant sur la numération orale et connaissance du répertoire multiplicatif (« table de 7 ») :

$$28\,056 \div 7 = (28\,000 + 56) \div 7 = 28\,000 \div 7 + 56 \div 7 = 4\,000 + 8 = 4\,008$$

Figure 2.35 - Le nombre au cycle 3, Apprentissages numériques p. 38

Ces techniques reposent davantage sur des extensions en acte de la distributivité à une autre opération (la division par rapport à l'addition, à droite) que sur un jeu entre division et multiplication et la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition avec factorisation comme nous l'avons envisagé.

Par ailleurs la technique de division en 5e ne présentant plus de problématicité, elle ne saurait constituer un milieu. Le développement et la factorisation n'ont pas le même statut du point de vue des connaissances anciennes. Le premier sera donc plus idoine pour constituer un milieu pour introduire la distributivité.

Les praxis anciennes de calcul mental et de calcul posé peuvent se révéler éparses, et aux multiples facettes. Elles engagent implicitement des formes très diverses de la même technologie, avec néanmoins un certain manque du côté de la soustraction par rapport à l'addition, et une absence dans le sens de la factorisation. Ceci paraît donc constituer un certain nombre de contraintes à prendre en compte pour pouvoir se saisir des praxis anciennes de calcul à des fins d'introduction de la distributivité comme unifiant ces pratiques. Nous examinons dans la partie qui suit la façon dont les manuels de collège tentent d'engager cette introduction.

2.2.2 Conditions et contraintes pour l'introduction de la distributivité en classe de 5e dans les manuels

Nos analyses concernent l'étude de cinq manuels de la classe de 5e issus de quatre collections différentes : Prisme (2010), Triangle (2010), Phare (2010), Transmath (2010 et 2014) et Sésamath (2010). Les manuels choisis témoignent d'une certaine diversité dans les choix qui peuvent être faits quant à l'organisation des connaissances, et des formes qu'elles peuvent prendre. Notre propos n'est pas d'explorer tous les choix possibles, mais d'observer, au travers d'un certain nombre, la façon dont ils peuvent véhiculer les caractères FUG de la notion de distributivité plus spécifiquement au moment de son introduction, c'est-à-dire en classe de 5e au collège en France actuellement. Nos analyses se centrent donc sur les moments de première rencontre organisés par les manuels au travers des « activités d'introduction » puis sur les moments d'institutionnalisation dans les parties « cours » qui donnent à voir les formalisations choisies et les caractéristiques des mises en texte du savoir. Il s'agit, dans un premier temps, de déceler la place des praxis numériques anciennes au sein des organisations mathématiques nouvelles, et leur possible unification. A cet effet, nous avons conduit une étude des manuels qui proposent des retours sur les pratiques de calcul mental, sachant qu'aucun manuel à notre connaissance n'envisage un véritable retour sur les pratiques de calcul posé à ce moment-là. La distributivité unifie-t-elle alors les praxis anciennes, du moins pour le calcul mental de produits l'utilisant implicitement ? Les situations des manuels permettent-elles de compléter les praxis anciennes, et de prendre en compte la théorie de l'addition itérée ? Les types de tâches correspondant aux développements ou aux factorisations sont-ils unifiés ? Nous complèterons notre étude par un questionnement autour des formalismes afférents, et de l'unification après-coup lorsqu'elle n'est pas envisagée au moment de la construction de la distributivité.

Dans un second temps, nous nous intéressons à une situation que l'on retrouve, avec certaines variantes, dans de nombreux manuels. Elle s'appuie sur des figures construites à partir de rectangles. Cette situation peut-elle être une alternative comme support de formalisation, d'unification et de généralisation pour les savoirs à enseigner sur la distributivité ? Dans quelle mesure peut-elle permettre l'émergence de la propriété comme un savoir FUG ?

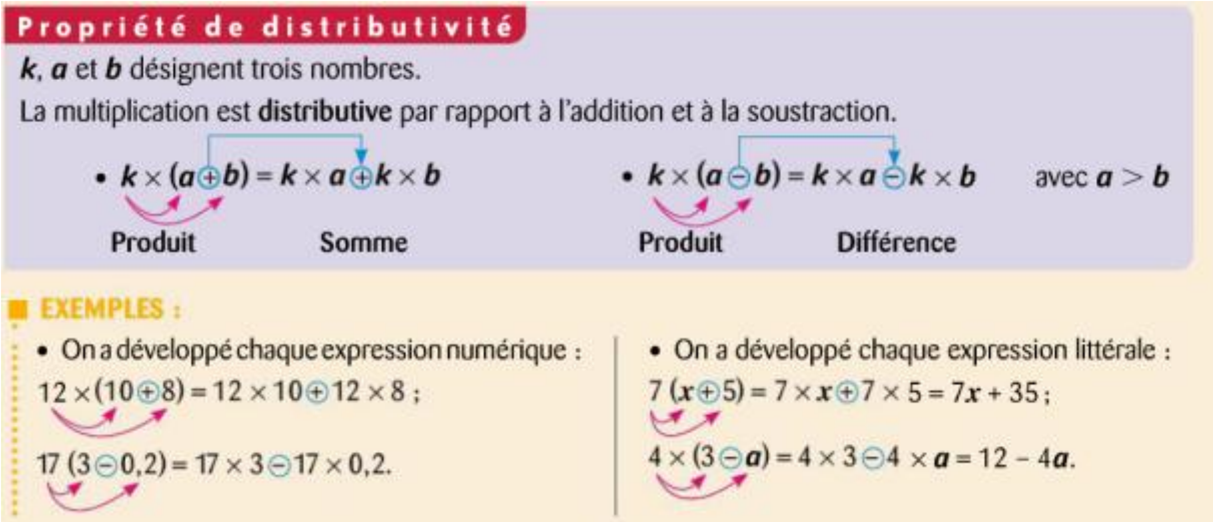
a. Le calcul mental comme levier : une prise en charge des caractères unificateurs et généralisateurs ?

Parmi les manuels que nous avons choisis d'analyser, deux choix différents d'organisation des savoirs sont faits. Les manuels Triangle et Phare abordent la distributivité en même temps que le calcul littéral, tandis que les manuels Transmath et Prisme, abordent la distributivité en amont, dans un chapitre précédent consacré à du calcul d'enchaînement d'opérations (et aux priorités opératoires en particulier). Nous allons voir les conséquences sur la place de la distributivité comme technologie dans le domaine numérique, et sur la prise en compte des techniques anciennes de calcul selon ces deux choix.

Une unification des types de tâches de calcul anciens ?

Aucun des manuels de 5e ne propose de retour sur la technique opératoire de la multiplication posée, que ce soit au moment de l'introduction de la notion ou dans les parties exercices.

Les manuels Triangle et Phare ne proposent de calcul mental de produits qu'à l'occasion d'applications de la technologie de la distributivité dans la partie exercices du chapitre concerné. La distributivité a donc été construite sans prise en compte des praxis anciennes de calcul mental, et a déjà été formalisée par les égalités $k \times (a + b) = k \times a + k \times b$ et $k \times (a - b) = k \times a - k \times b$ à partir de la situation des rectangles. Or cette situation n'est pas davantage reliée aux techniques de calcul mental de produits. Le manuel Phare propose pourtant bien d'utiliser, dans la partie Activité, la distributivité pour effectuer du calcul mental, mais il s'agit d'une différence de deux produits de nombres décimaux, donc d'un calcul reposant sur la factorisation, qui ne correspond pas aux pratiques de l'école primaire. Plus encore, une aide apparaît sous la forme k = 7, 3 ; a = 3, 259 et b = 1, 259 qui ne laisse aucun doute quant au statut de la tâche : il s'agit bien d'utiliser la distributivité, dans son formalisme algébrique. Plus encore, l'idée de calcul, c'est-à-dire de praxis calculatoire, que la distributivité complèterait d'un point de vue technologique n'apparaît pas dans les parties « cours » de ces deux manuels. Pourtant Phare montre une utilisation de la distributivité dans le domaine numérique :



Propriété de distributivité

k, ***a*** et ***b*** désignent trois nombres.

La multiplication est **distributive** par rapport à l'addition et à la soustraction.

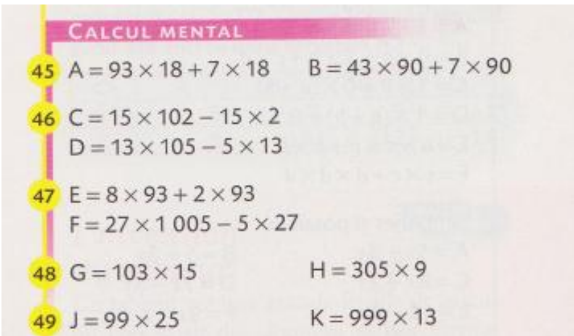
- $k \times (a + b) = k \times a + k \times b$
  Produit — Somme
- $k \times (a - b) = k \times a - k \times b$ avec $a > b$
  Produit — Différence

EXEMPLES :

- On a développé chaque expression numérique :
  $12 \times (10 + 8) = 12 \times 10 + 12 \times 8$;
  $17\,(3 - 0{,}2) = 17 \times 3 - 17 \times 0{,}2$.
- On a développé chaque expression littérale :
  $7\,(x + 5) = 7 \times x + 7 \times 5 = 7x + 35$;
  $4 \times (3 - a) = 4 \times 3 - 4 \times a = 12 - 4a$.

Figure 2.36 - Phare 5e, partie Cours, p. 32

Mais on voit que les manipulations sur les écritures n'ont pas pour objectif d'effectuer un calcul : aucun résultat n'apparaît, seul le travail syntaxique semble visé, peut-être pour unifier, dans la dimension sémio-linguistique les pratiques dans le domaine numérique et algébrique, que soutiennent les ostensifs colorés. Ce faisant, la dialectique entre numérique et algébrique comme entre syntaxique et sémantique est affaissée. Il n'y a pas par exemple de travail de la relation d'égalité, les manipulations ne réfèrent pas à une équivalence de programmes de calcul, dans les deux domaines. Or il s'agit de l'institutionnalisation, de sorte que cette dialectique absente apparaît comme un manque de construction en amont. Ce ne sera que dans la partie exercices que l'on trouvera des exercices de calcul mental (où l'énoncé indique clairement qu'il s'agit de calculer) de produits de deux nombres, dont les facteurs sont écrits sous la forme de nombres (et pas sous la forme d'une somme ou d'une différence) c'est-à-dire des tâches relevant de types de tâches anciens, de calcul. Nous estimons en effet ne pas relever de praxis ancienne les tâches comme calculer de deux façons différentes 9× (7 - 4), car ce genre d'écriture (avec un facteur décomposé) n'apparaît pas en primaire dans les énoncés. En outre, le développement complexifie la tâche calculatoire, ce qui ne correspond pas au principe d'économie dans les calculs (de mémoire, de nombre de calcul à effectuer …) visé lorsqu'on utilise implicitement la distributivité en calcul mental. Ainsi en ne tenant compte que des exercices de calcul mental relevant de praxis anciennes, ces deux manuels consacrent environ 6% des exercices (6/108) pour Phare et environ 2% des exercices pour Triangle (2/121) à du calcul mental de produits.



CALCUL MENTAL

45 $A = 93 \times 18 + 7 \times 18$ $B = 43 \times 90 + 7 \times 90$

46 $C = 15 \times 102 - 15 \times 2$
$D = 13 \times 105 - 5 \times 13$

47 $E = 8 \times 93 + 2 \times 93$
$F = 27 \times 1\,005 - 5 \times 27$

48 $G = 103 \times 15$ $H = 305 \times 9$

49 $J = 99 \times 25$ $K = 999 \times 13$

Figure 2.37 – Ensemble des tâches de calcul mental dans le manuel Triangle 5e

Le manuel Prisme quant à lui, n'envisage de calcul mental dans la partie Activités du chapitre où apparaît la distributivité, qu'après avoir introduit le même formalisme algébrique que pour les manuels précédents, à partir de la situation des rectangles. De sorte que là encore, les techniques de calcul sont recomposées par la distributivité après-coup, c'est-à-dire qu'elles sont une application de la distributivité construite par ailleurs.

Le manuel Transmath (2010) en revanche, prend en compte la question des techniques de calcul mental dans sa partie activité. Au moment de l'introduction de la distributivité, la situation des rectangles n'est pas formalisée dans le cadre algébrique :

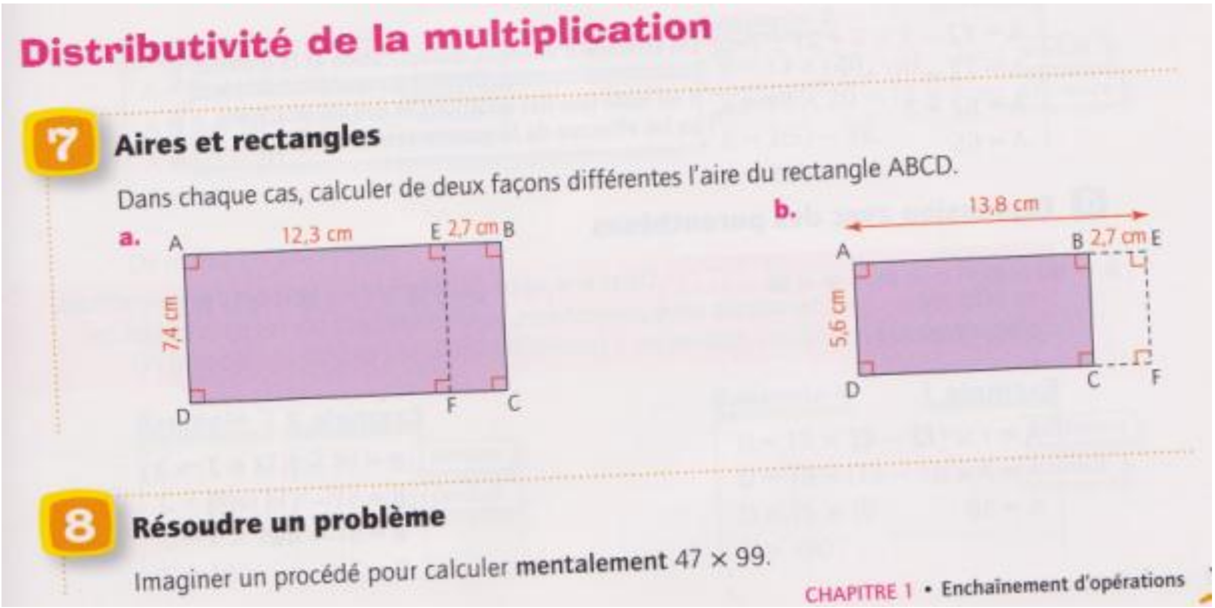


Figure 2.38 – Transmath 5e (2010) p. 15

Plus encore, cette situation est complétée par une deuxième activité consistant à « imaginer un procédé pour calculer mentalement 47×99 ». La formulation met donc l'accent sur la technique de calcul. Mais l'ordre d'exposition de ces deux activités pose question vis-à-vis du projet d'enseignement porté : la situation des rectangles est en effet première. Elle fait intervenir des nombres décimaux non entiers, et modélise à la fois la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition et la distributivité de la multiplication par rapport à la soustraction (le manuel montre de ce point de vue deux dessins). Au contraire, le calcul mental ne concerne que les nombres entiers, et très certainement la procédure liée à l'utilisation de la distributivité par rapport à la soustraction. On attend sans doute avec 99 la description de l'utilisation en acte de l'égalité $47\times(100 - 1) = 47\times100 - 47\times1$. De sorte qu'il apparaît plus probable que cette tâche relève davantage d'une application de ce qui aura pu être formalisé dans l'activité des rectangles, qui porte déjà une certaine généralité, plutôt que d'une construction de la technologie fondée sur l'unification. Il n'en demeure pas moins que l'on peut y voir une préoccupation tournée vers l'unification avec une praxis ancienne *a posteriori*, bien que l'on puisse s'interroger sur les conditions didactiques qui permettraient aux élèves de s'emparer de ce travail dans la globalité des types de tâches afférents.

Pour ces manuels, la prise en charge d'une unification de praxis anciennes ne repose vraisemblablement pas sur une construction explicite, elle paraît donc faible, partielle (il n'y a pas de retour sur le calcul posé) et n'est envisagée qu'*a posteriori*.

Le facteur 1 et la place de la théorie de l'addition itérée : des recompositions ignorées

En examinant les spécimens qui relèvent du type de tâche $T_{calcul\ mental}$: calculer mentalement le produit $a \times b$ de deux nombres a et b (donnés dans le langage des écritures décimales de nombres) en utilisant (implicitement) la distributivité, on obtient les résultats suivants :

	PRISME	PHARE	TRIANGLE	TRANSMATH 2010	SESAMATH
	5e	5e	5e	5e	5e
Partie "Activités"	54×11 47×21 65×19	Absence	Absence	47×99	Table de 11 13×21 12×34 17×1 001 13×19
Partie "Savoir faire"	27×101				

Figure 2.39 – Tableau comparatif des spécimens de calcul mental de produits

A une exception près (pour 12×34), les facteurs b que l'on attend vraisemblablement de décomposer sont à écrire sous la forme $b = \beta \pm 1$où β est 10, 20, 100 ou 1000 (dans le cas général β est le produit d'un nombre entier non nul, par une puissance de 10, non égale à 1) Or, comme nous l'avons vu plus haut, les pratiques du primaire afférentes correspondent plutôt à l'utilisation de l'addition itérée et de la définition de la multiplication sur les entiers (notons du reste que tous les produits sont des produits d'entiers dans ces parties). De sorte qu'utiliser la distributivité dans ce cas est en rupture avec les praxis anciennes. Plus encore, cette technique est en réalité moins efficace, elle demande de penser et d'effectuer un produit par 1 supplémentaire. On ne voit pas très bien pourquoi on modifierait alors les pratiques anciennes pour les remplacer par cette technique utilisant la distributivité. A moins de chercher une unification des types de tâches et des techniques de calcul mental de produits. Auquel cas, cela passe par une réorganisation, en complétant par la distributivité, puis en hiérarchisant et articulant addition itérée et distributivité, l'une étant théorie, l'autre technologie. Or, un seul des manuels propose une occasion de décomposer un facteur en somme dont aucun des termes ne soit égal à 1, le manuel Sésamath. Examinons donc l'activité dédiée au calcul mental. La première question est consacrée au calcul de 11×15 et 17×11 dont on demande d'abord de décrire sous forme rhétorique le programme de calcul à exécuter.

« onze fois quatorze », c'est « dix fois quatorze plus une fois quatorze ».

Comme Lucie n'a pas très bien compris, Anthony écrit alors :

$$\begin{aligned} 11 \times 14 &= 10 \times 14 + 1 \times 14 \\ &= 140 + 14 \\ &= 154 \end{aligned}$$

1. Écris la phrase puis le calcul pour 11 × 15 et 17 × 11.

Figure 2.40 – Manuel Sésamath 5e p. 16

Or la phrase introductive qui joue le rôle de technologie, et de support à la technique de calcul, est en rupture avec les écritures symboliques du point de vue de la théorie de l'addition itérée. En effet « onze fois quatorze » s'écrit 14×11 (c'est une somme de onze termes tous égaux à 14) et « dix fois quatorze plus une fois quatorze » s'écrit 14×10 + 14×1 (on regroupe les dix premiers termes et il reste un onzième terme que l'on peut écrire sous la forme d'un produit par extension de la définition de la multiplication par addition itérée pour le facteur 1)

Aucune mention n'apparaît, ni aucun lien, à quelque moment que ce soit, avec l'addition itérée. Elle n'est identifiée ni comme technologie ni comme technique. La question qui se pose alors est celle de la praxéologie que tente de construire l'activité du point de vue du *logos*. La composante praxique semble s'exprimer de la manière suivante :

T : calculer mentalement le produit d'un nombre *n* par 11.

τ : écrire une phrase sur le modèle « onze fois *n* c'est dix fois *n* plus une fois *n* » puis la traduire sous forme d'écriture symbolique numérique avant d'effectuer le programme de calcul donné.

Dans cette technique apparaît une dialectique entre description rhétorique et écriture symbolique, mais aussi entre mathématique et rhétorique. La phrase donnée énonce une équivalence de programmes de calculs. La justification de l'équivalence du point de vue mathématique peut se faire soit à partir de la théorie de l'addition itérée, soit à partir de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. La justification ensuite, du passage de la formulation rhétorique à la formulation symbolique, pose question en raison des inversions des écritures des produits, par rapport au sens que l'on donne à la multiplication.

Les écritures des produits en échangeant les facteurs de ce point de vue, peuvent dans la dimension mathématique se justifier de deux manières. Si la théorie sous-jacente est bien celle de l'addition itérée (en accord avec les constructions du primaire), alors on emploie implicitement la commutativité de la multiplication, et ce, pour chaque produit, quelque part dans le passage de la formulation rhétorique à la formulation symbolique numérique. Rien pourtant ne paraît l'indiquer : il semblerait qu'il y ait une 'simple' traduction, mais ces inversions des facteurs sont alors de nature à affaisser la dialectique entre les dimensions sémio-linguistique et mathématique, et ce d'autant que l'équivalence n'est pas questionnée et semble revêtir un caractère préconstruit. Ou bien le produit peut-être indifféremment écrit (la commutativité est axiome) et on emploie la distributivité à gauche ou à droite (puisque les deux spécimens montrent des écritures avec le facteur 11 tantôt à gauche tantôt à droite). Mais aucune décomposition du facteur 11 en 10+1 n'apparaît, et la décomposition est visiblement laissée dans l'implicite. Ceci laisse penser que la composante technologique soit évanescente dans la praxéologie en construction.

Quelle que soit l'organisation mathématique visée, qui n'est pas transparente, non seulement les composantes technologico-théorique semblent peu questionnées voire restent dans l'implicite, mais encore, la dialectique entre les dimensions sémio-linguistique (entre rhétorique et symbolique) et mathématique dysfonctionne du point de vue des praxéologies anciennes construites au primaire. On peut se demander du reste si la distributivité ne demeure pas ici en acte comme au primaire, sans assumer son rôle technologique. Cette interprétation semble renforcée par les questions suivantes :

2. Recopie puis complète la table de 11 suivante.

×	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
11					154						

3. Lucie propose alors de calculer 13 × 21 en procédant de façon similaire. Elle note ses calculs intermédiaires dans le tableau ci-dessous.

×	20	1
13	260	13

Elle obtient : 13 × 21 = 273.

Explique comment elle a obtenu 273 comme résultat.

4. Calcule les produits suivants en présentant les résultats intermédiaires dans un tableau.

- 12 × 34
- 17 × 1 001

5. Anthony fait remarquer que l'on peut aussi calculer facilement 13 × 19 à partir des résultats intermédiaires notés dans le tableau. Calcule ce produit.

Figure 2.41 – Manuel Sésamath 5e p. 16

Après le tableau de la table de 11, apparaît un nouvel ostensif support de la multiplication 13×21. Ce qui est étonnant, c'est que cet ostensif est assez proche de celui de la multiplication posée, car on y voit les produits partiels. La disposition est cependant horizontale plutôt que verticale, et le nombre 21 n'apparaît plus. La décomposition apparaît presque pourtant par rapport à la première question puisqu'on voit les nombres 20 et 1 (sans la somme). L'élément unifiant est toujours la technique précédente, c'est-à-dire la phrase du début de l'activité : l'énoncé précise que Lucie procède de la même manière, mais note ses calculs intermédiaires dans un tableau. Pourtant, l'écriture de la distributivité n'apparaît pas davantage (la somme en particulier manque), aucune question technologique n'est soulevée et le lien avec le calcul posé est absent. Même dans le cas du produit 12×34 l'on peut envisager que les pratiques du primaire restent incomplètes, c'est-à-dire que la distributivité n'y prenne pas véritablement de place comme élément technologique.

Dans ces manuels où le calcul mental est pourtant pris en compte au moment de l'introduction, les praxéologies de calcul mental organisées, non seulement ne permettent pas de revisiter pour les compléter les pratiques anciennes du primaire, mais plus encore, en mettant en avant des cas où le facteur 1 apparaît, construisent finalement d'autres techniques, à côté, (concurrentes ? et moins efficaces) fondées sur la distributivité, sans unifier au moyen de l'addition itérée, les techniques anciennes. Il y a donc une sorte de contre unification avec cette coexistence de deux techniques disjointes pour ces calculs. Elle est même explicite dans le manuel Transmath (2010) dont l'exercice 86 donne comme aide : « Pour multiplier par 11, on multiplie par 10 et au produit obtenu, on ajoute le nombre à multiplier par 11 ».

La prégnance de spécimens présentant ce facteur égal à 1dans les parties exercices est du reste de nature à renforcer ce phénomène, que l'on observe quelle que soit l'importance accordée aux tâches calculatoires (une grande variété existe de ce point de vue selon les manuels : le manuel Triangle propose ainsi 4 produits à effectuer mentalement, contre 13 pour Sésamath, 24 pour Prisme ou 26 pour Transmath) :

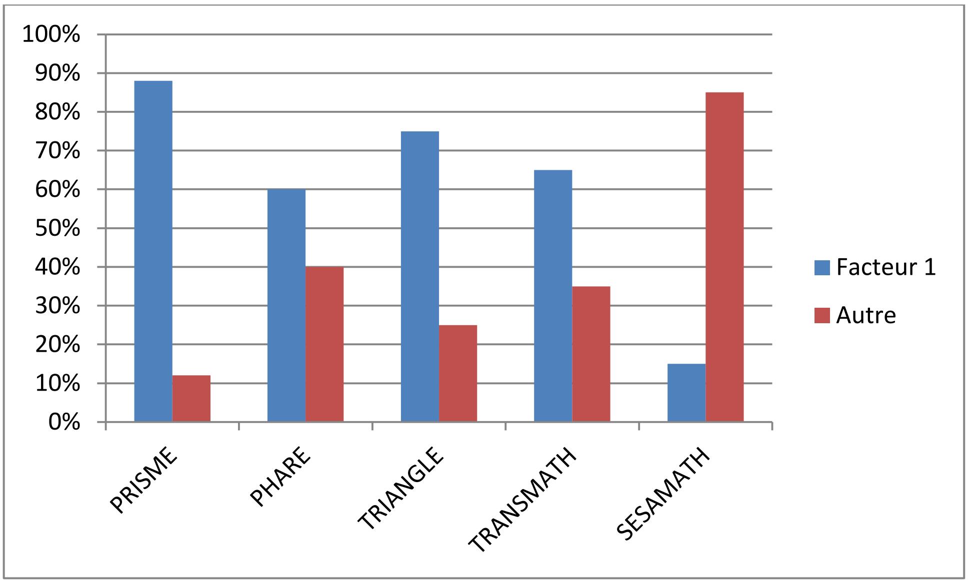


Figure 2.42 – Comparaison relative des places des spécimens de calcul engageant avec la distributivité, un facteur égal à 1 dans les produits partiels

Le fait que le manuel Sésamath soit le seul à proposer plus de spécimens engageant des décompositions additives sans terme égal à 1 *a priori*, est peut être surprenant compte tenu de l'activité centrant la grande majorité de ses tâches sur ce cas. Nous y voyons là un effet : celui d'unifier des pratiques d'un point de vue formel, avec le même usage de la distributivité en acte. Bien sûr le fait que ces calculs apparaissent dans le chapitre correspondant à cette propriété laisse penser qu'elle pourra faire partie des praxéologies, mais le travail pour ce faire n'est pas organisé par le manuel, laissant à la charge de l'élève d'en percevoir les implicites. La recomposition des organisations mathématiques ne sera donc pas à l'étude.

On peut aussi envisager que la coexistence des pratiques fondées sur l'addition itérée pour les produits du genre précédent, puisse avoir pour effet de dissocier les praxéologies de calcul mental fondées sur le développement ou sur la factorisation. Dans le cas des factorisations en effet, on ne pourrait envisager qu'elles s'appuient sur l'addition itérée que dans le cas où le facteur 1 n'apparaitrait pas. Dans les manuels qui montrent de telles écritures (Sésamath et Phare), un seul exercice propose de tels spécimens de calcul mental[38] de somme ou de différence de produits, de sorte que l'on ne peut parler d'une véritable prise en compte d'une dialectique entre technologie et théorie de l'addition itérée couplée au calcul mental de produits ou de sommes (de produits ayant un facteur commun) de ce point de vue.

Nous allons maintenant nous pencher sur le rôle donné dans l'existant à la technologie de la distributivité pour l'unification des types de tâche de calcul mental utilisant le sens du

[38] Nous distinguons ici aussi les spécimens relevant du calcul de ceux dont les genres de tâche sont l'écriture d'égalité (développement ou factorisation) sans visée d'exécution, ou de contrôle d'égalités, quoi qu'il en soit, y compris dans ces cas, le facteur 1 non écrit est extrêmement rare dans les manuels analysés, par exemple un seul spécimen dans chacun des manuels Prisme et Transmath montre de telles écritures dont on doit vérifier une égalité numérique dans le sens de la factorisation.

développement (correspondant aux pratiques anciennes) et ceux utilisant le sens de la factorisation (types de tâche nouveaux).

Des unifications parcellaires au moment de la construction : développement et factorisation dans le calcul mental

Pourtant les manuels proposent tous des calculs de ce type en partie exercices. Au moment de la construction, certains s'emparent du type de tâche : calculer une somme ou une différence de produits ayant un facteur commun. Ainsi le manuel Phare propose-t-il une tâche relevant de ce type comme nous l'avons vu plus haut en partie activités. Néanmoins, il n'y aura pas, dans cette même partie, de calcul mental de produits, l'utilisation du sens de la factorisation se fera sans retour au sens du développement, de sorte que l'unification ne semble pas un enjeu d'apprentissage. Au contraire, le manuel Transmath ne propose qu'une seule tâche de calcul mental correspondant à un développement, avec les mêmes effets. Le manuel Prisme offre, quant à lui, dans une même activité, trois calculs engageant un développement et trois calculs engageant une factorisation. Mais les facteurs pour le développement, qui sont 19, 21 et 11, posent question au regard de la technologie réelle sur laquelle peuvent reposer les techniques comme nous l'avons vu plus haut.

L'unification véhiculée par les agrégations potentielles des praxéologies anciennes et nouvelles, complétées à la fois du point de vue technologique et théorique, semble un enjeu ignoré ou faiblement exploré dans l'existant. Manuels et enseignants se font écho d'une faible prise en charge dans leurs projets d'enseignements, ou du moins d'une construction inaboutie. Ainsi le calcul posé semble-t-il ignoré dans les pratiques, tout comme l'environnement théorique de l'addition itérée qui pourtant, pourrait être un support d'unification. Au contraire, elle apparaît comme obstacle à l'unification des techniques anciennes de calcul mental s'y appuyant, lorsque les manuels font coexister, avec des produits par 1, deux techniques sans que soit mise à l'étude leur articulation. Le bloc technologico-théorique est donc peu exploré au moment de la construction à la fois de la technologie et des nouvelles praxis s'y adossant et la place et le rôle de la distributivité questionnable dans les pratiques numériques.

On peut bien sûr supposer que les recompositions idoines des organisations mathématiques éparses auront lieu a posteriori au moment du travail des types de tâche de calcul mental, dans les exercices, mais d'une part le travail est très inégal selon les classes, ou les manuels, et d'autre part, elles seront laissées à la charge de l'élève si elles ont lieu. La dialectique entre ancien et nouveau apparaît donc faible, si ce n'est muette, dans les pratiques existantes.

	PRISME	PHARE	TRIANGLE	TRANSMATH 2014	SESAMATH
	5e	5e	5e	5e	5e
Entiers naturels	74	22	10	34	19
Nombres décimaux (non entiers, en écriture décimale)	36	25	1	25	26
Nombres rationnels	0	0	0	0	0

Figure 2.43 – Tableau comparatif, au moment de l'introduction de la distributivité, des types de nombres engagés dans les exercices.

La construction d'une généralisation est donc pour le moins incomplète, si ce n'est absente dans les projets des manuels (on ne voit pas de tels questionnements dans les parties activités).

Généralisation et formalisation : une tentative de discours

Le manuel Transmath de 5^e (édition 2010) est le seul ouvrage parmi les cinq analysés proposant deux formalismes pour la propriété de distributivité. Il est à noter de plus que la première rencontre avec cette technologie a lieu dans le premier chapitre relatif au calcul numérique. Nous avons vu précédemment que dans cette édition, on trouvait à la fois la situation des rectangles et une activité de calcul mental. Au moment de l'institutionnalisation dans la partie « Cours » du manuel, la propriété est d'abord énoncée sous forme rhétorique, puis sous la forme d'une écriture que l'on pourrait qualifier de pré-algébrique usant des signes opératoires de l'arithmétique et de formes géométriques colorées en lieu et place de lettres.

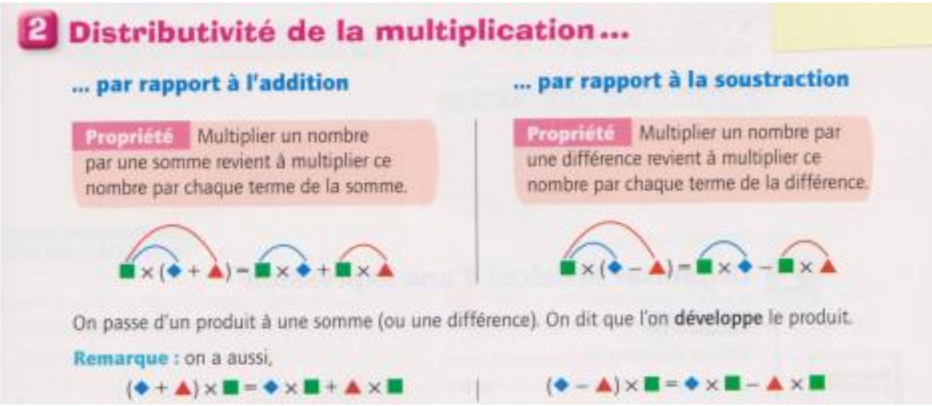
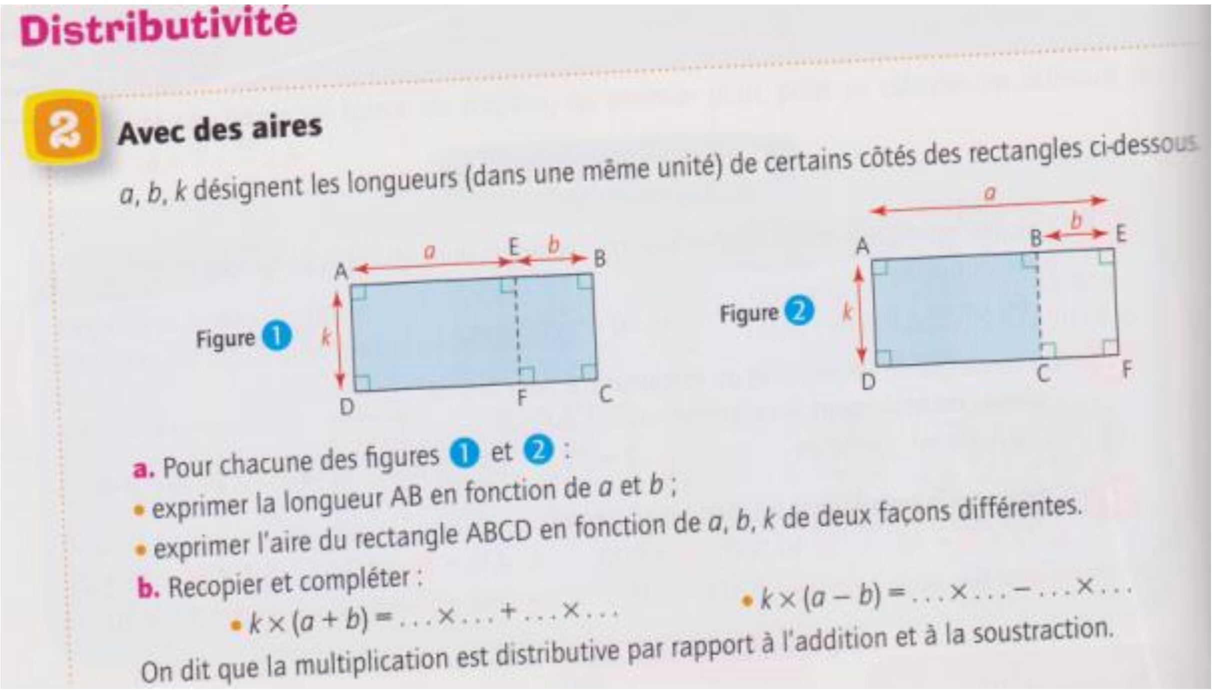


Figure 2.44 – Extrait du manuel Transmath 5^e, 2010

Cette mise en texte de la distributivité sous la forme d'une propriété énonçable est tout à fait originale eu égard aux manuels analysés (et plus encore à l'édition 2014 suivante, dont cet énoncé a été supprimé). Apparaît bien l'idée d'une équivalence de programmes de calculs, portant un certain lien entre la dimension mathématique et celle des écritures même si l'évocation d'un nombre plutôt que d'un facteur peut ne pas revêtir toute la généralité possible.

Mais le discours est ici lacunaire : il n'est pas fait mention de la dernière étape à accomplir consistant à ajouter ou soustraire les produits obtenus. De sorte qu'il semble que sa fonction ne consiste qu'à soutenir les écritures pré-algébriques : il ne peut être utilisé sans elles, et par suite se constituer comme technologie autonome. Plus encore peut-on s'interroger sur ce choix de formalisme intermédiaire avec des figures géométriques tournées vers l'idée de pattern plutôt que d'utiliser le symbolisme algébrique, et des liens que ces différentes écritures entretiennent.

Dans cette perspective, l'exposition des connaissances au chapitre correspondant aux écritures littérales est extrêmement surprenante. Tout d'abord, la modélisation de la situation des rectangles est recommencée dans la partie activités -comme si le travail réalisé dans le numérique n'existait pas- :



Distributivité

2 Avec des aires

a, *b*, *k* désignent les longueurs (dans une même unité) de certains côtés des rectangles ci-dessous.

a. Pour chacune des figures 1 et 2 :
- exprimer la longueur AB en fonction de *a* et *b* ;
- exprimer l'aire du rectangle ABCD en fonction de *a*, *b*, *k* de deux façons différentes.

b. Recopier et compléter :
- $k \times (a + b) = \ldots \times \ldots + \ldots \times \ldots$
- $k \times (a - b) = \ldots \times \ldots - \ldots \times \ldots$

On dit que la multiplication est distributive par rapport à l'addition et à la soustraction.

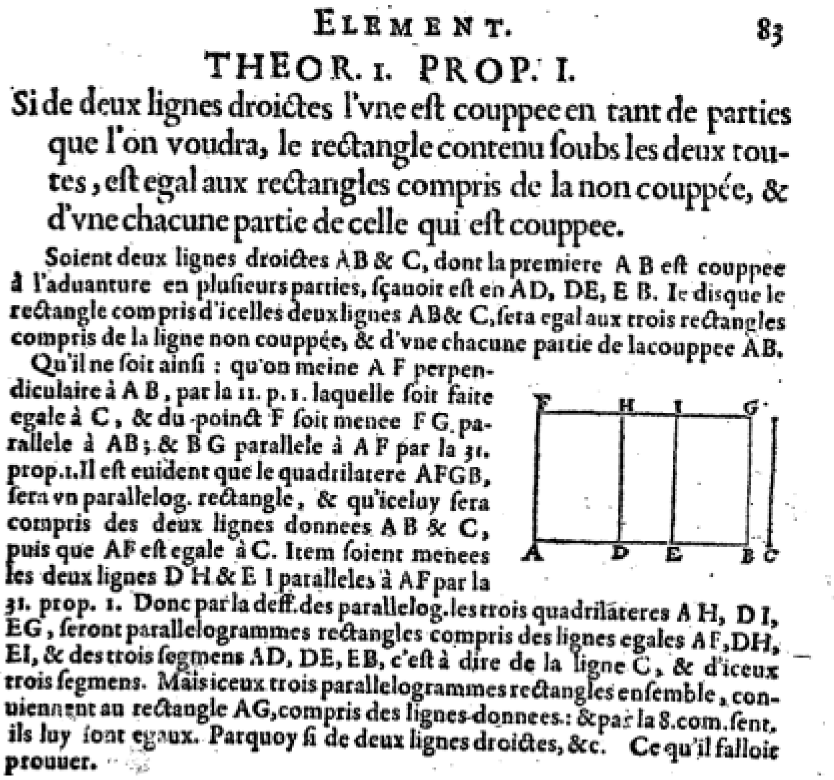
Figure 2.45 – Extrait du manuel Transmath 5^{e}, 2010

Ce n'est pourtant pas le cas de la situation de calcul mental. La propriété porte le même nom mais aucun lien ne semble être envisagé avec le travail antérieur, et le symbolisme pré-algébrique n'apparaît plus.

D'autre part, les écritures symboliques de la distributivité ne s'accompagnent plus d'un discours à l'instar du premier chapitre au moment de l'institutionnalisation. On peut donc se demander si cette organisation du texte du savoir n'aura pas un effet contre-unificateur, séparant un peu plus non seulement les pratiques mais aussi la technologie dans les domaines du numérique et de l'algébrique (même si elle porte le même nom de distributivité).

b. La situation des rectangles : une alternative comme support de généralisation ?

La situation des rectangles telle qu'on la retrouve dans certains manuels, reprend la figure que l'on trouve dans les éléments d'Euclide.



ELEMENT. 83

THEOR. 1. PROP. I.

Si de deux lignes droictes l'vne eſt couppee en tant de parties que l'on voudra, le rectangle contenu ſoubs les deux toutes, eſt egal aux rectangles compris de la non couppée, & d'vne chacune partie de celle qui eſt couppee.

Soient deux lignes droictes AB & C, dont la premiere A B eſt couppee à l'aduanture en pluſieurs parties, ſçauoir eſt en AD, DE, E B. Ie disque le rectangle compris d'icelles deux lignes AB& C, ſera egal aux trois rectangles compris de la ligne non couppée, & d'vne chacune partie de la couppee AB.

Qu'il ne ſoit ainſi : qu'on meine A F perpendiculaire à A B, par la 11. p. 1. laquelle ſoit faite egale à C, & du poinct F ſoit menee F G parallele à AB; & B G parallele à A F par la 31. prop. 1. Il eſt euident que le quadrilatere AFGB, ſera vn parallelog. rectangle, & qu'iceluy ſera compris des deux lignes donnees A B & C, puis que AF eſt egale à C. Item ſoient menees les deux lignes D H & E I paralleles à AF par la 31. prop. 1. Donc par la deff. des parallelog. les trois quadrilateres A H, D I, EG, ſeront parallelogrammes rectangles compris des lignes egales AF, DH, EI, & des trois ſegmens AD, DE, EB, c'eſt à dire de la ligne C, & d'iceux trois ſegmens. Mais iceux trois parallelogrammes rectangles enſemble, conuiennent au rectangle AG, compris des lignes donnees : & par la 8. com. ſent. ils luy ſont egaux. Parquoy ſi de deux lignes droictes, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

Figure 2.46 – Les quinze livres des éléments géométriques d'Euclide : plus le livre des donnez du mesme Euclide aussi traduict en françois par ledit Henrion, et imprimé de son vivant (1632) (bnf.fr)

Il s'agit d'un rectangle découpé en sous-rectangles dans le sens de la longueur, ou plus exactement, en ce qui concerne les Eléments, de deux lignes dont l'une est découpée, et dont l'autre servira pour construire des rectangles. Des figures analogues sont présentes dans les parties consacrées à des 'activités' d'introduction, pour l'ensemble des manuels Triangle 2010, Prisme 2010, Transmath 2010 et 2014, Phare 2010, et Sésamath 2010. Les caractéristiques cependant peuvent différer d'un manuel à l'autre.

Caractère unificateur de praxis anciennes de résolution de problèmes arithmétiques, la question des systèmes et des modèles

Le système des rectangles véhicule une certaine unification à partir d'un même ostensif, de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition et par rapport à la soustraction.

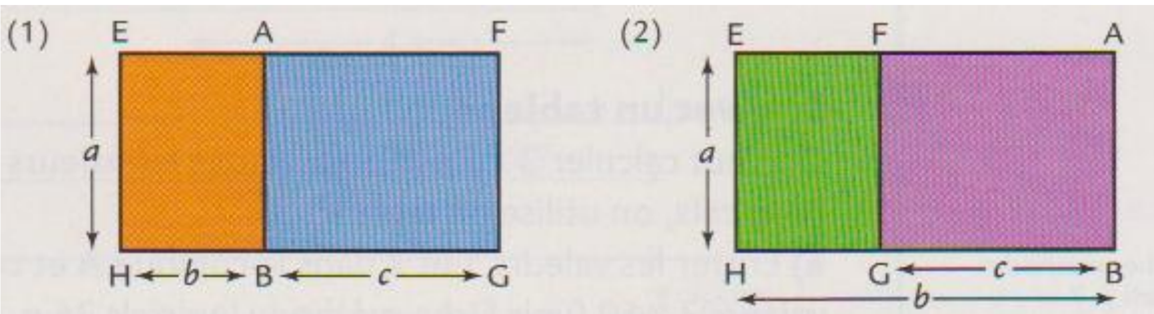


Figure 2.47 – Triangle 5e Activité p.124

Ainsi le système est celui du rectangle découpé, et selon les choix de trois variables du système (la largeur et les petites longueurs ou la largeur et la grande longueur et une des petites), le modèle de calcul de l'aire du rectangle EFGH ici s'exprime sous la forme d'une égalité mettant en jeu une somme ou une différence : $a(b+c) = ab + ac$ dans le premier cas et $a(b-c) = ab - ac$ dans le second. Notons par ailleurs que ce formalisme peut s'écrire dans le sens du développement comme nous l'avons fait ou dans le sens de la factorisation, il n'y a *a priori* pas lieu de choisir l'un ou l'autre pour le calcul de l'aire (si ce n'est la conformité avec la théorie de l'addition itérée, mais cela ne correspond pas au système ici). Nous reviendrons sur ce point.

Si les manuels Transmath et Sésamath choisissent cette situation d'emblée comme système à modéliser (dans le cadre des mesures de grandeurs), les manuels Triangle, Phare, et Prisme choisissent de les faire précéder d'autres problèmes arithmétiques. Pour ces derniers les rectangles peuvent alors être interprétés à la fois comme modèle des pratiques de résolutions arithmétiques, et à la fois comme nouveau système que les écritures algébriques modéliseront. La question délicate est de savoir ce que l'on entend modéliser, et par suite unifier, par quoi et comment.

Dans chacun des manuels Triangle, Phare et Prisme, apparaissent des problèmes arithmétiques que l'énoncé demande de résoudre de différentes façons. Le manuel Triangle propose des problèmes partiellement algébrisés (une lettre apparaît), tandis que les manuels Phare et Prisme offrent des problèmes dans le cadre des grandeurs, où les mesures apparaissent sous forme numérique. Seul Prisme prend en compte dans le numérique le cas de la soustraction. Pour les autres manuels, elle apparaîtra avec la situation des rectangles.

Observons-donc ce que le manuel Prisme propose :

1 La rentrée scolaire

Juliette a acheté sept cahiers à 2 € l'un et sept protège-cahiers à 0,80 € l'un.

a. Que représente le produit 2×7 ? Et le produit $0{,}80 \times 7$?

b. Que représente la somme $2 \times 7 + 0{,}80 \times 7$?

c. Que représente la somme $2 + 0{,}80$? Et le produit $(2 + 0{,}80) \times 7$?

d. Déduire une égalité à partir des deux questions précédentes.

e. Calculer de deux façons différentes la dépense de Juliette.

Figure 2.48 – Prisme 5e p. 11 Activité « J'utilise la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition et à la soustraction »

Les questions posées montrent le souci de mettre en place une dialectique entre système et modèle : on demande d'interpréter chaque produit et somme dans le système du problème posé, puis de déduire une égalité dans le modèle partiellement construit par l'énoncé via les calculs proposés. Cette égalité repose sur le système, c'est-à-dire sur les interprétations identiques des programmes de calculs qui réfèrent au calcul du prix total des courses, l'unicité de la solution assure l'égalité. L'égalité ne repose pas sur l'effectuation, c'est-à-dire sur la dénotation des expressions numériques. De sorte que l'égalité $2 \times 7 + 0{,}80 \times 7 = (2 + 0{,}80) \times 7$, que nous avons écrite en suivant l'ordre des questions, rend compte de deux techniques de résolution différentes d'un même problème arithmétique à trois paramètres. La résolution de ce problème ne repose pas sur l'égalité. C'est-à-dire qu'elle n'est pas technologie de la praxéologie à mettre en œuvre pour résoudre le problème, elle unifie en un certain sens deux techniques reposant sur deux programmes de calculs arithmétiques différents. C'est aussi le sens de la dernière question : l'équivalence des programmes de calcul est assurée par le problème dont on peut trouver la solution en exécutant l'un ou l'autre des programmes de calcul. Notons du reste que l'égalité des dénotés permet de vérifier que l'on n'a pas commis d'erreur de calcul, mais n'a pas de rôle véritable dans la construction ou la vérification de l'égalité. L'égalité n'est pas un enjeu en réalité.

Le formalisme de l'énoncé amorce un glissement, avec une certaine ambigüité. Il propose en effet un modèle dans le cadre numérique, les écritures sans unités font basculer des mesures de grandeurs (valeur vectorielle comme 2 € « mesure » le prix d'un cahier) à la valeur (scalaire) c'est-à-dire au nombre (le nombre 2). Lorsque l'énoncé demande ce que représente le produit 2×7, l'écriture ne correspond pas à un prix comme $2\,€ \times 7$, mais au programme de calcul sur les nombres permettant d'obtenir la valeur de la mesure. De sorte que l'opération de la mesure réalise une modélisation du côté numérique, c'est-à-dire référant au système des nombres décimaux ici. L'ambigüité est celle de la place de la situation des rectangles de ce point de vue, qui offre encore un autre modèle que celui des systèmes de nombres. Nous allons y revenir.

Quoi qu'il en soit, un nouveau problème arithmétique est proposé à la suite dans le même manuel avec cette même dialectique entre système des mesures et modèle :

2 Au théâtre

Une salle de théâtre dispose de trente rangées de quatorze fauteuils chacune. Chaque place des douze premières rangées est en catégorie 1, les autres places sont en catégorie 2.

a. Que représente la différence $30 - 12$? Et le produit $14 \times (30 - 12)$?

b. Que représente la différence $14 \times 30 - 14 \times 12$?

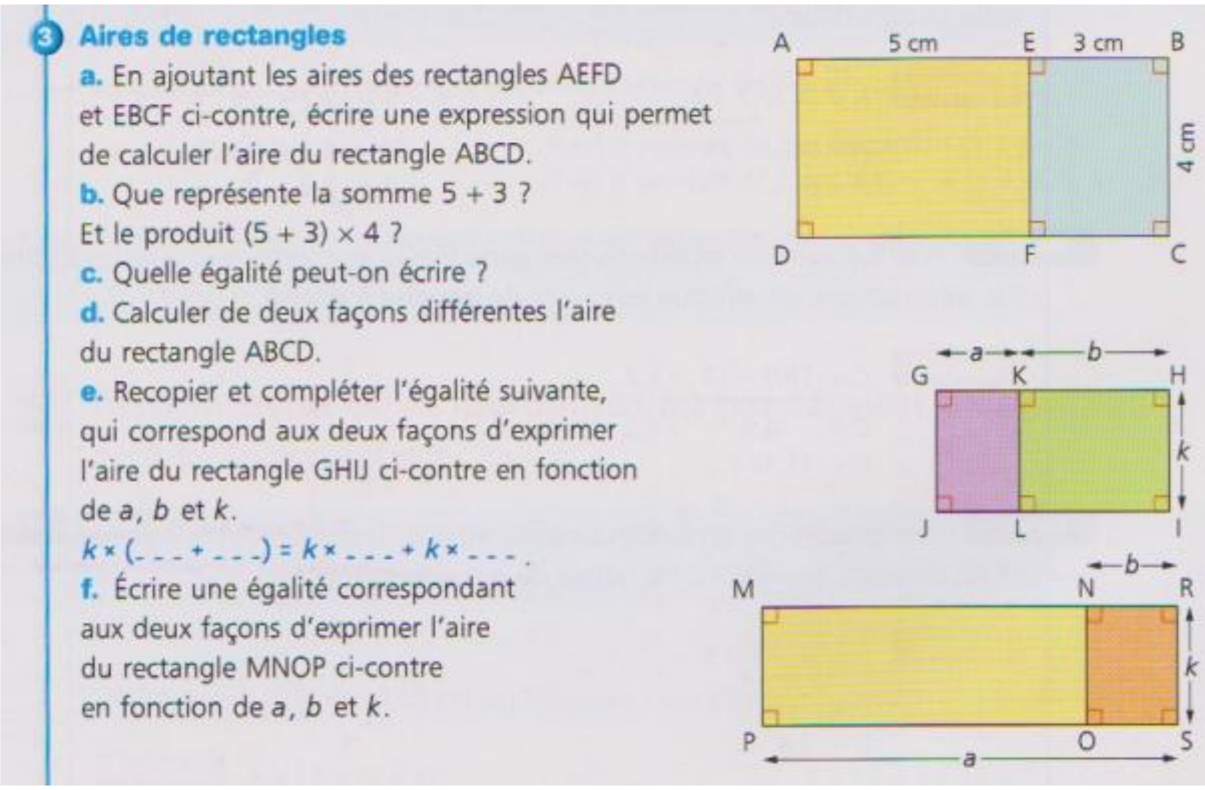
c. Déduire une égalité à partir des deux questions précédentes.

d. Calculer de deux façons différentes le nombre de places en catégorie 2.

Figure 2.49 – Prisme 5^e p. 11 Activité « J'utilise la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition et à la soustraction »

Ici les mesures sont plus clairement des nombres, étant donné que le problème est un problème de dénombrement. Notons du reste une certaine souplesse des écritures que ces énoncés engagent : si l'on suit l'ordre des questions pour l'ordre d'écriture des membres de l'égalité par exemple (c'est-à-dire si l'on choisit le premier programme de calcul rencontré pour l'écriture à gauche), on obtient pour le problème « La rentrée scolaire » une écriture dans le sens de la factorisation $2 \times 7 + 0{,}80 \times 7 = (2 + 0{,}80) \times 7$, et pour « Au théâtre » une écriture dans le sens du développement $14 \times (30 - 12) = 14 \times 30 - 14 \times 12$. Notons par ailleurs que l'écriture factorisée montre une décomposition (qui n'est pas vécue comme telle, puisque le nombre-somme n'apparaît pas dans l'énoncé) du facteur écrit à gauche.

Finalement, la situation des rectangles va affaisser cette souplesse des écritures, et généraliser et formaliser uniquement l'égalité dans le sens du développement :



3 Aires de rectangles

a. En ajoutant les aires des rectangles AEFD et EBCF ci-contre, écrire une expression qui permet de calculer l'aire du rectangle ABCD.

b. Que représente la somme 5 + 3 ? Et le produit (5 + 3) × 4 ?

c. Quelle égalité peut-on écrire ?

d. Calculer de deux façons différentes l'aire du rectangle ABCD.

e. Recopier et compléter l'égalité suivante, qui correspond aux deux façons d'exprimer l'aire du rectangle GHIJ ci-contre en fonction de a, b et k.

$k \times (\_\_\_ + \_\_\_) = k \times \_\_\_ + k \times \_\_\_$.

f. Écrire une égalité correspondant aux deux façons d'exprimer l'aire du rectangle MNOP ci-contre en fonction de a, b et k.

Figure 2.50 – Prisme 5^e p. 11 Activité « J'utilise la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition et à la soustraction »

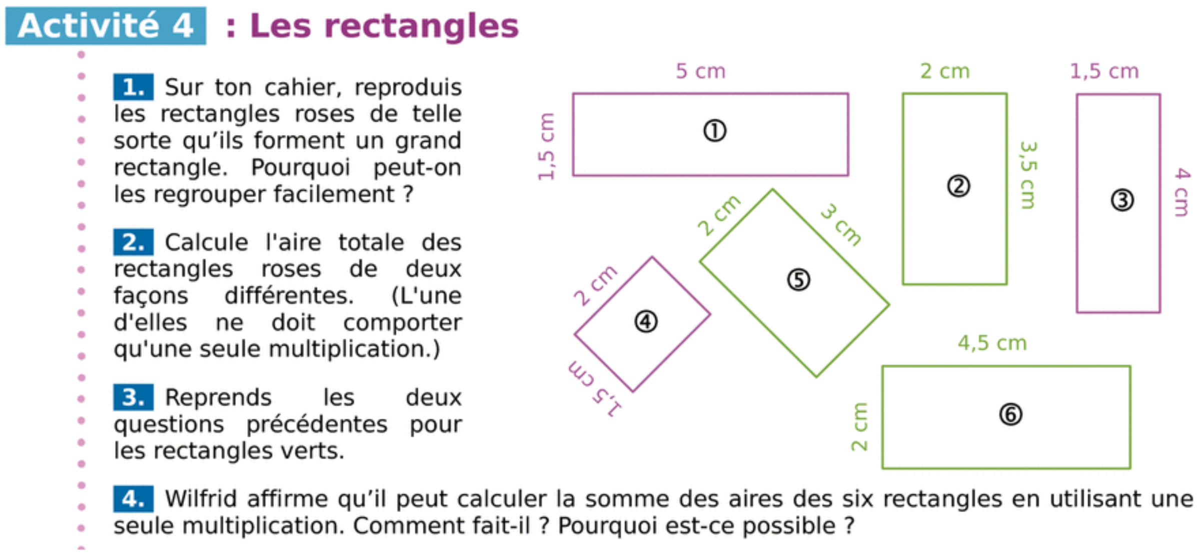
L'on peut alors s'interroger sur le rôle de modèle par rapport aux problèmes arithmétiques. Les premières questions correspondant à la situation des rectangles étant dans le domaine numérique, les rectangles suivants n'offrent-ils alors qu'une modélisation locale de la situation numérique de calcul d'aire ? Ou un modèle plus général tenant compte des problèmes arithmétiques ? Auquel cas le formalisme peut étonner : la question de la syntaxe des écritures ne semble pas posée (sens du développement ou de la factorisation, écriture à gauche ou à droite du facteur décomposé) ni mise en regard avec les propriétés mathématiques des opérations (commutativité, distributivité à gauche ou à droite, symétrie de l'égalité). On voit donc là se dessiner des incomplétudes dans la dialectique entre les dimensions sémio-linguistique et mathématique dans la préparation au travail algébrique.

Unification des types de tâche de développement et de factorisation ?

D'un autre point de vue, les représentations sémiotiques des rectangles sont de nature à donner corps à la décomposition via le découpage et donc à une pratique du côté syntaxique, couplée à une double lecture : ainsi dans l'extrait de manuel précédent, $a + b$ peut s'interpréter comme somme de deux longueurs, et comme écriture d'une grande longueur (celle du grand rectangle). Ce qui, *via* le modèle, véhicule une double interprétation des écritures comme dénotant un nombre (la mesure de la grande longueur) et exprimant un programme de calcul. Néanmoins, cette opération de décomposition n'est pas en réalité le support de la transformation de mouvement reposant sur la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. C'est-à-dire qu'il manque une interprétation syntaxique, de manipulation des écritures, et de leur grammaire dans une activité de production, de travail dans la dimension sémio-linguistique. La production des écritures se fait par l'intermédiaire du système ici, et non pas au sein du modèle. Il manque donc là une interprétation, que la situation des rectangles ne permet pas tout à fait de mettre à jour.

Notons du reste, qu'on ne trouve pas trace ici de cette idée de décomposition liée au découpage : les rectangles sont présentés déjà sous leur forme découpée, et le texte qui l'accompagne ne s'en fait pas l'écho. Ceci est également le cas des manuels Transmath, Phare, et Triangle.

Le manuel Sésamath cependant, organise ce travail de décomposition / recomposition :



Activité 4 : Les rectangles

1. Sur ton cahier, reproduis les rectangles roses de telle sorte qu'ils forment un grand rectangle. Pourquoi peut-on les regrouper facilement ?

2. Calcule l'aire totale des rectangles roses de deux façons différentes. (L'une d'elles ne doit comporter qu'une seule multiplication.)

3. Reprends les deux questions précédentes pour les rectangles verts.

4. Wilfrid affirme qu'il peut calculer la somme des aires des six rectangles en utilisant une seule multiplication. Comment fait-il ? Pourquoi est-ce possible ?

Figure 2.51 – Sésamath 5e p. 15

Nous interprétons le regroupement comme soutenant l'écriture de la factorisation. En effet, le regroupement porte sur les petits rectangles, une réunion de surfaces supposées ne pas se chevaucher. Auquel cas on obtient une partition $R_1 \cup R_2 \cup R_3 = R$ de la surface du grand rectangle rose R par exemple, ce qui correspond à des écritures de mesures μ dans ce sens $\mu(R_1) + \mu(R_2) + \mu(R_3) = \mu(R)$ ce qui se traduit par $1{,}5 \times 5 + 1{,}5 \times 2 + 1{,}5 \times 4 = 1{,}5 \times (5 + 2 + 4)$. Cette interprétation du sens des écritures semble correspondre à ce qu'attend la question 4. En effet, pour obtenir un programme de calcul sous la forme d'un produit, il s'agit de produire implicitement la forme factorisée. Or cela n'implique pas a priori l'utilisation de la distributivité mais plutôt une association des rectangles faisant apparaître les sommes des longueurs égales à 11 cm (avec des termes différents). On voit néanmoins apparaître aussi une certaine souplesse possible des écritures, selon que les produits soient écrits dans ce sens ou inversant les facteurs, et que les termes soient écrits dans cet ordre ou non. Ce qui peut être lié à différentes dispositions des rectangles, et encore une fois occasionner une dialectique entre syntaxe et propriétés de commutativité. De même on voit se dessiner une certaine unification possible par cette modélisation des rectangles entre développement et factorisation. Plus encore, la forme présentant trois termes (c'est le seul parmi les manuels envisagés) propose une certaine généralisation, nous y reviendrons.

Pourtant ce ne sont pas là les organisations des manuels. Ainsi le manuel Sésamath ne proposera pas la situation des rectangles dans le cas de la soustraction, de sorte que l'on puisse se poser la question du rôle modélisant envisagé. Plus encore, au moment d'aborder les développement, il prendra appui sur des techniques de calcul permettant de compléter la table de multiplication de 11, fondées implicitement sur l'addition itérée, mais présentées comme issues de la distributivité, en les ré-interprétant avec un facteur égal à 1 comme nous l'avons vu plus haut. Ceci pose question du point de vue de la situation des rectangles, qui ne sert plus alors, de théorie.

Généralisation à des systèmes de nombres différents

Dans les manuels Prisme et Transmath 2014, les rectangles sont présentés avec des mesures entières dans le cadre numérique. Si dans la partie activité du Transmath 2014, la généralisation est absente, elle se construit dans le Prisme, avec de nouvelles figures dont les dimensions sont notées k, a et b, sans préciser la nature des nombres qui peuvent les remplacer. De la même façon, les manuels Triangle et Phare ne quantifient pas les égalités produites :

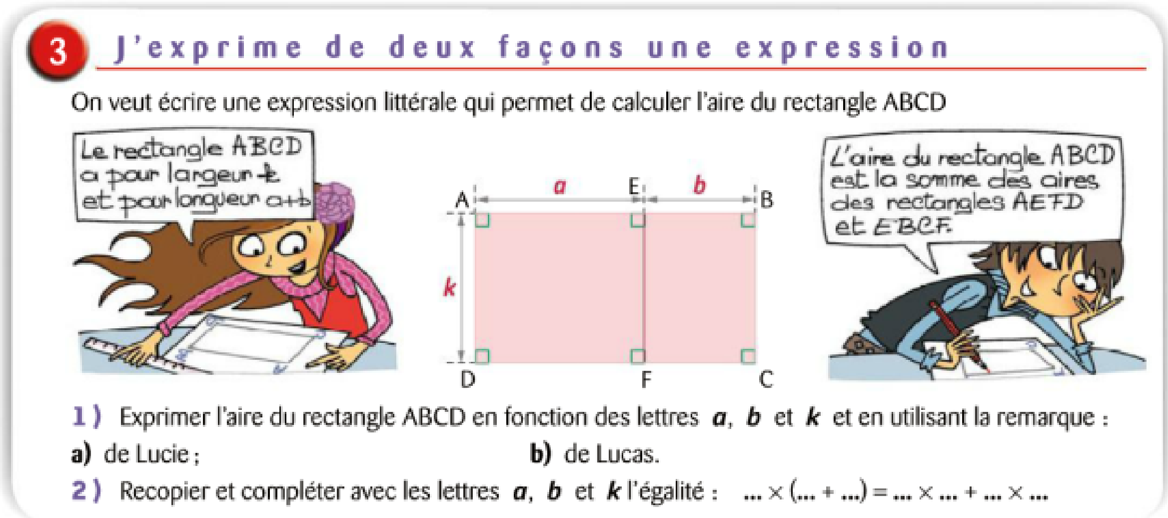
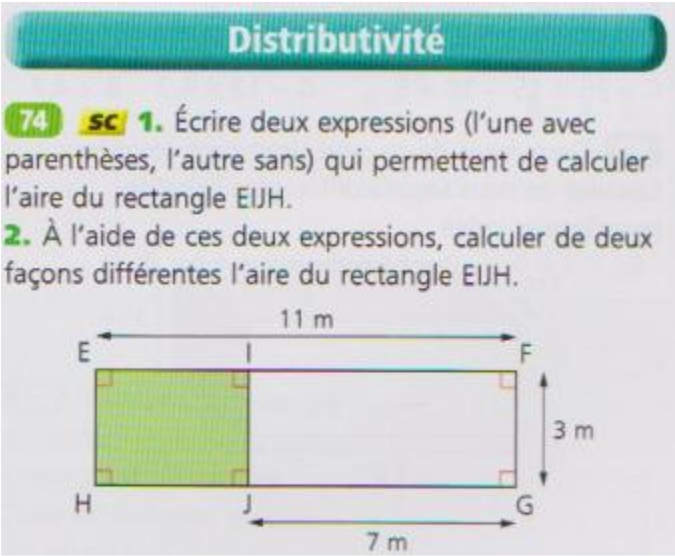


Figure 2.52 – Phare 5e Activités, Chapitre 2 Calcul littéral p. 30

La formule $k \times (a + b) = k \times a + k \times b$ peut s'interpréter de deux manières. Ou bien k, a, et b désignent les grandeurs elles-mêmes c'est-à-dire les longueurs, ce qui s'instancie par des écritures comme $5cm \times (3cm + 7cm) = 5cm \times 3cm + 5cm \times 7cm$ et la formule est vraie quelle que soit l'unité choisie, ou bien, les lettres k, a, et b désignent des mesures (avec des unités convenables) de longueurs, et alors l'égalité se situe dans le domaine numérique. Etant donné la culture des élèves de ce point de vue (les mesures s'effectuant à la règle comme le montre le dessin), on peut supposer que les nombres concernés soient plutôt des nombres décimaux. Pour ce manuel, ceci est en cohérence avec une interprétation généralisant l'égalité produite au dessus lors de la résolution d'un problème arithmétique. Une telle interprétation n'est cependant pas transparente pour le manuel Prisme par exemple. Nous avons vu plus haut que les nombres concernés lors de l'activité étaient des entiers avant la généralisation. Mais au moment des exercices, un seul parmi 132 réfère explicitement à la situation des rectangles, et les nombres en jeu sont uniquement entiers.

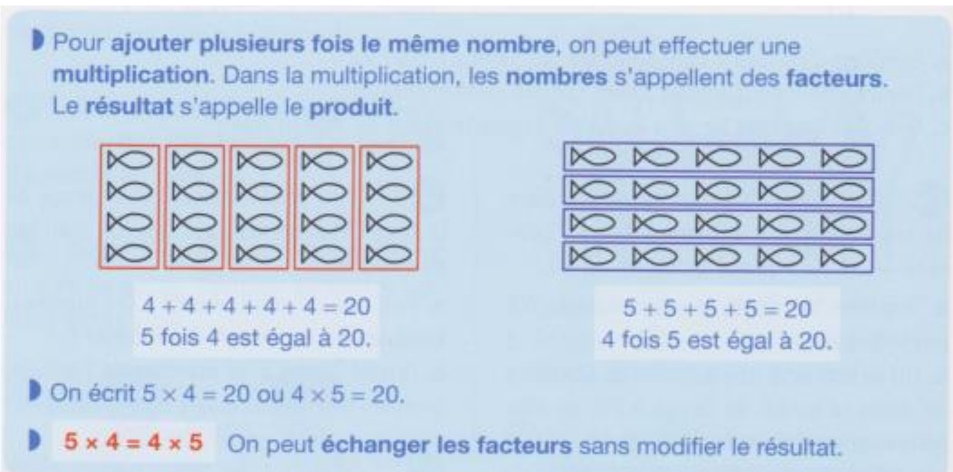

Distributivité

74 SC 1. Écrire deux expressions (l'une avec parenthèses, l'autre sans) qui permettent de calculer l'aire du rectangle EIJH.
2. À l'aide de ces deux expressions, calculer de deux façons différentes l'aire du rectangle EIJH.

Figure 2.53 – Prisme 5e 2010 Exercices p. 19

La mention *SC* indique que la question relève du socle commun de connaissances et de compétences. Or le calcul littéral en est exclu. L'utilisation du modèle (rectangles/écriture littérale) n'est pas *a priori* visée pour produire les expressions, l'écriture ne semble pas devoir se faire en utilisant la distributivité (même dans le domaine numérique), d'autant que l'énoncé ne parle pas d'écrire une égalité (qui peut-être permettrait d'envisager un développement ou une factorisation) mais bien deux expressions. Elles semblent disjointes du point de vue de leur production, et on peut *a priori* penser que là encore, les expressions soient construites avec les technologies de la mesure des aires, et non celle de la distributivité par une transformation de mouvement.

Les rectangles semblent bien un support potentiel pour une généralisation de cette propriété, des nombres entiers, en passant par les nombres décimaux puis les nombres rationnels, vers les nombres réels. Le découpage peut avoir lieu en n'importe quel point du segment correspondant à la longueur du rectangle. Plus encore les pratiques du primaire engagent des ostensifs proches, pour une autre propriété de la multiplication qui est celle de la commutativité sur les entiers :

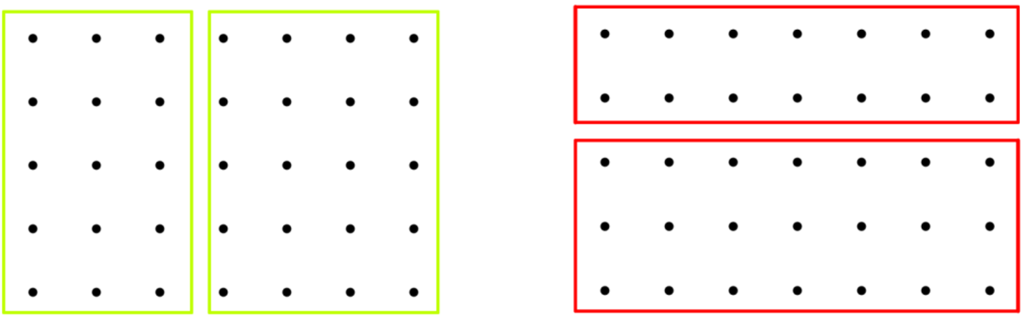

Pour **ajouter plusieurs fois le même nombre**, on peut effectuer une **multiplication**. Dans la multiplication, les **nombres** s'appellent des **facteurs**. Le **résultat** s'appelle le **produit**.

On écrit 5 × 4 = 20 ou 4 × 5 = 20.

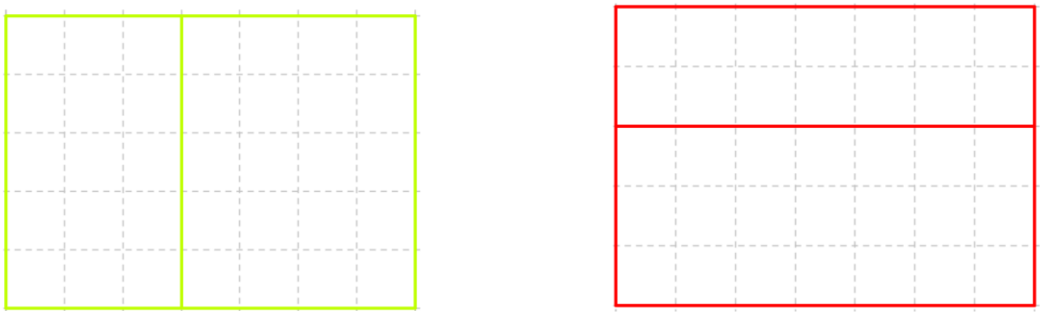
5 × 4 = 4 × 5 On peut **échanger les facteurs** sans modifier le résultat.

Figure 2.54 – Magnard CE_2 2012

On pourrait donc envisager des situations analogues de découpage de figures avec prise en compte de la décomposition possible à gauche ou à droite dans un cadre discret :



Les écritures symboliques associées pourraient être par exemple $5 \times (3 + 4) = 5 \times 3 + 5 \times 4$ et $(2 + 3) \times 7 = 2 \times 7 + 3 \times 7$. Ces figures portent une interprétation de la multiplication dans un sens ou dans l'autre, avec les deux rôles du nombre (termes de la somme ou nombre de termes) en référence à l'addition itérée. Cependant, le choix de points au lieu de carrés par exemple, est quelque peu en rupture avec la théorie des aires, de sorte que les figures pourraient être plutôt les suivantes :



Mais rien de tel n'apparaît dans les manuels de collège analysés. Dans le manuel Prisme en particulier, la généralisation de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition ou à la soustraction semble de plus portée davantage par les écritures en ligne issues des résolutions de problèmes arithmétiques.

Coût du changement de cadre et obstacles ?

Ceci n'est peut-être pas anodin du reste, car du point de vue des ostensifs, on passe d'une lecture bi-dimensionnelle pour le rectangle à une lecture d'une ligne pour l'écriture algébrique. Ces changements de cadres, entre cadre géométrique, numérique et algébrique, s'accompagnent de plus de modification de la nature des opérateurs, et des relations subtiles entre les objets, grandeurs et mesures. Le document d'accompagnement des programmes consacré aux Grandeurs et mesures, propose une théorie des grandeurs qui peut servir de référence, c'est-à-dire de théorie mathématique aux manipulations sur les grandeurs, à la construction de mesures associées et par suite à un ensemble de nombres.

L'égalité repose sur une construction fondée par deux ensembles d'objets X et X': des segments de droite, et des surfaces particulières que sont les rectangles. Sur ces deux ensembles d'objets sont définis deux relations d'équivalence (congruences de segments ou de surfaces) et deux additions (non partout définies, car il n'est pas possible d'ajouter un objet à lui-même) $\oplus$ et $\oplus'$ munies d'un certain nombre d'axiomes permettant de définir l'addition des grandeurs associées, c'est-à-dire des classes d'équivalence. Ainsi l'addition sur les longueurs correspond à + dans l'écriture $k \times (a + b)$:

> La somme des longueurs des segments [AB] et [CD] est celle du segment obtenu en mettant bout à bout deux segments respectivement équivalents : [AB] et [CD]. Autrement dit, si [AB] est un segment de longueur *a* et [BC] le segment de longueur *b* porté par la demi-droite d'origine B ne contenant pas le point A, alors *a* + *b* est la longueur du segment [AC].
> Dans cette théorie des longueurs, ces propriétés sont des axiomes, traduisant les propriétés utilisées en géométrie instrumentée à l'école.
> *Collège– mathématiques – projet de document d'accompagnement – grandeurs et mesures – page 6 Direction générale de l'enseignement scolaire – bureau du contenu des enseignements*

On voit donc s'esquisser, pour les longueurs, une double interprétation des objets : segments mis bout à bout et segment entier, associée à l'addition de grandeurs qui est elle-même grandeur du segment somme. Or l'addition dans l'écriture $k \times a + k \times b$ ne porte pas sur des grandeurs de même espèce, car c'est l'addition définie sur la grandeur produit (qui est liée à celle de l'aire, c'est-à-dire la grandeur sur l'ensemble *X*', que nous laisserons de côté ici pour les amalgamer). Cette addition engage de même une double lecture, elle met en relation la somme sur les aires et du point de vue des objets, la somme sur les surfaces, d'une manière certainement simplifiée ici par réunion de deux rectangles sans chevauchement, superposables au grand rectangle.

Le passage dans le cadre numérique importe de plus la théorie de la mesure des grandeurs. Or de la même façon que pour les additions, deux mesures apparaissent : celle des longueurs et celle des aires, liées par la grandeur produit (définie à partir de deux grandeurs sans référence a priori aux objets, dont on peut montrer par la suite que les mesures correspondent). Et le fait que ces deux mesures puissent correspondre à un même système de nombres n'est peut être pas transparent. D'autant que la construction des nombres dans la scolarité repose plutôt sur les problèmes de mesure des longueurs, que sur celles des aires (même s'il peut y avoir une rupture au moment des fractions, nous y reviendront) ainsi que le suggère le même document d'accompagnement qui poursuit la construction théorique :

> A propos de la mesure des grandeurs, l'un des problèmes de l'enseignement des mathématiques est la construction d'un système de nombres N vérifiant la condition suivante.
> Si (X, ~, $\prec$, $\oplus$) est le support d'une certaine espèce de grandeurs G, alors il existe, à un facteur multiplicatif près, une application unique $\mu : X \rightarrow$ N telle que :
> - la relation d'équivalence définie par μ sur *X* est identique à ~ : μ(x) = μ(y) $\Leftrightarrow$ x ~ y ;
> - la relation de préordre définie par μ sur *X* est identique à $\prec$: μ(x) < μ(y) $\Leftrightarrow$ x $\prec$ y ;
> - par l'application μ l'image d'une somme est la somme des images : $\mu(x \oplus y) = \mu(x) + \mu(y)$.
> Pour les longueurs, si on choisit une longueur *u* comme unité, on pose $\mu_u(u) = 1$. De quels nombres a-t-on besoin pour mesurer les longueurs ? Soit $g = nu$. Alors $\mu_u(g) = \mu_u(nu) = n$. Donc l'ensemble N contient l'ensemble ℕdes entiers naturels. Soit *g* tel que $ng = u$ (*g*) est une fraction de l'unité de longueur). Alors $n\ \mu_u(g) = 1$. Donc $\mu_u(g)$ est un nombre *r* tel que $n\ r = 1$. Ainsi s'introduisent les fractions du nombre 1. Plus généralement, si $v = m\ u$ et $n\ g = v$, on a besoin pour mesurer *g* d'un nombre *r* tel que $n\ r = m$. Ainsi s'introduisent les fractions d'entiers, et en particulier les nombres décimaux. Par exemple, si 7 *l* est égale à 12 cm, la mesure de *l* en centimètre est le nombre *r* tel que 7 *r* = 12.
> Ainsi, on peut utiliser le problème de la mesure des longueurs pour revenir sur les fractions à l'école et pour introduire la notion de quotient d'un entier *p* par un entier *q*. Ce contexte est un moyen pour justifier l'existence et l'unicité d'un tel nombre, qui sont admises implicitement à ce niveau d'enseignement.

Collège– mathématiques – projet de document d'accompagnement – grandeurs et mesures – page 7 Direction générale de l'enseignement scolaire – bureau du contenu des enseignements

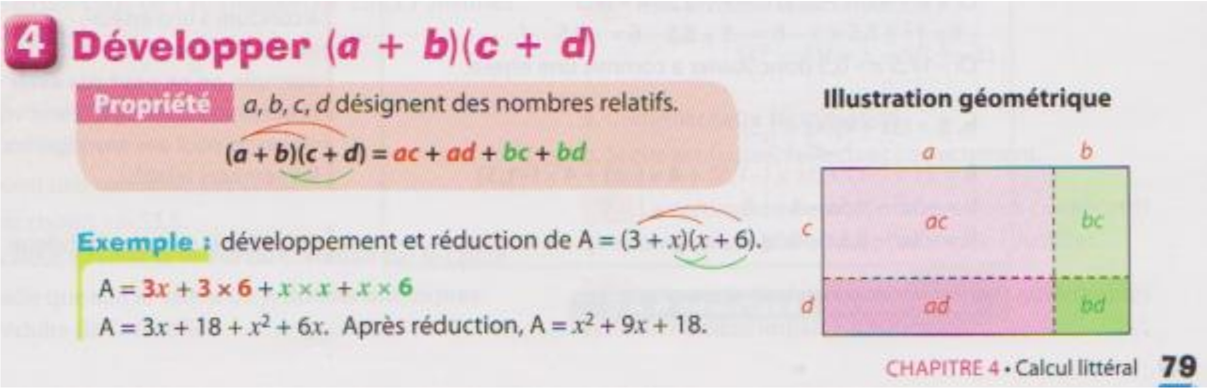
Ce faisant, la situation des rectangles, au travers de la mesure des longueurs, ne permettrait de modéliser qu'une égalité sur les nombres positifs. Ce qui type implicitement k, a et b dans une interprétation numérique de l'égalité. Plus encore, l'extension sur les nombres réels par la suite reposerait implicitement sur un passage à la limite dont participe la correspondance entre l'ensemble des nombres réels et la droite réelle.

Ces relations entre objets, grandeurs et mesures, en partie utilisées implicitement, ne sont peut-être pas négligeables dans le coût de ce changement de cadre. Euclide par exemple proposera une formulation mêlant objet et grandeur, mais indépendamment des mesures, c'est-à-dire des nombres, avec néanmoins une certaine généralisation du nombre de termes. Néanmoins, cette proposition lui sert de théorie, contrairement à ce que l'on observe dans les manuels. En dehors des parties « activités », les manuels ne font plus guère référence à ce changement de cadre qui, tout au plus, se trouve ré-exploré dans le cadre numérique ou algébrique, pour produire de nouvelles égalités, ne reposant plus sur la distributivité avec une dialectique entre algébrique et géométrique, mais bien sur les théories de l'aire. Le tableau suivant montre cependant à quel point ces exercices sont marginaux, et ce à tous les niveaux au collège.

	PHARE				TRIANGLE				TRANSMATH			
	6e	5e	4e	3e	6e	5e	4e	3e	6e	5e	4e	3e
Partie "Activités"	0	2	1	0	0	2	1	0	0	1	1	1
Partie "Cours"	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
Partie "Exercices"	0	1	1	2	0	3	4	2	1	3	3	3
Totaux	0	3	2	2	0	5	5	2	1	4	5	4
Numérique	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
Algébrique	0	2	2	2	0	5	5	2	0	3	3	3
Sommes de plus de deux termes	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
Addition	0	1	1	1	0	3	3	1	1	3	2	2
Soustraction	0	2	1	1	0	2	2	1	0	1	3	2

Figure 2.55 - Tableau récapitulatif des apparitions de la situation des rectangles pour trois collections

La situation des rectangles n'apparaît essentiellement qu'en partie introductive, et de façon assez répandue dans les manuels, de la 5^e à la 3^e, mais n'est pas reprise en partie « cours » ce qui laisse encore une fois penser qu'elle ne sert pas de théorie. Même les adaptations de la technologie à des sommes de trois termes sont peu prises en compte. Par ailleurs, le seul manuel faisant référence à la situation des rectangles dans la partie « cours », positionne très clairement le cadre géométrique comme illustration :



4 Développer $(a + b)(c + d)$

Propriété a, b, c, d désignent des nombres relatifs.

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

Exemple : développement et réduction de $A = (3 + x)(x + 6)$.

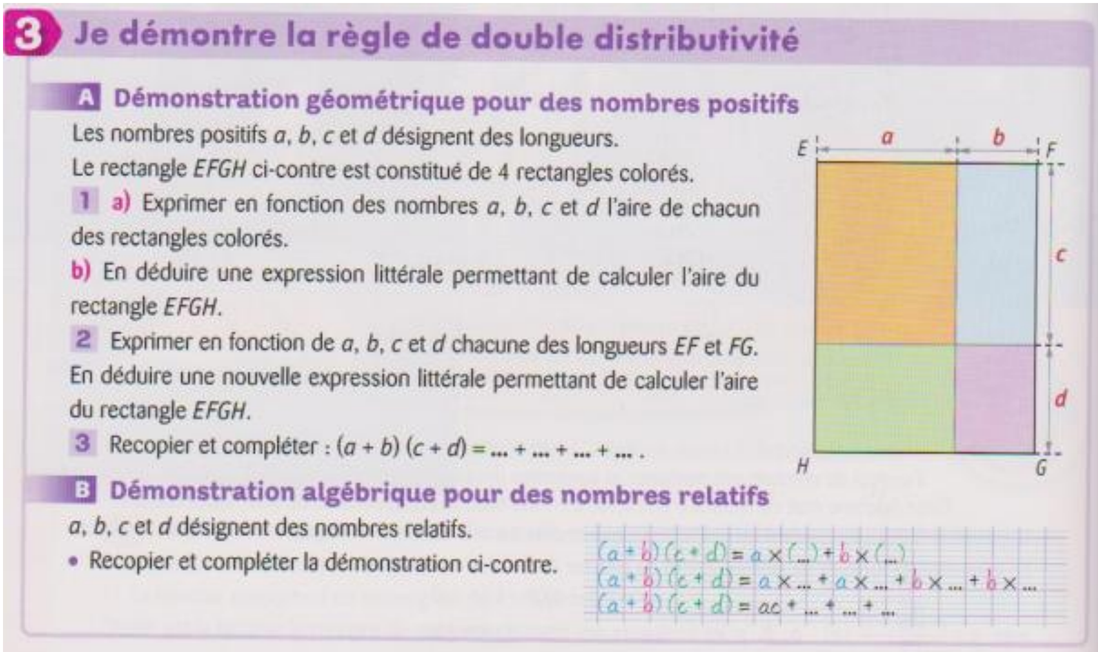
$A = 3x + 3 \times 6 + x \times x + x \times 6$

$A = 3x + 18 + x^2 + 6x$. Après réduction, $A = x^2 + 9x + 18$.

CHAPITRE 4 • Calcul littéral 79

Figure 2.56 - Transmath 4e (2011) p. 79 Cours

Les démonstrations dans le cadre général en 4^{e} et en 3^{e} se font, dans la dimension algébrique, en référence à la théorie des nombres, dont la distributivité participe implicitement, et non à la théorie des grandeurs et des mesures, et ce visiblement pour permettre la généralisation aux nombres relatifs comme le montre l'extrait suivant :



3 Je démontre la règle de double distributivité

A Démonstration géométrique pour des nombres positifs

Les nombres positifs a, b, c et d désignent des longueurs.
Le rectangle $EFGH$ ci-contre est constitué de 4 rectangles colorés.

1 a) Exprimer en fonction des nombres a, b, c et d l'aire de chacun des rectangles colorés.

b) En déduire une expression littérale permettant de calculer l'aire du rectangle $EFGH$.

2 Exprimer en fonction de a, b, c et d chacune des longueurs EF et FG. En déduire une nouvelle expression littérale permettant de calculer l'aire du rectangle $EFGH$.

3 Recopier et compléter : $(a + b)(c + d) = \ldots + \ldots + \ldots + \ldots$.

B Démonstration algébrique pour des nombres relatifs

a, b, c et d désignent des nombres relatifs.

• Recopier et compléter la démonstration ci-contre.

$(a+b)(c+d) = a \times (\ldots) + b \times (\ldots)$
$(a+b)(c+d) = a \times \ldots + a \times \ldots + b \times \ldots + b \times \ldots$
$(a+b)(c+d) = ac + \ldots + \ldots + \ldots$

Figure 2.57 - Activités p. 64 ,Phare 4e(2011)

On voit que la généralisation vient sans référence aux mesures : *a*, *b*, *c* et *d* désignent dans un premier temps des longueurs, malgré le titre, puis dans un deuxième temps des nombres relatifs, pour la démonstration algébrique, qui s'appuie sur une extension de la distributivité vue en 5^{e} au cas où le facteur est aussi une somme (c'est-à-dire qu'il change de catégorie).

L'analyse de manuels permet de conclure que la situation des rectangles ne se constitue pas comme une théorie, ou comme un modèle intermédiaire. Elle présente pourtant un certain nombre de potentialités pour soutenir des généralisations, même si elles ne sont, en l'état, pas exploitées par les manuels. Afin d'explorer quelque peu plus avant les conditions de vie et d'émergence de cette situation comme un élément théorique, et un vecteur d'unification et de généralisation soutenant les savoirs à enseigner sur la distributivité, nous fonderons notre propos sur des résultats des travaux de Verdugo Hernandez (2013). L'étude menée s'intéresse à la comparaison de l'enseignement du calcul algébrique en France et au Chili, où la situation des rectangles sert de fondement théorique aux techniques et à leurs adaptations.

La situation des rectangles comme théorie : condition de vie et d'émergence

Extension à une somme de n termes ou à un produit de trois facteurs

A partir d'une analyse comparée de manuels de 3e et du manuel chilien officiel (Matematica 1° Ano medio Texto para el estudiante) pour des élèves du même âge, Verdugo Hernandez (2013) montre que les changements de cadres entre cadre algébrique et géométrique sont prégnants dans le manuel chilien. Ils servent non seulement de justification pour construire la théorie algébrique disponible, c'est-à-dire pour en justifier les équivalences fondatrices, mais encore d'arrière plan technologique soutenant les adaptations de techniques. Ainsi présente-t-elle une extension de la distributivité consacrée à une somme de 3 termes puis plus généralement à une somme de *n* termes fondée sur un découpage de rectangle :

En general, si un lado de un rectángulo es a y el largo se divide en n partes, formando n diferentes rectángulos, donde todos tienen un lado que mide a. Entonces, el área del rectángulo es igual a la suma del área de los pequeños rectángulos (ver figura a la derecha). Es decir, si el largo mide $b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n$, entonces se tiene que:

$$a(b_1+b_2+b_3+...+b_n)=ab_1+ab_2+ab_3+...+ab_n$$

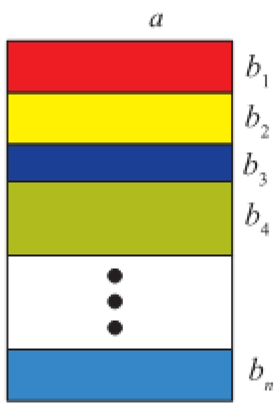


Figure 2.58 - Manuel Chilien p. 93 (Verdugo Hernandez (2013))

On peut remarquer la disposition 'verticale' du rectangle qui n'est pas usuelle. Le manuel présente les rectangles précédents avec un découpage dans l'autre sens (du côté 'horizontal'). Ceci aurait pu occasionner une adaptation du point de vue de l'écriture algébrique avec une décomposition du facteur écrit à gauche plutôt qu'à droite, mais il n'en est rien.

Un peu plus loin dans le même manuel, on trouvera une adaptation pour un développement du cube d'une somme réalisant à la fois une extension du cadre géométrique (les grandeurs sont des volumes), et de l'écriture algébrique :

3 Construye un cubo de lado **a+b**, con madera (o greda, o plasticina, o yeso, o cartulina, etc.) y realiza los cortes como muestra la figura. Nota que resultan 8 prismas, dos cubos y seis prismas rectos de base cuadrada. Estos últimos se pueden juntar en dos grupos de tres, ya que, cada uno de los grupos tiene cuerpos idénticos. Muestra que $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

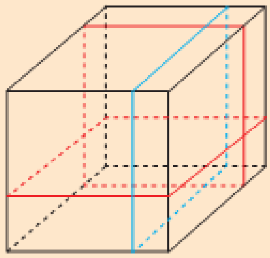
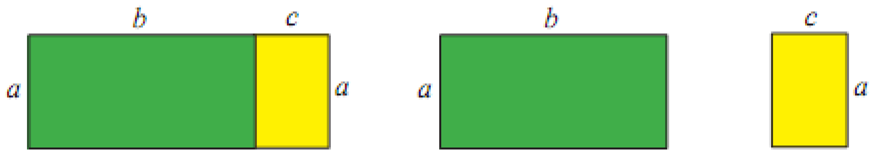


Figure 2.59 - Manuel chilien p. 101

Le changement de cadre, et la théorie des grandeurs et mesures soutient les écritures algébriques en leur donnant une interprétation du point de vue géométrique, et permet d'envisager des égalités formalisant et étendant en même temps le domaine de validité de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

Unification des types de tâche de développement et de factorisation

Plus encore, ce changement de cadre unifie les types de tâche de développement et de factorisation de façon explicite par le biais de deux « gestes » dans le cadre géométrique, correspondant à deux sens d'écriture de l'égalité. Le premier en effet est une décomposition, d'un segment, qui correspond à la décomposition de sa longueur sous la forme d'une somme de longueurs. Elle engendre une décomposition d'un rectangle, qui correspond à la décomposition de son aire sous la forme d'une somme d'aires. Les écritures algébriques associées correspondent donc du développement et les dessins sont présentés en deux temps montrant ainsi le découpage :



Pour le cas de la factorisation, le manuel ne se fonde pas sur le caractère symétrique de l'égalité, mais de nouveau sur une manipulation des objets, dans un mouvement inverse :

El proceso de factorización muestra como reconstruir el área de un rectángulo a partir de pequeños rectángulos que tienen un lado de la misma medida. En nuestro caso, $4x^2y + 6xy^2$, lo hemos visto como la suma del área de dos rectángulos, cada uno de los cuales tiene un lado de medida $2xy$.

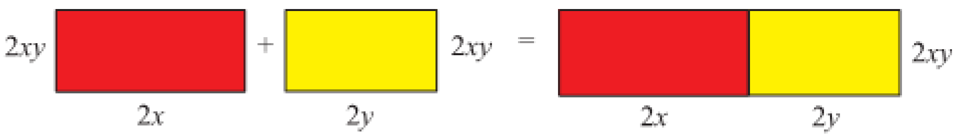


Figure 2.60 - Manuel chilien p. 96

Le texte qui l'accompagne fait le lien entre objets, grandeurs, et "processus de factorisation" : « le processus de factorisation montre comment reconstruire l'aire d'un rectangle à partir de petits rectangles qui ont un côté de même mesure ». Le dessin soutient les adaptations pour produire l'écriture algébrique considérée. Les discours placent très clairement l'égalité comme égalité entre grandeurs (et non pas entre mesures).

On observe une dialectique très fine s'organiser entre opérations sur les objets, puis sur les grandeurs : on réunit deux rectangles (objets), correspondant à une somme d'aire (grandeur aire, +), et le rectangle obtenu (objet) fait apparaître une réunion de segments (objets) donc la somme de deux longueurs (grandeurs longueurs, +) et par suite une aire du grand rectangle comme produit (grandeur produit de longueurs).

Une dialectique vivante entre système (des rectangles) et modèle (algébrique)

Cette dialectique n'est pas isolée, et on trouve des exercices permettant de la dévoluer aux élèves, qui n'apparaissent pas en France, ainsi que le met à jour l'étude de Verdugo Hernandez (2013) dont nous reproduisons l'extrait suivant :

actividades

1. Dibuja en tu cuaderno dos rectángulos, uno de área $2x^3y^2$ y otro de área $3x^2yz$, de tal forma que tengan un lado de la misma medida. Factoriza $2x^3y^2 + 3x^2yz$
2. Factoriza los siguientes polinomios:

   a) $abc - abc^2$ **b)** $-2xy^2w + 4y^3w^2z$ **c)** $5u^2v - 10u^2 - 15uv^2w$

Figure 2.61 - Manuel chilien p. 96 (Verdugo Hernandez 2013)

Il s'agit de dessiner deux rectangles dont les aires sont exprimées sous forme polynomiale, et qui ont un côté de même mesure, avant de factoriser l'expression de la somme des aires données. Il y a là une réversibilité de la relation entre rectangles, grandeurs et expressions algébriques, qui ne se rencontre pas dans les manuels français, et qui soutient les adaptations à différentes formes d'expressions des techniques de factorisation.

L'étude menée par Verdugo Hernandez (2013) révèle néanmoins une forte incomplétude des organisations mathématiques dans l'institution chilienne, et dans le manuel analysé en particulier, qui n'utilise pas, par exemple, le changement de cadre pour la soustraction. L'auteure propose donc un ensemble de figures intermédiaires et montre comment un certain nombre de situations construites sur le modèle des rectangles permettraient de prendre en charge ces adaptations de la même manière, et de compléter une théorie géométrique de la distributivité et des identités remarquables. Les relations entre grandeurs et algèbre semblent constituer une perspective de recherche extrêmement riche de ce point de vue, pour envisager une réorganisation des savoirs dans cette dialectique.

> Toutefois, précisons que d'une part ce type d'argumentation technologico-théorique liée au changement de cadre géométrique algébrique ne permet pas de prendre en charge les éventuelles adaptations de techniques liées à l'usage des nombres négatifs : ce qui peut éclairer le choix du manuel chilien de prise en charge de la soustraction d'un point de vue stricto sensu algébrique en la considérant comme l'addition de l'opposé pour compléter les technologies de ce point de vue. D'autre part, une telle technologie de la distributivité suppose l'existence en amont de technologies et des théories liées aux calculs sur les mesures d'aires (voire des volumes dans

l'exemple $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ donné ci-avant) et nous pourrons constater dans la sous-partie qui suit que cela ne va pas forcément de soi, du moins dans l'institution française.
Verdugo Hernandez (2013)

Deux limites semblent alors se dégager, d'une part l'extension aux nombres relatifs que le cadre des grandeurs ne pourra pas prendre en charge, et d'autre part, le coût d'une telle introduction dans l'institution française.

L'extension aux nombres relatifs en rupture avec le modèle

Bien qu'une modélisation puisse exister pour la soustraction (et elle apparaît par exemple dans les manuels français), Verdugo Hernandez (2013) montre que le manuel chilien ne fait pas ce choix. La généralisation des égalités jusque là interprétées dans le cadre des grandeurs, à des égalités mettant en jeu des nombres, et de façon plus étendue, des nombres relatifs, a lieu de façon muette. Aucun discours n'accompagne ce changement de point de vue véhiculé par l'extension (des grandeurs, aux nombres - comme mesure ? -, puis aux nombres relatifs). On observe ainsi le discours basculer, en parlant de nombre, avant d'utiliser la propriété permettant de transformer une différence en une somme de l'opposé du second terme, pour aboutir à la distributivité de la multiplication par rapport à la soustraction :

8 Factorización: primera parte

Hasta el momento hemos estudiado la multiplicación de un número por una suma: $a(b+c)$, también podemos hacerlo con la resta, recordando que la resta de a menos b es la suma de a más el inverso aditivo de b, esto es

$$b - c = b + (-c).$$

Por lo tanto, $a(b-c) = a(b+(-c))$, pero la distribución respecto a la suma la conocemos bastante bien.

Resumiendo:

$$a(b-c) = ab - ac.$$

Figure 2.62 - Manuel chilien p. 95

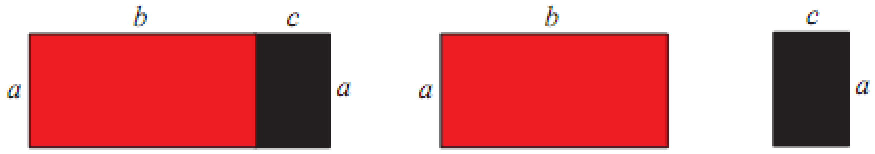
De la même façon peut-on observer des ruptures théoriques au moment d'utiliser l'égalité de la distributivité construite de façon géométrique, pour le nombre négatif – 1 dans l'extrait suivant :

La propiedad distributiva dice que si multiplicamos un número por la suma de dos términos es lo mismo que multiplicar el número por cada término y sumar los resultados, es decir, si multiplicamos a por $b+c$.

El resultado es el mismo que $ab+ac$, es decir:

Propiedad distributiva: $a(b+c) = ab + ac$

Se puede ver geométricamente así:



A la izquierda vemos un rectángulo de lados a y $b+c$ que, como sabemos, tiene área $a(b+c)$, por otra parte, el área del rectángulo grande es la suma del área de los dos rectángulos pequeños: el rojo y el negro. El rojo tiene área ab y el negro ac, por lo tanto, se verifica geométricamente que:

$$a(b+c) = ab + ac$$

Un caso particularmente interesante es cuando $a = -1$ en ese caso resulta:

$$-1(b+c) = -1b + -1c$$

Figure 2.63 - Manuel Chilien p. 69

Le discours a basculé dans le cadre numérique, et décrit deux programmes de calcul équivalents : « La propriété de distributivité dit que si l'on multiplie un nombre par la somme de deux termes, c'est la même chose que multiplier le nombre par chaque terme et additionner les résultats, c'est-à-dire, si on multiplier a par $b + c$. ». Le discours dans la dimension mathématique change de nature, en même temps que la théorie, passant de celle des grandeurs à celle des nombres.

Quoi qu'il en soit, Verdugo Hernandez (2013) montre que, si la situation des rectangles peut revêtir un potentiel important pour soutenir les adaptations, et en particulier faire émerger de nouvelles techniques de factorisation, il n'en demeure pas moins que l'une des conditions écologiques essentielles, relève de l'existence préalable de relations entre les cadres géométriques et algébriques qui soient robustes, et disponibles pour les élèves. L'expérimentation menée par ces travaux montre que cela ne va pas de soi. La viabilité de telles organisations mathématiques liant les savoirs algébriques et géométriques peut, par exemple, se heurter à des difficultés éprouvées par les élèves, face au statut d'une figure générique, dont les dimensions peuvent être indéterminées.

Conclusion

L'analyse des manuels français montre qu'en l'état, la situation des rectangles ne sert pas à l'heuristique de calcul. Elle ne se constitue pas véritablement comme théorie dans les praxéologies algébriques, à l'instar de ce que l'on peut, en partie, observer dans les manuels chiliens. Pourtant, la présence de telles figures en primaire, comme support à l'émergence d'une autre propriété de la multiplication (la commutativité) laisse entrevoir des possibilités en ce sens, d'autant qu'un prolongement tel que nous l'avons envisagé pourrait accompagner les extensions aux différents types de nombres de l'usage de la distributivité (avec un découpage de longueur correspondant à des entiers, puis à des rationnels puis à des réels). Les manuels chiliens montrent de plus, que les changements de cadre entre géométrie et algèbre, peuvent soutenir des adaptations de techniques de calcul, pour développer des cubes, ou des produits par une somme de *n* termes. Ces situations peuvent également constituer un arrière plan théorique unifiant les techniques de développement et de factorisation (avec découpage ou unification de rectangles) de façon extrêmement riche. Elles semblent enfin revêtir un certain potentiel vis-à-vis d'une étude des formalismes de la propriété, à la fois pour les unifier, mais aussi pour rendre compte d'une certaine souplesse des écritures (avec des décompositions à gauche comme à droite, associées à des découpages dans le sens de la longueur ou de la largeur des rectangles). Toutefois, ces possibilités ne vivent pas dans l'institution française. Verdugo Hernandez (2013) en dresse certains fondements dans la perspective d'une telle introduction dans l'enseignement en France. L'emploi de la situation des rectangles présente néanmoins certaines limites. Tout d'abord, le changement de cadre et la dialectique entre système et modèle ont un coût probablement non négligeable. Ensuite, elle ne peut prendre en charge l'ensemble des extensions de la notion. Une organisation mathématique complète s'appuyant sur les grandeurs, exclut de fait les nombres relatifs. Un changement de théorie est alors nécessaire au moment de l'introduction de ces nombres, à l'instar de ce que l'on observe dans les manuels chiliens. Par ailleurs, l'unification des types de tâches anciens de calculs serait à recomposer également dans un cadre géométrique, ce qui éloigne, selon nous, des pratiques pré-existantes mettant en jeu implicitement la distributivité. Ces conclusions nous amènent à choisir plutôt la voie des nombres comme système aux fondements de la théorie algébrique, et sur lequel faire reposer un enseignement autour des caractères FUG de la distributivité. Cette voie nous paraît par ailleurs, plus propice à l'émergence des transformations de mouvement ainsi que nous l'avons vu au chapitre précédent : les situations de modélisation conduisent en effet à un mode de production d'égalité différent. Avant d'aborder la construction d'une ingénierie dans un troisième chapitre, nous terminons celui-ci par un complément du côté des pratiques enseignantes afin d'approfondir les conditions et les contraintes d'un tel enseignement.

2.3 ENSEIGNER LA DISTRIBUTIVITE COMME FORMALISATRICE, UNIFICATRICE ET GENERALISATRICE

Cette partie s'intéresse aux discours et aux savoirs enseignés susceptibles de vivre dans les classes vis-à-vis des caractères FUG liés à la distributivité. Sont-ils conformes à ce que l'on peut trouver dans les manuels ? Les aspects formalisateur, unificateur et généralisateur transparaissent-ils comme des enjeux d'enseignement ? Le cas échéant, quelles difficultés d'enseignement soulèvent-ils ? Afin d'apporter des éléments de réponses à ces questions, nous nous appuyons sur les analyses des déclarations de quatre enseignants de collège décrivant leurs projets d'enseignement à l'occasion d'entretiens que nous avons réalisés.

Ces entretiens permettent tout d'abord d'avoir un accès à des discours oraux qui peuvent accompagner les discours écrits, et donc aux théories qui peuvent vivre dans les classes à la fois du côté syntaxique, et sémantique des expressions. D'autre part, ils donnent à voir des projets d'enseignement, au travers desquels peuvent se dégager des idées plus précises sur les conditions et contraintes de l'introduction de la distributivité comme une notion FUG.

Ainsi les questions posées aux enseignants relèvent-elles à la fois de la description des activités d'introduction qu'ils ont pu choisir, à un moment donné, et de l'analyse d'erreurs d'élèves et des modes de corrections qu'ils proposeraient à ces élèves. Les enseignants choisis témoignent d'une certaine diversité du point de vue de leur ancienneté et de leur rapport aux mathématiques universitaires. Benjamin est professeur depuis 9 ans. Nadine travaille en collège depuis 20 ans. Sandra est enseignante en collège depuis 12 ans, et Jérôme depuis 2 ans. Jérôme est le seul à avoir une expérience en lycée où il a effectué son année de stage (il a donc eu une classe de 2nde en responsabilité). Au moment de l'entretien, cet enseignant suit en même temps des cours de Master de mathématiques, de sorte qu'il est assez proche des mathématiques savantes. Ces enseignants ne sont par ailleurs pas impliqués, au moment des entretiens, dans des projets de formation ou de recherche. Etant nous-même l'interlocutrice, nous nous désignerons dans les extraits par C pour chercheure.

2.3.1 Des pratiques enseignantes qui enrichissent les situations des manuels

Situation des rectangles et généralisation

Parmi les quatre enseignants interrogés, deux enseignantes déclarent utiliser la situation des rectangles à l'instar des manuels : Sandra et Nadine. Nadine suit les activités proposées par le manuel Triangle de 5^{e} que nous avons analysées plus haut. Sandra utilise de même un rectangle, qu'elle dessine au tableau et découpe de la même façon, pour écrire des égalités à partir d'expressions numériques avant d'en produire un formalisme algébrique les généralisant. Pourtant, l'une comme l'autre semblent vouloir aller plus loin que les manuels en généralisant le formalisme et l'utilisation de la distributivité pour des sommes de plus de deux termes. Les découpages des rectangles servent alors de soutien technologique à ces extensions.

Si les manuels ne s'en font pas l'écho (à l'exception de Sésamath comme nous l'avons vu avec cette question de la généralisation ou du modèle qui semble peu prise en charge), les extensions de l'usage de la distributivité pour des sommes de plus de deux termes peuvent exister dans les classes.

Ainsi, Sandra utilise la situation des rectangles pour introduire cette idée de généralisation à une somme de plusieurs termes :

> SAND : donc après je fais la généralisation pour leur faire intégrer le schéma avec un rectangle coupé en trois ou en dix / pour leur montrer dans la parenthèse que ça marche pareil si on a 3 + 9 + 2 + 7 (*elle écrit 5 × (3+9+2+7)*)
> CHER : d'accord et tu leurs fais refaire les dessins qui correspondent ?
> SAND : ouais / ou je fais au tableau quoi pour les préparer quand il y a quatre découpages / parce que ça je trouve / ça par contre le fait de généraliser à plusieurs c'était bien / ça peut leur faire comprendre ce schéma à deux (*elle appelle schéma des arcs-de-cercle qu'elle dessine comme des flèches, et elle le montre sur (3 + 5) × 4*)
> CHER : et est-ce que ça tu l'écris avec une formule ?
> SAND : oui / après
> CHER : ah oui ?
> SAND : ben oui / a + b + c + d
> CHER : tu leur fais
> SAND : oui oui / enfin je leur fais pas écrire dans le cours / mais je peux l'écrire au tableau [...] il me semble que ça c'est pas mal / ils comprennent mieux ce schéma de distrib /ce schéma de distribution parce que là c'est vrai que c'est petit quoi c'est court / alors que là on comprend que ça se poursuit // ça c'est pas mal je trouve

Mais son objectif n'est pas celui de construire une théorie pour des adaptations de techniques, elle ne proposera pas de l'utiliser pour des développements de ce type :

> CHER : en calcul littéral je veux dire est-ce que tu demandes des développements avec plusieurs termes parce que là tu l'as écrit avec des nombres
> SAND : non / non
> CHER : mmm
> SAND : non je leur dis juste pour leur faire prendre conscience du truc

Son projet vise bel et bien la construction d'une transformation de mouvement qu'elle matérialise par des arcs de cercles comme des flèches non orientées. Mais les extensions ne sont qu'une illustration pour mieux appréhender les expressions usuelles que l'enseignement propose, favorisant deux termes notamment pour l'écriture sous la forme d'une somme d'un facteur, elles ne sont pas un enjeu d'enseignement. Les rectangles se révèlent être un support pour une adaptation, mais il n'y a ni dévolution ni avenir de cet usage. De la même façon, Nadine envisage cette extension pour construire des moyens de contrôles syntaxiques (des dénombrements) portant sur la forme des expressions :

> NADI : […] à la limite qu'ils identifient que si y'a trois produits / y'a trois nombres à l'intérieur de la parenthèse / et si y'en a deux / y'en a deux et que par contre / le facteur commun / justement comme il est commun / on peut l'écrire une seule fois / à condition de le mettre devant la parenthèse avec l'histoire que du moment que je touche la parenthèse ça veut dire que j'agis sur tout ce qui est dedans
> CHER : et du coup tu leur fais faire des factorisations ou des développements avec trois termes ?
> NADI : ouais / trois / quatre / pour bien montrer que voilà que y'a pas de limite / que c'est juste / que je dois bien dès le départ compter pour savoir qu'est-ce qui va me rester dans ma parenthèse

L'extension se situe dans la dimension sémio-linguistique : on compte le nombre de produits, et le dénombrement doit correspondre à celui des nombres écrits entre parenthèses, les identifications ostensives semblent découplées de la dimension mathématique. Or, un tel discours doit bien sûr exister dans les classes, il s'agit bien de grammaire des expressions, d'autant que Nadine parle aussi de facteurs et de produits, elle fait clairement référence aux fonctions syntaxiques et à la nature des sous-expressions. Néanmoins, son projet semble écarter l'idée d'une extension du domaine de validité dans la dimension mathématique de la technologie, pour se consacrer à celui de la transformation de mouvement. Il apparaît donc de ce point de vue une certaine incomplétude dans la dialectique qui pourrait s'organiser entre syntaxe et sémantique.

La situation des rectangles : une illustration dans les classes ?

Nous avons vu plus haut que les manuels proposent peu, voire pas, d'exercices occasionnant un retour sur la situation des rectangles. Il semble de ce point de vue, que les choix des manuels fassent écho aux choix qui peuvent exister dans les classes. Ainsi Nadine et Sandra utilisent la situation des rectangles pour construire la distributivité et une certaine généralisation, mais ne s'y appuient plus par la suite dans leur enseignement :

> CHER : // est-ce que ces rectangles là tu vas les réutiliser à un moment donné plus tard ?
> SAND : non[…]
>
> CHER : // est-ce que à un moment donné plus tard tu refais référence aux rectangles est-ce que tu réutilises ces rectangles ?
> NADI : rarement // rarement/ après heu/ pfff/ toujours pareil on se sert du // ouais/ non/ rarement après c'est vrai que c'est plutôt un automatisme/ de formule.

De même que dans les manuels, la généralisation est portée par le formalisme algébrique, et la situation des rectangles n'est pas reprise dans une dialectique entre modèle et système pour soutenir les manipulations, ou des adaptations éventuelles. La situation initiale ne fonctionne pas comme une véritable théorie. Les enseignants questionnent la pertinence de ce changement de cadre qui est finalement isolé :

> CHER : // quel intérêt tu vois à cette activité des rectangles que t'as choisie [...] ?
> SAND : ben j'ai rien trouvé d'autre de mieux quoi / ça fait travailler sur les aires // après j'ai pas d'autre idée pour introduire la distributivité
> CHER : et quelles limites tu vois à cette activité / si tu en vois ?
> SAND : quelles limites / ben ça fait un peu pièce rapportée quoi / c'est-à-dire qu'ils voient pas forcément l'intérêt / c'est un peu artificiel quoi / mais de toutes façons c'est artificiel de trouver la formule

Un épisode lors de l'entretien avec Nadine montre de plus, combien une telle utilisation peut être difficile sans construction avec les élèves d'une véritable dialectique. Nadine est à ce moment là confrontée à la correction d'une erreur d'une élève qui a produit $12\times13+12\times7\rightarrow(12+12)\times(13+7)$. Comme Jérôme Sandra ou Benjamin, elle est assez déstabilisée par les erreurs proposées. Comme Sandra, elle se demande si ce sont de vraies erreurs, de vrais élèves :

> NADI : [*silence*] Comment corriger ça ?
> CHER : ouais / qu'est-ce que tu dirais ?
> NADI : //
> CHER : d'abord est-ce que t'as déjà rencontré des élèves qui te disaient ça ?
> NADI : non
> CHER : //

NADI : moi / c'est même pas une erreur / à la limite / ce qu'ils auraient tendance à faire c'est faire les deux produits / et pas se rendre compte que // tu vois // mais après faire des erreurs du style / heu / je sors les deux je les ajoute / non / ça je /
CHER : ouais
NADI : ouais
CHER : et alors qu'est-ce que tu dirais ?
NADI : heu
CHER : sur quoi tu t'appuierais pour // corriger / pour expliquer pourquoi ?

Elle ne les a, pour la plupart, jamais rencontrées. De sorte que produire une "explication" ou une "correction" à brûle pourpoint n'est pas chose aisée. Elle envisage d'abord l'identification des opérations, et implicitement des opérations prioritaires « où est passée la multiplication » dit-elle.

NADI : ben déjà je demanderais où est passée la multiplication ?
CHER : et tu l'as dans 24 fois 20
NADI : à la fin / ah ouais / d'accord /
CHER : 12 plus 12
NADI : ouais
CHER : et ensuite / 13 plus 7
NADI : et ils les multiplient
CHER : ouais / donc t'as bien la multiplication
NADI : /// sur les priorités // en fait là la multiplication est présente / tu peux pas / non ?

Ce que cet épisode révèle est qu'on ne dispose vraisemblablement pas d'un discours efficace pour ce genre d'erreurs. Il semble manquer justement dans la description de la transformation de mouvement, celle du programme de calcul par étapes, car l'identification des opérations est insuffisante. Pourtant cette enseignante le peçoit, elle parle des priorités, mais ne parvient pas à construire spontanément le discours qui légitimerait dans une certaine dialectique les reconnaissances ostensives qu'elle entrevoit entre propriétés des opérations (priorités) et manipulations (« quand on sort le 12 ») :

NADI : j'aurais tendance à partir sur ça les priorités / mais d'un autre côté / quand on sort le 12 //heu / mais bon là on peut s'aider de problème

Ce qui peut peut-être étonner est qu'elle n'envisage pas la dénotation, c'est-à-dire simplement d'invalider l'égalité par effectuation des deux programmes de calculs écrits : les résultats différents permettent de conclure aussitôt. On peut interpréter cela comme un geste absent dans ses classes. Mais peut-être y a-t-il davantage. Elle cherche plutôt une invalidation de la transformation de mouvement opérée par l'élève, une explication en lien avec la dimension syntaxique, car l'exécution des programmes de calculs, dans la dimension mathématique, ne donne pas accès à ce qui a dysfonctionné dans la transformation de l'élève, c'est-à-dire qu'il manque ici de façon flagrante une dialectique entre les dimensions sémio-linguistique et mathématique.

Poussée à donner une réponse pourtant, Nadine finit par envisager un retour à la situation des rectangles :

CHER : tu partirais sur quel problème ?
NADI : ben du coup un truc vite fait / un rectangle découpé avec 13 et 7 donc voilà
CHER : ouais // comme ça ?

NADI : et après pour invalider la sienne / l'histoire des priorités // ou alors essayer de mettre au défi / parce que moi la mienne j'arrive à y coller un cas qui fonctionne / donc qu'il me fasse pareil avec la sienne
CHER : c'est-à-dire ?
NADI : qu'il essaye de me //
CHER : ha de trouver une situation
NADI : qui marche
CHER : qui montre que ça ..//.. d'accord
NADI : soit avec des aires / soit avec ce qu'il veut / des prix
CHER : ouais des situations / heu / de départ ?
NADI : ouais

Les hésitations et le fait que cette proposition arrive après de nombreux tâtonnements semblent indiquer que ce n'est pas une pratique familière. Plus encore elle montre les limites de la modélisation qu'on pourrait dévoluer aux élèves. Trouver une situation permettant de justifier (modéliser) une technique semble hors de portée : cela demande de mettre en place un aller-retour entre modèle et système modélisé alors que l'on sait que ces types de tâches sont absents de l'enseignement (et de ce point de vue, Verdugo Hernandez (2013) le montre à propos de la construction de rectangles à partir d'écritures algébriques dans une classe de Seconde). Nous retrouvons ici certaines conditions pour la viabilité de la situation comme théorie, et le fait qu'elle demeure une illustration. Les enseignantes interrogées mettant en œuvre cette situation en ont une utilisation pourtant plus approfondie que ce que laissent entrevoir les manuels. Elles s'y appuient pour étendre la propriété de distributivité à des sommes de plus de deux termes. Néanmoins, cette extension n'est pas fondée par ou pour une exploration technologique. Elle est plutôt envisagée comme un levier pour donner accès à des transformations de mouvement -pour Sandra- ou à des éléments de contrôles pour la factorisation –pour Nadine-. Il n'est pas certain que cette utilisation du changement de cadre soit un levier idoine pour le travail dans la dimension sémio-linguistique que les projets de ces enseignantes semblent viser. Les reconnaissances ostensives ou les manipulations dans la dimension linguistiques ne reposent pas véritablement sur les relations entre géométrie et algèbre qui relèvent de la dimension mathématique. Ceci nous conduit à envisager cette dialectique entre les dimensions sémio-linguistique et mathématique comme une condition d'émergence des extensions de la propriété de distributivité, que ce soit à partir de la situation des rectangles, ou non.

Calcul mental et prise en compte des praxis anciennes

Les entretiens permettent de mettre à jour une certaine prise en compte des praxis anciennes de calcul du primaire, dont la place peut s'avérer plus importante que dans les manuels que nous avons analysés. Sandra par exemple témoigne d'une certaine volonté d'unifier les pratiques anciennes et de compléter les praxéologies afférentes. Comme elle utilise la situation des rectangles au moment de l'introduction, le calcul mental prend une place d'application :

SAND : et calculer de deux façons différentes, donc soit on ajoute ça et ça (elle *montre les surfaces qu'elle numérote 1 et 2*)4 × 3 + 4 × 5 ou (3 + 5) × 4 et ensuite une généralisation avec des lettres / *k*, *a* et *b*. (*elle refait un dessin*). Et ensuite les applications directes / ça va être du calcul mental donc quand ils connaissent 9 fois 7 et qu'ils ont oublié 9 fois 8 (*elle écrit 9 × 7 et 9 × 8*) donc là ils répondent toujours qu'ils ajoutent 9 donc tu peux leur justifier que 8 c'est 7 plus 1 et on applique la distributivité là-dessus (*elle écrit : 9 × 8 = 9 × (7 + 1*))

On voit clairement apparaître ici cette volonté de compléter les praxis anciennes du primaire, avec la distributivité comme élément technologique, c'est-à-dire comme propriété qui peut « justifier » ces pratiques anciennes. Mais la technologie est en réalité en rupture avec les praxéologies du primaire, et ce qu'elle relate en témoigne : « ils répondent toujours qu'ils ajoutent 9 », les élèves utilisent donc non pas la distributivité, mais la construction de la multiplication comme addition itérée : l'égalité à l'œuvre ne met pas en jeu justement la décomposition de 8 en 7 + 1, mais bien la définition de $9 \times 8 = 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 = 9 \times 7 + 9$ qui correspond au mode de construction des tables de multiplication en primaire. C'est la composante théorique qui sert ici de technologie. Lorsque l'enseignante montre que la distributivité est aussi une technologie possible, il n'y a pas de recomposition avec la théorie de l'addition itérée, et la reconstruction d'une praxéologie de calcul semble lacunaire de ce point de vue. La question qui se pose alors est celle de la prise en charge par les projets d'enseignement de la réorganisation (au niveau technologique ou théorique) et l'articulation des éléments de justification que sont l'addition itérée et la distributivité de la multiplication.

Sandra s'en fait aussi l'écho lors de son entretien, elle décrit le fait que les élèves ne s'emparent pas de la nouvelle technique et n'unifient pas (certainement par manque de construction avec l'environnement théorique idoine) :

> SAND : […]ben c'est quelque chose de très artificiel / bon mis à part les quelques applications en calcul mental / c'est / c'est / je veux dire c'est des choses qui le problème c'est qu'ils savent le faire naturellement ils rajoutent 9 (*elle montre 9 × 7 et 9 × 8*) donc ils voient pas le lien avec le calcul littéral heu le développement / donc pour ça pour cette application là pour eux c'est pas du développement même si tu leur apprends / même si tu leur dis / pour eux ils ne l'intègrent pas comme quelque chose qui provient d'un développement

Une nouvelle condition nous semble donc apparaître pour la construction d'une unification et afin de compléter les praxis anciennes : celle de la recomposition et de la justification de la distributivité en lien avec l'addition itérée.

Unification parcellaire entre développement et factorisation pour le calcul mental

Nous avons vu plus haut comment Sandra pouvait prendre en compte, même partiellement, les pratiques de calcul mental anciennes en utilisant la fonction justificatrice de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition (dans le sens du développement). Or, cette propriété peut aussi être productrice de nouvelles techniques de calcul mental, en utilisant des factorisations pour trouver les résultats de sommes ou de différences de produits ayant un facteur commun. Pourtant, Sandra, qui utilise le calcul mental dans le premier cas, ne fait pas le même choix pour le second :

> SAND : [..] après en calcul mental pour calculer après des calculs du style 9 × 99 heu voilà et ensuite effectivement les comment dire / ces fameux programme de calcul où t'as besoin de distributivité /fin de distribuer / quoi hein / on part de 3 etc. et on arrive à 1 pourquoi on arrive à 1 bon dans les bonnes classes y'en a qui pensent à prendre *x* / mais pas toujours / donc voilà on applique la procédure mais bon ça suppose d'avoir un peu // de matière au préalable
>
> CHER : ouais / donc là c'est des développements / si je me trompe pas / à quel moment arrive la factorisation ?
>
> SAND : ben / j'en fais très peu de la factorisation //
>
> CHER : en calcul mental non plus ?

SAND : non

Cette unification dans le domaine numérique des types de tâches de développement et de factorisation ne fait pas partie de son projet d'enseignement, qui, du point de vue des caractères FUG qui nous occupent, s'en trouve lacunaire, malgré une certaine préoccupation tournée vers ceux-ci. Nous allons à présent nous intéresser au projet de Jérôme tel qu'il le décrit dans son entretien. Ce projet place le calcul mental comme point d'appui pour l'introduction de la distributivité, au contraire de celui de Sandra ou de Nadine, et à plusieurs égards révèle une attention particulière aux caractères formalisateur, unificateur et généralisateur de la distributivité à des fins d'enseignement. Si chacun des quatre enseignants interrogés fait faire du calcul mental à ses élèves, deux seulement l'envisagent comme levier au moment de l'introduction de la distributivité : Jérôme et Benjamin. Au moment de l'entretien, Benjamin ne parvient pas à expliciter la façon dont il organise l'introduction de la distributivité : il fait faire du calcul mental et « généralise » une sorte d'égalité. Il n'élabore pas davantage. Notre étude ne concerne donc que le cas du projet de Jérôme, pour lequel nous disposons de plus d'éléments, comme nous allons le voir.

2.3.2 Une étude de cas : le projet d'enseignement des caractères formalisateur, unificateur et généralisateur de Jérôme

Prise en compte d'un premier mouvement de généralisation : des types de nombres

Jérôme décrit ainsi son activité d'introduction de la distributivité en classe de 5^{e} :

> JERO : Comme activité/ ce que je leur fais faire // il faut que je la retrouve // mais c'est que je leur donne un calcul à faire séparément // tu sais que ça fait toujours le même nombre […] 3 fois 2 plus 3 fois 5 et vous me calculez ça et vous calculez 3 fois 2 plus 5 voilà // j'en fais plusieurs comme ça // je dis vous pouvez continuer // après je fais pareil avec le moins après je leur demande est-ce que vous pouvez généraliser/ à votre avis/ est-ce que ça marche pour tous les nombres ?

On voit se dessiner un projet d'unification et de généralisation d'un certain type de calcul que l'on applique à des nombres. Ce qui est visé ici néanmoins n'est pas une unification de types de tâches calculatoires et donc de techniques au moyen d'une même technologie, mais des programmes de calculs, différents, c'est-à-dire se modélisant soit par $PCA_1(k ; a ; b) := ka \pm kb$ soit par $PCA_2(k ; a ; b) := k(a \pm b)$. Jérôme continue ainsi :

> JERO : [...] vu que je l'ai fait en début d'année en fait /donc j'ai pas trop vu les nombres relatifs encore / donc / je fais que des entiers // naturels et je leur demande si ça marche pour tout // et généralement ben ils me disent oui // ça doit marcher // je leur dis est-ce que ça marche pour les fractions ? Et généralement ça marche // enfin //

On voit donc chez cet enseignant un projet de généralisation très clairement exprimé, dans le premier mouvement que nous évoquions au chapitre précédent, à propos des types de nombres. Il articule une généralisation au sein d'un même ensemble, depuis les nombres entiers particuliers, à des nombres entiers en général, et d'un ensemble de nombres à un autre : des entiers naturels aux rationnels. Cette prise en compte est peu ordinaire, en particulier pour les nombres rationnels dont on ne trouve aucune trace d'utilisation de la distributivité pour ces types de nombres dans aucun des manuels analysés au moment de l'introduction de la distributivité (numérique comme algébrique).

Le projet de Jérôme semble donc extrêmement original, d'autant qu'il envisage aussi les nombres relatifs, même s'il les écarte en classe au moment de l'introduction car il ne les aborde que plus tard dans l'année. Il évoque quand même la possibilité de cette extension, y compris à d'autres types de nombres, « des nombres plus compliqués » :

> CHER : c'est-à-dire que tu leurs fais une liste de calculs dans laquelle y'a des fractions aussi ?
> JERO : non je leur dis après / d'abord sur les entiers pour que les calculs soient simples
> CHER : d'abord sur les entiers d'accord / et //
> JERO : après je leur demande est-ce que ça marcherait pour des fractions / ou pour des nombres plus compliqués

Le questionnement du domaine de validité de la technologie en construction est donc bien présent en classe, même s'il n'aboutit pas à la construction d'un environnement théorique (avec l'addition itérée) ou si l'exploration numérique n'est peut-être pas tout à fait dévolue aux élèves. L'entretien ne permet pas de déterminer si les élèves auront à effectuer des calculs avec des fractions par exemple à ce moment là, mais Jérôme évoque le fait qu'il donne des expressions les mettant en jeu à l'occasion d'exercices. Il semble néanmoins qu'une partie de la production des écritures des programmes de calculs du même type (PCA_1 et PCA_2) puisse être à la charge des élèves ou du moins soit construite collectivement dans le domaine numérique :

> JERO : 3 fois 2 plus 3 fois 5 et vous me calculez ça et vous calculez 3 fois 2 plus 5 voilà
> CHER : d'accord
> JERO : J'en fais plusieurs comme ça / **je dis vous pouvez continuer**

Il semble toutefois qu'il y ait une identification ostensive qui ne soit pas élaborée véritablement (« ça marche » ne désigne pas clairement la généralisation). D'autre part, cette généralisation n'est pas soutenue par un environnement théorique, de sorte que la tentative ici semble parcellaire, et la place de l'élève dans ce projet plutôt réduite. Jérôme identifie ceci comme « un problème », et ce plus encore, au moment de la formalisation algébrique qui étend et construit en même temps la généralisation qu'il essaye de mettre en œuvre. [39]

Nous allons donc analyser plus avant ce qui, en l'état dans le projet de Jérôme, peut en effet faire obstacle.

Les objets d'unification, de généralisation et de formalisation : un manque autour de l'égalité ?

Nous avons vu que cette entrée dans le calcul d'expressions numériques n'a pas pour objet une extension de technique de calcul mental. Les élèves se voient bien proposés deux types de calculs différents, c'est-à-dire deux programmes de calculs à exécuter, présentant néanmoins les mêmes paramètres (les mêmes nombres apparaissent). Ils sont amenés à constater que les résultats sont identiques à chaque nouveau couple de programmes de calculs proposé. Or ce qui apparaît au moment de l'extension dans le projet de Jérôme est une idée de pattern commun, plutôt que de programme de calcul de même facture. Ainsi parle-t-il de « remplacer » les nombres dans une écriture par d'autres pour préparer la généralisation :

---

[39] Benjamin ne parvient pas quant à lui, à décrire précisément en entretien la situation qu'il propose aux élèves (les types de calculs comme les questions posées lui échappent). Mais il évoque aussi cette difficulté qui émerge au moment de l'écriture symbolique de la généralisation.

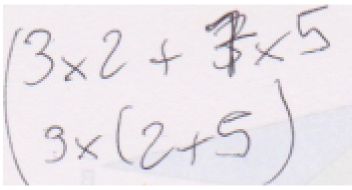
JERO : […] ils vont me dire ah ben c'est égal / donc je leur dis si vous remplacez par des nombres quelconques / est-ce que ça marche […]

Cette particularité s'exprime dans le fait que le programme de calcul n'est pas décrit dans la dimension mathématique (avec les opérations à effectuer par étapes, ou de façon structurelle), mais dans la dimension sémio-linguistique de façon formelle :

JERO : je leur pose à l'oral et heu après ils me disent oui
CHER : et est-ce qu'ils explicitent plus ce qui marche ?
JERO : c'est-à-dire ?
CHER : comment tu heu en fait / tu demandes / tu leur fais constater / qu'est-ce que tu leur demandes de constater ?
JERO : ben heu ça / 3 fois 2 plus 3 fois 5 et 3 fois entre parenthèse 2 plus 5 / ben ils vont me dire que c'est égal / à chaque fois j'ai deux couples, avec le plus

C'est-à-dire que l'accent est mis sur la syntaxe des expressions, avec des prises d'indices ostensifs, qui, s'ils sont nécessaires, sont ici déconnectés de l'interprétation des écritures dans le domaine mathématique, en lien avec les programmes de calcul. Ce phénomène est de plus renforcé par une modification de l'un des programmes de calcul par rapport à celui qui lui est couplé :

JERO : […] et je le fais par contre j'essaye de voir heu si je change si je mets 7 et 7 là / ils vont me dire oh ben ça marche pas (*Il modifie l'écriture et montre le 3 de la 2^{e} ligne*)



Cette modification n'est pas un simple changement de paramètre du programme de calcul PCA_1. Il introduit de fait un programme de calcul à quatre paramètres $PCA'_1(3 ; 2 ; 7 ; 5) := 3 \times 2 + 7 \times 5$ de sorte qu'implicitement, comme ce changement d'écriture est annoncé comme un changement de nombre dans l'écriture, PCA_1 puisse alors s'interpréter comme relever d'un programme de calcul à quatre paramètres $PCA_1'(k ; a ; k' ; b) := ka + k'b$ plutôt que trois. Ce faisant la question de l'équivalence des programmes de calcul, en toute rigueur, et dans une perspective de généralisation, ne peut se poser que dans le cas particulier de $k = k'$ qui ramène les deux programmes de calculs à un même nombre de paramètres auxquels on peut affecter les mêmes valeurs. Ce glissement renforce donc l'idée que l'on ne modifie pas en réalité l'une des valeurs du programme de calcul, mais plutôt l'écriture (« là » dit Jérôme), pour mettre l'accent sur un nécessaire ostensif commun : le même nombre que l'on retrouve dans la ligne en dessous. Cet ostensif semble également fortement lié à sa localisation géographique dans l'écriture au détriment à ce moment là de sa fonction syntaxique :

CHER : et qu'est-ce qu'ils te disent pour dire que ça marche pas ?
JERO : enfin ben je leur dis beh faites le calcul là par exemple (*il montre la première ligne*) et je leur demande là qu'est-ce que vous mettriez (*il montre le facteur de gauche de la deuxième ligne*) y'en a ils essayent 3 / 7 ou avec 5 et ils voient que ça fait pas le même résultat // et je leur dis ben vous voyez / il faut qu'il y ait le même nombre qui revient en fait // après c'est vrai que c'est pas évident

On voit apparaître une tentative pour faire le lien entre les deux écritures symboliques en essayant de reconstruire un possible programme de calcul équivalent « là, qu'est-ce que vous mettriez », mais cette reconstruction ne passe pas par l'idée d'une transformation de mouvement, c'est-à-dire par l'idée que l'on puisse opérer sur les écritures (et donc sur les programmes de calcul) dans le but de produire une expression égale. Le caractère transformable de l'expression s'exprime dans sa forme ostensive faible consistant à remplacer un nombre par un autre, par une sorte de jeu d'essai / erreur. La construction d'une transformation de mouvement robuste, c'est-à-dire qui puisse créer un lien véritable entre les dimensions sémio-linguistique et mathématique ne saurait advenir en l'état dans cette construction de la connaissance. Plus encore, l'importance donnée aux ostensifs, apparemment assez localisés géographiquement dans les écritures, sans cette dialectique, est peut-être de nature à entraver de futures adaptations y compris dans la technique des écritures (on peut penser à des sommes de trois termes), d'autant que l'environnement théorique manque. On retrouve aussi l'écueil de l'entrée par les programmes de calcul qui n'est pas propice, sous cette forme, à l'émergence d'une transformation de mouvement : l'égalité apparaît seconde, c'est-à-dire qu'elle se construit à partir de dénotations identiques (les nombres obtenus sont les mêmes). Il n'y a pas à un moment ou à un autre dans le projet de cette introduction, la construction d'égalités (ou d'expressions égales) au moyen d'une certaine manipulation (linguistique) et dont la dénotation serait 'Vrai' parce que la manipulation reposerait sur une propriété mathématique. Ceci entraînerait, par vérification, que les dénotations des deux expressions de part et d'autre de l'égalité, soient les mêmes. C'est cette dialectique qui est absente au moment de la construction de la distributivité.

On peut se demander néanmoins si lors de l'entretien, Jérôme n'a pas simplement omis de changer les deux 7 dans l'écriture précédente (il a une feuille de papier devant lui sur laquelle il prend des notes), mais même si tel était le cas, le changement ne s'accompagne pas davantage d'un discours sur les programmes de calcul, le sémantique est implicite et le discours reste centré sur les écritures sans dialectique avec la dimension mathématique. De sorte que ce qui unifie, se situe dans la dimension sémio-linguistique : c'est la forme des expressions, c'est-à-dire un certain pattern commun qu'on ne parvient pas à désigner autrement que par ostension : à la question de la formulation de ce qui « marche » c'est-à-dire de ce qu'on peut généraliser, Jérôme manque de mots pour parler de ce pattern, ce qui est en accord avec le caractère protomathématique de la reconnaissance qu'il attend des élèves, et qui corrobore une certaine complexité qu'il exprime de diverses manières « c'est pas évident » dit-il, avant d'évoquer que certains élèves « voient » tout de suite, et d'autres, non. Cette difficulté pour dépasser les reconnaissances implicites peut aussi s'interpréter à la lumière d'une autre incomplétude de la généralisation. L'extension de l'utilisation du signe = qui accompagne cette généralisation syntaxique n'est pas objet d'étude, ce qui explique sans doute encore ce manque de discours autour de l'équivalence de programmes de calcul qui pourrait nourrir et dialectiser les descriptions.

Ce qui est étonnant c'est que Jérôme semble en quête de cette transformation de mouvement dans le domaine numérique pour l'étendre au domaine algébrique : c'est semble-t-il ce qu'il aimerait construire comme dialectique entre numérique et algébrique, mais que sa situation ne lui donne pas en réalité. Malgré ce travail du calcul mental, ce qu'il va projeter d'unifier et de généraliser au moment du passage au travail algébrique relève encore des pratiques sémio-linguistiques.

Ceci est étroitement lié à une désarticulation des blocs praxiques et technologico-théoriques que l'on voit émerger dans cette organisation de l'introduction de la distributivité. Les écritures sont isolées de toute technique qui pourrait les convoquer. Elles n'ont pas de fonction justificatrice, de sorte que les élèves n'en voient pas l'utilité, ou l'amalgamation dans une praxéologie mathématique, puisqu'elles ne se modèlent que dans la syntaxe :

> CHER : d'accord / heu / c'est toute ton activité d'introduction / tu fais le cours / les exercices, d'accord / et alors quels avantages tu vois de commencer par heu ben tout ce calcul sur les nombres ?
> JERO : heu / disons que sur le coup de le voir en avance / c'est juste un préambule pour le calcul littéral avec des lettres vraiment / parce que c'est vrai que quand on fait comme ça j'ai pas trop heu ils disent ben ça sert à quoi de l'écrire comme ça ? je leur dis ben vous verrez ce sera utile pour plus tard mais c'est vrai que la pratique dans des exercices ou des problèmes j'ai pas trouvé à quoi ça sert / fin c'est plutôt avec le calcul littéral avec une lettre pour résoudre une équation après ou quelque chose comme ça mais sur le coup c'est juste pour préparer tu vois le calcul qu'on va avoir le même résultat mais écrit différemment mais c'est vrai que sur le coup ils me disent ben oui ça s'écrit comme ça mais quel intérêt / et je leur dis vous verrez plus tard / j'ai pas trouvé le moyen / je leur dis ça servira après c'est une technique

Apparaît sans-doute là l'enjeu de l'introduction que cherche à construire Jérôme sans y parvenir tout à fait : une technique de manipulation des écritures qui conserve la dénotation. Il n'en demeure pas moins que son projet prend en partie en charge, même de façon parcellaire et inaboutie, l'extension des types de nombres, jusqu'aux écritures littérales.

Une dialectique numérique algébrique centrée sur les écritures : un manque de dénotation

Au moment du travail des genres de tâches de développement et de factorisation sur les écritures algébriques, il fait fonctionner une étonnante dialectique entre numérique et algébrique. Elle n'est pas fondée sur la dénotation des expressions, ou sur la généralisation de la technologie au domaine algébrique, mais bien sur l'extension des pratiques sur les écritures, dans le domaine numérique, qu'il a créées au moment de l'introduction de la distributivité. C'est ce que révèle l'extrait d'entretien suivant où Jérôme explique comment il corrigerait un élève ayant produit la transformation erronée $4(x+3) \to 12+x$

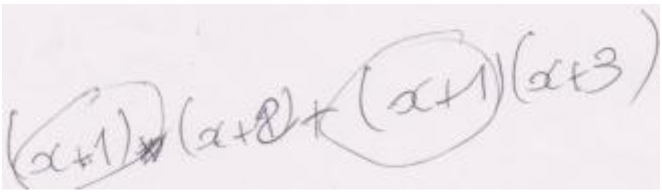
> JERO : […] au pire au début je reprends un nombre / je dis ben *x* pour l'instant il te fait peur / ben prends 5 et comment tu vas faire / alors tu distribues alors ça fait 4 fois 5 plus 4 fois 3 donc je suis bien d'accord que là ça fait plus 12 que là tu fais fois 4 tu l'as bien multiplié ton 5 par 4 donc là ton *x* ça peut être qu'un nombre donc 5 / et il faut pas oublier de le multiplier par 4.
> CHER : ah oui là en remplaçant par la lettre tu reviens à l'écriture de la distributivité sans faire le calcul ?
> JERO : ouais
> CHER : tu refais pas le calcul à droite et à gauche ?
> JERO : ouais <u>je préfère revenir avec un nombre pour écrire /</u> pour ceux qui aiment pas les lettres

Il montre les manipulations idoines sur des expressions numériques par une sorte de recontextualisation pour mettre à jour une opération manquante (sur les écritures) : multiplier le nombre par 4. Cet usage du domaine numérique fait écho à ce que l'on observait dans le manuel Phare de 5^{e} au moment de l'institutionnalisation où les transformations des écritures numériques n'avaient pas pour finalité le calcul et semblaient présentées pour les analogies scripturales entre numérique et algébrique qui pouvaient découler des manipulations (avec ostensifs colorés). Or, cette dialectique peut se révéler entraver d'autres manipulations des écritures, en particulier lorsque les ostensifs nécessitent une interprétation sémantique *via* la dénotation pour unifier et recomposer les pratiques sur les nombres. C'est ce que Jérôme décrit comme difficulté, en partie inhérente à cette construction des connaissances, qui fait obstacle à d'autres extensions dans le domaine algébrique.

Un chaînon manquant pour la généralisation : les écritures de nombres et la dénotation des expressions

Ainsi identifie-t-il l'une des difficultés d'enseignement de l'algèbre :

> JERO : pour factoriser ils ont beaucoup de mal / si tu veux / si t'as x plus 1 facteur de x+2 plus heu x+1 facteur de x+3, ils ont du mal à voir que ça c'est le même nombre (*il entoure x+1*) et qu'on peut utiliser la distributivité que c'est le k tu vois et que ça c'est le a et ça c'est le b.



> CHER : et pourquoi à ton avis ?
> JERO : // mais je pense ça vient vraiment de la représentation / que pour eux / c'est pas un nombre / c'est pas comme avec 2 fois 3 comme ils faisaient au début

Ce qui manque certainement pour le lien entre le travail sur les nombres et ce travail sur les expressions algébriques se situe dans une articulation entre la dénotation et les différentes écritures de nombres, et une certaine généralisation de l'utilisation des écritures algébriques qui ne semble pas mise à l'étude : associer l'ostensif k à un nombre parce qu'il a été construit comme généralisant justement un nombre est certainement plus aisé que pour une expression comme $x + 1$. Ce d'autant que la lettre généralise une écriture décimale de nombre, et non une autre écriture de nombre (comme une somme par exemple, ou un produit). Il y a donc un usage plus étendu de l'écriture $ka + kb = k(a + b)$, mais l'extension se fait en rupture finalement avec les pratiques sur les nombres.

Dans cette tentative de prise en compte du calcul mental et des dialectiques numérique/algébrique dans un mouvement de généralisation, d'unification et de formalisation, demeurent finalement de nombreuses incomplétudes et implicites qui se traduisent en particulier par des difficultés à mettre au cœur de l'étude une véritable dialectique entre les aspects syntaxiques et sémantiques des expressions. Jérôme manque de mots et finit par placer l'essentiel du travail dans la dimension sémio-linguistique malgré cette prise en compte peu ordinaire, au regard des analyses de manuels, des extensions entre types de nombres et expressions algébriques. Nous allons maintenant aborder plus en détail la question de la dialectique entre les dimensions sémio-linguistique et mathématique susceptible de vivre, ou non, dans les classes, et de se constituer comme contrainte à un enseignement tourné vers les caractères formalisateur, unificateur et généralisateur des savoirs à enseigner sur la distributivité.

2.3.3 Discours et théories dans les classes : des dialectiques entre syntaxique et sémantique fragiles

Des dialectiques présentes dans les classes

Nos analyses concernent ici l'ensemble des entretiens menés qui témoignent de discours susceptibles d'exister dans les classes. Comment, et dans quelle mesure ces discours peuvent-ils articuler les dimensions sémio-linguistique et mathématique ? Nous supposons en cela que les narrations des enseignants face à leur interlocutrice, révèlent ceux qui peuvent exister en classe. C'est-à-dire que nous supposons qu'ils puissent en être proches, à l'occasion de corrections d'erreurs d'élèves que les professeurs envisagent pendant l'entretien. Les questions posées comme « que dirais-tu à un élève qui … pour le corriger ? » sont *a priori* de nature à donner accès, du moins dans une certaine mesure, à la théorie dont peuvent disposer les élèves dans les classes. Le choix de ne pas utiliser des observations de séances pour ce faire permet aussi de questionner la façon dont le discours à destination des élèves peut faire dialoguer manipulations des écritures et théorie mathématique dans les projets d'enseignement de ces professeurs, tout au long du collège. Plus encore, les erreurs d'élèves choisies relèvent à la fois des domaines numériques et algébriques, et selon les pratiques, pourraient ne pas apparaître dans les observations. Ainsi, certaines d'entre elles se révèlent inouïes pour les enseignants interrogés, par exemple parce qu'ils ne proposent pas un certain type de calcul mental dans leurs classes.

Nous structurons notre analyse selon trois pratiques de manipulations d'écritures erronées dans la dimension sémio-linguistique. Pour chacune de ces pratiques nous interrogeons le lien entre sémantique et syntaxique. Le lien est-il explicite ? Quelle théorie (de la dénotation, de l'addition itérée) l'accompagne-t-il ?

La première pratique relève d'une extension praxémique aboutissant à l'utilisation implicite d'une distributivité de la multiplication par rapport à elle-même. Deux erreurs d'élèves en témoignent dans le domaine numérique avec la transformation implicite $2 \times 3 \times 5 \to 6 \times 10$ et dans le domaine algébrique avec $2x \times 5x \to 10x$.

La seconde peut s'interpréter du côté de conservations ostensives guidant les manipulations, dans le domaine numérique, pour construire des techniques de calcul fondées sur $12 \times 13 + 12 \times 17 \to (12 + 12) \times (13 + 17)$, et dans le domaine algébrique, pour effectuer des développements ou des factorisations comme $4x + 4 \times 3 \to 4(x + 3) \times 4$ ou $4 \times (x + 3) \to 12 + x$.

Enfin une troisième pratique syntaxique repose sur le dénombrement, pour des transformations de mouvements correspondant à des réductions d'expressions algébriques. Les enseignants l'identifient en effet comme l'une des difficultés de l'enseignement de l'algèbre

Distributivité de la multiplication par rapport à la multiplication : dialectique entre extension praxémique et technologie
Du point de vue épistémographique, les deux transformations de mouvement, $2 \times 3 \times 5 \to 6 \times 10$ dans le domaine numérique, et $2x \times 5x \to 10x$ dans le domaine algébrique, peuvent s'interpréter comme relevant d'une extension praxémique de la distributivité de la multiplication sur une autre opération que l'addition ou la soustraction : celle de la multiplication. La première correspond à un développement $2 \times (3 \times 5) \to (2 \times 3) \times (2 \times 5)$ et la seconde à une factorisation $2x \times 5x \to (2 \times 5)x$.

Les discours des enseignants font dialoguer très clairement les dimensions sémio-linguistique et mathématique, mais aussi la dimension instrumentale outillant le travail sur les écritures, du point de vue des savoirs pratiques (des savoirs pour faire qui relèvent de méta-connaissances mathématiques).

Ainsi Nadine évoque-t-elle la correction qu'elle proposerait :

> NADI : […] déjà je demanderais d'où sort le 6 et le 10 même si je me doute d'où ça vient / pour le faire dire quand même / donc a priori /il me dirait qu'il a distribué le 2 sur le 3 et le 5 et à la limite / effectivement dire que la distributivité c'est quelle opération sur quelle opération ?

Elle ferait donc expliciter la transformation afférente, comme extension d'une manipulation des écritures fondées sur la distributivité : « il a distribué le 2 » dit-elle, il y a donc bien un passage de la dimension sémio-linguistique à la dimension mathématique, puis évocation des savoirs pratiques afférents « la distributivité c'est quelle opération sur quelle opération », il y a donc bien un parcours depuis la dimension sémio-linguistique *via* la dimension mathématique jusqu'à la dimension instrumentale. Sandra, de façon assez similaire, évoque technologie et indices ostensifs correspondants, même si elle fait plutôt référence à un pattern et à des notions protomathématiques de reconnaissance de forme dans la dimension instrumentale :

> SAND : et oui 2 fois 3 fois 5 (*elle dessine les arc-de-cercles*) ..//..heu ben je leur dirais que le schéma c'est seulement ça quoi (*elle écrit 2 × (3+5) et l'encadre*) la distributivité c'est une addition une multiplication entre parenthèse qui se généralise pas ..//.. il faut reconnaître ça quoi (*elle encadre*) qu'ils soient capables de reconnaître cette forme là quoi et qu'elle ne s'applique que là dedans.

On peut noter l'évocation de l'extension impossible, qu'elle n'envisage pas *a priori* d'explorer. On pourrait penser que la théorie de la dénotation par exemple manque pour compléter ces dialectiques qui ne sont qu'évoquées. Ces évocations sont pourtant *a priori* suffisantes. Dans un moment de correction, on ne saurait envisager en effet de convoquer tous les arguments et toutes les interprétations possibles, une ou deux suffisent en général pour conclure. Cela ne signifie pas que la dialectique soit faible mais simplement qu'elle s'exprime nécessairement de façon parcellaire à un moment ou à un autre. Ainsi Benjamin évoque-t-il une possible mise à l'étude en classe, à la fois de la transformation de mouvement qui affleure dans cette pratique d'élève, de la question de la technologie qui pourrait la soutenir et de la dénotation articulant les dimensions afférentes. Il complète de ce point de vue son discours autour des méta-connaissances à propos des opérations qui relèvent de la propriété de la distributivité, à l'instar des enseignantes précédentes :

BENJ : […] moi je lui ferais faire le calcul là après on prend une calculatrice on va voir si ça marche cette technique / peut-être qu'elle est bonne / et on ferait ce calcul à la calculatrice on ferait son calcul à la calculatrice et on regarderait si les résultats sont les mêmes
CHER : d'accord
BENJ : je dirais avoir des idées c'est bien après il faut pouvoir vérifier si ton idée elle est juste ou pas / comment vérifier si ton idée est juste / ben / on calcule si ça marche t'as trouvé une technique qui fonctionne / après on essaye sur d'autres cas pour voir si ça marche encore pour arriver à voir / si tu peux la généraliser ou pas / […] fin là je dirais quand même au gamin qu'il aurait pu un peu apprendre sa leçon / et identifier les opérations qu'il y avait / attention au signe / parce que là en gros il développe

On voit bien fonctionner ces articulations entre calcul, égalité et dénotation permettant de contrôler la transformation et la question de l'extension en lien avec la technologie de la distributivité. Benjamin insiste dans son discours sur le lien entre manipulation et technologie en évoquant un questionnement de l'élève « qu'est-ce que tu utilises, qu'est ce qu'il y a derrière ce que tu as écrit, est-ce que tu connais ton identité ».

Jérôme quant à lui est extrêmement dérouté par cette erreur, bien sûr il évoque des savoirs pratiques de la même manière que les enseignants précédents, mais il identifie un manque technologique chez les élèves et dans les programmes, pour pouvoir corriger correctement cette erreur : c'est celle de l'associativité de la multiplication. En effet seule cette technologie permet de donner un sens à une écriture d'un produit de trois facteurs. La multiplication est un opérateur binaire, et c'est bien l'associativité qui assure l'équivalence des programmes de calculs d'expressions $(2 \times 3) \times 5$ et $2 \times (3 \times 5)$. L'écriture non parenthésée peut alors correspondre à l'un ou l'autre des programmes de calcul, sans ambiguïté du point de vue de la dénotation, puisqu'elle est identique. Ce qui gêne justement Jérôme est la description du programme de calcul afférent, et en l'absence de la technologie, il montre que la technique de calcul est isolée de la propriété mathématique. Il n'y a pas de raison pour un élève, de n'en pas convoquer une autre, comme une extension de la distributivité de la multiplication par rapport à elle-même :

JERO : heu oui c'est vrai que la distributivité marche pas […] ben là c'est l'associativité mais je leur en parle pas / heu / c'est vrai que ..//.. fin je dis vous faites votre premier calcul et 2 fois 3 et vous continuez le résultat fois 5 / mais c'est vrai que ..//.. c'est vrai que je vois pas […] on fait c'est vrai que c'est là l'associativité peut être faudrait la faire en 6^{e} tu vois l'erreur / ou alors en début de 5^{e} quand je fais les règles de calcul / je devrais le faire l'associativité / 2 fois 3 fois 5 que tu vas pas le compter / que c'est pas distributif

Il y a en effet un manque de transformation de mouvement pour pouvoir travailler l'écriture du produit de trois facteurs reposant sur l'associativité. Jérôme exprime là l'absence de l'associativité dans ses classes (c'est-à-dire qu'elle reste implicite, et n'a pas été mise à l'étude). Une telle technologie pourrait pourtant permettre les transformations suivantes (nous partons de l'interprétation du sens du programme de calcul par l'élève qui par analogie scripturale parenthèse implicitement *a priori* le produit 3×5) : $2 \times 3 \times 5 \rightarrow 2 \times (3 \times 5) \rightarrow (2 \times 3) \times 5 \rightarrow 6 \times 5$. Ces transformations permettraient à la fois de justifier la technique de calcul dont parle Jérôme (le programme de calcul commençant par le produit de 2 par 3), et par suite l'inadéquation du programme de calcul proposé, par comparaison du dernier produit : 6×5 et 6×10. On obtient une comparaison des techniques de calcul, et la transformation de mouvement jouerait bien son rôle, permettant une dialectique entre manipulations syntaxiques, techniques de calcul et propriétés mathématiques. La dénotation ne permet pas de faire ce lien en l'absence de la transformation reposant sur l'associativité. Nous verrons par la suite, les conséquences au moment de l'extension dans le domaine algébrique de telles transformations erronées.

Jérôme lie de lui-même lors de l'entretien les deux erreurs $2 \times 3 \times 5 \rightarrow 6 \times 10$ dans le domaine numérique et dans le domaine algébrique $2x \times 5x \rightarrow 10x$ par l'associativité dont on voit aussi ressurgir son projet de généralisation de propriétés sur les nombres au domaine algébrique (il parlait plus haut de « faire l'associativité » en 6^{e} ou en début de 5^{e} sur les nombres) :

> JERO : oui non oui d'accord / je leur dis bon vous associez / vous faites 2 fois 5 mais après *x* il faut bien faire *x* fois *x* / là vous l'ajoutez pas / je leur dirais vous faites 2*x* + 5*x* là vous allez ajouter

Nadine, Sandra et Benjamin évoquent de même un travail sur la syntaxe de l'expression, puis la transformation fondée sur la commutativité pour faire apparaître le produit de x par x et l'identification ostensive suffit pour conclure.

> NADI : je remets les fois
> CHER : ouais et après
> NADI : après je travaille sur le fait que la multiplication est commutative / et qu'il y a deux *x* mais pas deux au sens de double mais le produit de *x* par *x*.

Transformations fondées sur des conservations ostensives

Nous interprétons les transformations suivantes comme des manipulations syntaxiques fondées sur des avatars de distributivité mêlant des conservations ostensives c'est-à-dire des conservations des occurrences des nombres dans l'expression produite par rapport à l'expression donnée. Ainsi on verra apparaître deux fois le nombre 12 ou deux fois le nombre 4 dans les écritures issues des transformations : $12 \times 13 + 12 \times 17 \rightarrow (12 + 12) \times (13 + 17)$, et dans le domaine algébrique $4x + 4 \times 3 \rightarrow 4(x + 3) \times 4$. De la même façon, 4 n'est utilisé qu'une fois pour produire l'écriture résultant de $4 \times (x + 3) \rightarrow 12 + x$.

Deux théories apparaissent dans le domaine numérique. Jérôme et Benjamin proposent d'exécuter les programmes de calcul en utilisant les priorités des opérations, puis de comparer les résultats. La théorie de la dénotation des expressions ainsi que celle de l'égalité sont ici convoquées dans le travail de vérification. Jérôme évoque aussi des indices ostensifs en lien avec la transformation de mouvement reposant sur la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

> JERO : […] qu'est-ce qui est prioritaire /donc je leur dis / heu donc / faites votre calcul vous me dites on fait 24 fois 20 / donc je leur dis faites votre calcul /donc ils font leur calcul / et je dis sinon /revenez à ce que vous connaissez / les règles de calcul / ça je les fais bien répéter donc à chaque fois / donc qu'est-ce qui est prioritaire / la multiplication ou l'addition / donc si ils ont bien travaillé / ils disent c'est la multiplication / donc je dis ben 12 fois 13 même si vous voulez vérifier / prenez votre calculette / plus 12 fois 7 et alors est-ce que vous trouvez le même résultat que là ? ben ils disent à ben non / je leur dis / non donc là je peux repartir sur la distributivité
> CHER : ouais
> JERO : donc là je vais leur dire / le nombre qui revient / ben normalement ils vont me dire 12 / après je sais pas si c'est bien à faire je leur dis donc ben la formule / vous mettez 12 d'abord parce que c'est le nombre qui revient /après vous faites / vous ouvrez votre parenthèse après qu'est-ce qu'il y a ? je leur dis toujours qu'est-ce qu'il y a collé à 12 ?

> donc ils vont me dire 13 je dis vous continuez votre lecture / il faut pas oublier le // heu // le / le signe / donc/ plus ben et après qu'est-ce qu'il y a ? 7 / et voilà

On voit s'exercer un certain mouvement dans les différentes dimensions du traitement algébrique. Tout d'abord la dénotation permet d'invalider la transformation de mouvement, il n'y a pas égalité après exécution des programmes de calcul. Dans un second temps, la technologie de la distributivité (dans la dimension mathématique) permet de soutenir une nouvelle transformation de mouvement dans la dimension sémio-linguistique. Cependant notons que la description de la manipulation est extrêmement formelle, elle s'appuie sur des indices ostensifs bruts, c'est-à-dire sans identification des fonctions syntaxiques ou de la nature des sous-expressions. Il n'en demeure pas moins qu'il y a une description du point de vue syntaxique, mais qui s'appuie sur une analogie scripturale de la formule semble-t-il. Ce qui manque peut-être est qu'à ce moment-là la dénotation n'est pas évoquée. Nous y reviendrons.

Sandra, quant à elle, cherche une réponse se situant à un niveau plus profond de la théorie mathématique, en lien avec la manipulation des écritures :

> SAND : j'ai jamais vu ça /c'est vrai c'est des erreurs d'élèves ?
> CHER : ha oui oui oui / c'est mes élèves de l'an dernier / ils étaient deux ou trois à me poser cette question // ils me disaient « on comprend très bien qu'on fait 13 et 7 mais pourquoi on fait pas 12 et 12 / 24 et // »
> SAND : mmm // j'en sais rien moi pourquoi // y'a une justification logique là-dessous ///
> CHER : c'est la question si tu veux que je me posais
> SAND : ben je sais pas moi 12 fois 13 c'est 13 plus 13 plus // 11 fois
> CHER : ouais
> SAND : et 12 / heu non je m'y prends mal / non c'est 12 plus 12 plus 13 fois / puis 7 fois 12 / 12 plus 12 / 7 fois donc après ça fait vingt 12 (*elle fait une accolade et écrit 20 × 12*) mais bon

On voit donc que face à la question, la théorie mathématique dont l'enseignante dispose pourtant n'est pas spontanément convoquée. On peut donc penser qu'elle ne vit pas dans ses classes. Plus encore cette hypothèse semble-t-elle renforcée par l'hésitation liée au sens de l'écriture de la multiplication. Elle le lit en effet, comme il se fait couramment, sans orientation, or du point de vue linguistique, "fois" n'est pas équivalent à "multiplié par". L'équivalence n'est en réalité assurée que par commutativité de la multiplication.

Ceci correspond aussi à la construction de la multiplication en primaire où le signe × est orienté comme nous l'avons vu précédemment. Ainsi 3×5 se lit 3 multiplié par 5 ou 5 fois 3 et est défini par : $3\times5 = 3+3+3+3+3$. Inversement 5×3 se lit 5 multiplié par 3 ou 3 fois 5 et est défini par $5\times3 = 5+5+5$. Le fait que l'on puisse confondre les deux lectures, ou indifféremment utiliser "fois" ou "multiplié par" en lisant de gauche à droite relève de la sémantique de l'écriture et de la propriété de commutativité. Elle est cependant à ce point naturalisée que l'enseignante ici n'y prêtant plus attention donne d'abord une écriture qui ne permet pas d'aboutir à la démonstration souhaitée, en "tombant dans le piège" de la lecture ostensive. Elle lit 12 fois 13 pour 12×13 au lieu de 13 fois 12. En ce qui concerne le lien avec l'addition itérée, ce n'est pas identique, bien qu'équivalent.

Cet épisode montre sans doute que l'utilisation de cette théorie n'est pas familière à l'enseignante, non pas du point de vue de ses connaissances mathématiques, mais bel et bien de leur utilisation à des fins d'enseignement.

Etant donné que les autres enseignants interrogés ne l'évoquent pour leur part à aucun moment, l'hypothèse selon laquelle cette théorie ne vit pas dans les classes semble confortée. De sorte que la dialectique qu'elle pourrait prendre en charge dans la justification entre transformation de mouvement et technologie de la distributivité comme le montre Sandra ne vit certainement pas non plus.

Dans la même perspective, on retrouve les résultats de Sackur & al. (1997) quant à une faible place accordée à la théorie de la dénotation. Si elle apparaît bien dans le domaine numérique, elle semble assez évanescente dans le domaine algébrique. Ceci s'explique certainement aussi en partie par les analyses des écritures d'un point de vue ostensif qui puissent suffire pour corriger les erreurs précédentes. Chacun des quatre enseignants propose de « revenir à la formule » et soit par reconnaissance de forme (implicite avec les flèches), soit par dénombrement des multiplications, ou par analogie scripturale (l'identité est écrite en dessous pour Benjamin), le travail se situe essentiellement dans la dimension sémio-linguistique, dont l'ostensif de l'identité sert de référence syntaxique pour la distributivité. On peut donc parler à ce moment là d'une dialectique faible entre les dimensions sémio-linguistiques et mathématiques, avec, en l'absence de description idoine de la transformation de mouvement, des discours centrés sur des indices scripturaux de surface. Sandra expliquera plus tard dans l'entretien, à propos de choix d'identités permettant d'effectuer des transformations de mouvement : « il faut qu'ils reconnaissent ces trois formes, un nombre qui précède une parenthèse, deux parenthèses avec que des plus et des moins […] ». Ces discours ne sont pas illégitimes pour autant, simplement ils apparaissent ici faiblement faire le lien avec ce qui se joue, et paraissent de nature à rigidifier les techniques de manipulations (comme le nombre de termes par exemple). La théorie de la dénotation apparaît pourtant, Sandra l'évoque comme complément possible :

> SAND : ben après avec un exemple chiffré pour lui montrer quoi / pour 4 fois 2 moins 4 fois 3 ça marche pas de faire son truc quoi // de factoriser comme elle factorise / lui montrer que le résultat est pas le même quoi
> CHER : donc de remplacer par 2 //
> SAND : ben de revenir / de faire 4 fois 2 plus 4 fois 3 on calcule / calculer par ce biais / 8 plus 12 / on va trouver 20 et pas l'autre.

Seulement deux enseignants pourtant la convoqueront lors des entretiens : Jérôme et Sandra. Jérôme explique en effet :

> JERO : […] ou alors par exemple ça x+ 3 = 3x y'en a ils me disent ça fait 3x mais je dis ben non / je leur donne un exemple avec x / 4 par exemple et je fais ben si tu fais 4 / 4 plus 3 ça fait 7 et 3 fois 4 ça fait / ah ben / oui ça fait 12 / donc je dis ça x plus 3 tu peux pas /donc tu laisses / parce que tu sais pas combien ça fait et c'est vrai que c'est vraiment pas évident

Elle n'apparaît qu'à l'occasion de cette seule correction d'erreur qu'il propose, probablement parce que cette erreur n'a pas d'équivalent dans le domaine numérique, on ne saurait imaginer en effet un élève qui pour ajouter 3 à 5 écrirait 35. On pourrait de ce point de vue interpréter l'erreur du côté linguistique (ou syntaxique) comme une mauvaise concaténation sans lien avec les conventions d'écritures, motivée par une recherche de réduction ostensive, mais là n'est pas l'essentiel pour la théorie en jeu.

La relation avec le domaine numérique semble prégnante pour cet enseignant. Elle se situe pourtant à un autre niveau : les transformations de mouvement pour lui sont, dans le domaine algébrique, des modélisations de transformations de mouvement dans le domaine numérique. Il a en effet travaillé la distributivité dans le numérique, par évaluation des programmes de calcul, et généralisation. Il a donc fait travailler les élèves sur les manipulations scripturales avec des nombres. Supposant ces manipulations plus aisées dans le domaine numérique, il demande alors aux élèves de les produire en remplaçant x par un nombre.

> JERO : […] j'aime bien mettre des valeurs / pour ceux qui ont du mal avec la lettre / ce que ça représente

Mais il ne s'agit pas de dénotation. De sorte que pour développer $2 \times (x+1)$, il propose d'effectuer le développement de $2 \times (5+1)$ et d'écrire $2\times5+2\times1$ avant de remplacer de nouveau 5 par x. La consigne de l'activité d'introduction de la distributivité dans le cadre algébrique est la suivante : Ecrire sous forme d'une somme le produit : $2 \times (x+1)$ et dit-il :

> JERO : […] « écrivez différemment » donc voyez la distributivité / parce que y'en a qui vont trouver de suite / mais la majorité non quand même je leur ai dit la distributivité vous vous rappelez comment on a fait on mettait avec la parenthèse comme ça et on distribuait le 2 ben vous pouvez faire avec 5 par exemple à la place du x mais pour n'importe quel nombre.

Et plus loin, il explicite encore cette référence constante au domaine numérique qui ne relève pourtant pas de la dénotation :

> JERO : ben oui je dis tu refais la distributivité/ au pire au début je reprends un nombre/ je dis ben x pour l'instant il te fait peur/ ben prends 5 et comment tu vas faire/ alors tu distribues alors ça fait 4 fois 5 plus 4 fois 3 donc je suis bien d'accord que là ça fait plus 12 que là tu fais fois 4 tu l'as bien multiplié ton 5 par 4 donc là ton x ça peut être qu'un nombre donc 5/ et il faut pas oublier de le multiplier par 4
> CHER : ah oui là en remplaçant par la lettre tu reviens à l'écriture de la distributivité sans faire le calcul ?
> JERO : ouais
> CHER : tu refais pas le calcul à droite et à gauche ?
> JERO : ouais <u>je préfère revenir avec un nombre pour écrire</u>/ pour ceux qui aiment pas les lettres

Il s'agit bien de modélisation "pour écrire", c'est-à-dire pour produire les transformations de mouvement. Dans le domaine numérique cependant, la théorie sous-jacente est explicite, et relève de l'égalité comme relation d'équivalence, et en particulier pour son caractère transitif : évaluer chaque membre de l'égalité (ou l'écrire sous la forme canonique de nombre décimal) permet de conclure.

De la même façon, Sandra n'évoquera qu'une seule fois la dénotation lors de l'entretien et à l'occasion d'une erreur qui la surprend : $4x + 4\times3 \rightarrow 4\ (\ x + 3\ ) \times 4$

> SAND : ha ouais… hi hi ben là y'a rien à dire/ qu'est-ce que tu veux … ? il y est qu'une fois le facteur commun/ heu/ ouais/ non ouais/ pourquoi elle le remet deux fois ?
> CHER : ben parce que c'est écrit deux fois à gauche
> SAND : ha ouais d'accord… ouais/ ouais/ ouais/ c'est tordu hein/ ouais après qu'est-ce que tu veux dire à ça après c'est l'application de la formule..
> CHER : ouais/ donc est-ce que toi tu fais écrire la formule ou est-ce que tu utilises autre chose ?
> SAND : ben après avec un exemple chiffré pour lui montre quoi / pour 4 fois 2 moins 4 fois 3 ça marche pas de faire son truc quoi/ de factoriser comme elle factorise/ lui montrer que le résultat est pas le même quoi
> CHER : donc de remplacer par 2 ….

SAND : ben de revenir/ de faire 4 fois 2 plus 4 fois 3 on calcule/ calculer par ce biais/ 8 plus 12/ on va trouver 20 et pas l'autre.
CHER : ouais / ça / de remplacer par des nombres/ ça t'arrive de le faire ?
SAND : oui très souvent
CHER : pour corriger des erreurs ?
SAND : oui / revenir à du chiffré en particulier sur la mise en équation
CHER : pour vérifier des résultats tu veux dire ?
SAND : non pas pour vérifier des résultats/ parce que c'est trop lourd/ mais pour être capable de mettre en équation un problème par exemple
[...]
CHER : c'est pas tout à fait pareil que ce travail de vérification/ mais ce travail de vérification est-ce que tu fais
SAND : oui ça m'arrive
CHER : est-ce que tu leur dis de le faire eux / ou est-ce que ça arrive plutôt au tableau en correction en classe entière ou
SAND : oui en correction en classe entière c'est vrai que je leur dis pas tellement de si je peux le leur dire mais pas systématiquement / et d'ailleurs c'est pas un réflexe qu'ils ont c'est vrai

C'est semble-t-il essentiellement tourné vers la vérification de la modélisation. Une fois une situation modélisée, on vérifie l'écriture produite en l'évaluant pour une certaine valeur de la variable et en référence avec la situation : si le modèle produit la même valeur (par un autre raisonnement, par comptage par exemple) alors la modélisation (l'écriture algébrique) produite est en partie validée.

Cette utilisation de la dénotation n'apparaît de plus pas tout de suite. La référence à la formule est première. S'agit-il alors plutôt d'un argument supplémentaire ? Sandra a le sentiment que les élèves ne s'emparent pas de cette théorie qui leur permettrait pourtant des occasions de contrôle de leurs productions. Elle met en avant le coût de cette technique : "parce que c'est trop lourd" explique-t-elle. Le fait qu'elle ne l'évoque à l'occasion d'aucune autre correction nous fait penser que cette théorie n'est pas prépondérante dans les classes, même lorsqu'elle peut exister comme ici.

Les analyses de pratiques enseignantes que nous avons conduites montrent des pratiques pouvant être sensibles aux caractères formalisateur, unificateur et généralisateur des savoirs à enseigner sur la distributivité. Si elles semblent à première vue conformes aux analyses de manuels, (l'utilisation illustrative de la situation des rectangles, la place de l'ostension) elles montrent aussi que les enseignants tentent parfois d'aller plus loin dans l'approche de ces spécificités. Ainsi observe-t-on des généralisations portant sur les nombres de termes, sur les types de nombres, ou des tentatives d'unifications, ou du moins de recomposition des pratiques anciennes du calcul mental issues de l'école primaire. Ce faisant, apparaissent un certain nombre d'écueils dans les projets déclarés. Ils sont liés à des manques théoriques, du côté de la dénotation, ou de l'addition itérée. Les dialectiques entre syntaxique et sémantique des expressions sur lesquelles les enseignants tentent de s'appuyer se révèlent fragiles, et en l'état peu élaborées. Cela s'explique d'une part par un manque de termes pour décrire les transformations de mouvement à l'œuvre, et d'autre part, par les manques théoriques qui gênent ces dialectiques. En outre, les enseignants témoignent de la difficulté à dévoluer aux élèves cette dialectique, et ses enjeux quant à l'émergence des caractères FUG.

2.4 CONCLUSION

L'analyse globale des programmes et des manuels tout au long de la scolarité obligatoire amène à considérer les caractères formalisateur, unificateur et généralisateur des savoirs à enseigner sur la distributivité comme des spécificités de l'organisation de ces savoirs. La distributivité est une propriété qui vit en primaire et en 6e, implicitement dans les techniques de calcul mental et de calcul posé de produits. Elle unifie, lorsqu'elle devient objet d'enseignement, ces pratiques. Elle unifie également en principe, les techniques de développement et de factorisation. Pourtant, les manuels montrent des cloisonnements et une faible prise en compte des pratiques anciennes de calcul, voire l'ignorent, comme pour le calcul posé. Le potentiel d'unification s'en trouve peu exploité. La distributivité orchestre par ailleurs un double mouvement de généralisation. Dans un premier mouvement, elle est préconstruite au travers des praxis numériques anciennes, mais lorsqu'elle est mise à l'étude, elle s'avère pouvoir être prouvée pour les nombres entiers et décimaux compte tenu des modes de constructions de ces systèmes de nombres. Dans un second mouvement, elle est étendue par postulat. Cette généralisation répond alors à un nouvel enjeu de construction d'opérations sur de nouveaux nombres, les nombres rationnels, relatifs, et les « racines carrées ». Cependant, cet enjeu est faiblement exploré dans les manuels, et les preuves de la distributivité au moment de sa construction n'apparaissent pas davantage. Ainsi, les potentiels que laissent entrevoir les programmes et les manuels quant à un enseignement tourné vers les caractères FUG des savoirs à enseigner sur la distributivité s'accompagnent de nombreuses incomplétudes dans les organisations des savoirs existantes. Elles apparaissent également couplées à des généralisations muettes du côté des polynômes dans l'usage de la distributivité, au travers de substitutions qui paraissent présentées comme allant de soi, et sur lesquelles nous reviendrons dans le denier chapitre de cette thèse.

La focale apportée par les analyses de manuels plus spécifiques au moment de l'introduction de la notion de la distributivité, en 5e, montre en quoi les organisations de savoirs se révèlent particulièrement incomplètes quant aux aspects formalisateur, unificateur et généralisateur. La prise en compte des praxis anciennes de calcul mental est peu présente. Lorsqu'elle l'est, elle prend la forme d'application sans recomposition véritable, d'autant que les choix des facteurs posent question : la théorie de l'addition itérée supplante souvent la composante technologique de la distributivité. Les extensions aux différents types de nombres (entiers, décimaux et rationnels) sont dans l'ensemble incomplètes, même s'il existe une grande variété de choix dans les manuels de ce point de vue. Les situations de calcul mental semblent pourtant véhiculer un certain potentiel d'unification et de généralisation des pratiques anciennes préconstruites. Elles ne sont pas les seules. Les situations des rectangles présentent également un certain potentiel de soutien à des généralisations et à des adaptations de techniques. Cependant, les contraintes qui pèsent sur ces situations pour ce faire sont nombreuses. Elles concernent en particulier le changement de cadre entre algèbre et géométrie dont les liens doivent s'avérer robustes pour pouvoir s'appuyer sur une dialectique entre système et modèle, entre théorie des aires, mesures et calculs. Le cadre des grandeurs présente aussi une limite quant aux nombres relatifs que les situations numériques à l'instar de celles mettant en jeu des techniques de calcul, ne présentent pas. Les tentatives de manuels montrent que les caractères formalisateur, unificateur et généralisateur des savoirs attenants à la distributivité se construisent peu ou mal en particulier au moment de l'introduction de la notion. En cela notre projet d'ingénierie s'y attachant apparaît comme une alternative aux constructions existantes. Pour les raisons évoquées plus haut notre choix portera sur une situation algébrico-numérique plutôt que géométrico-algébrique.

L'on peut cependant s'interroger sur l'intérêt de l'importance accordée à ces caractères FUG au moment de l'introduction. Pourquoi en effet ne pas unifier au moment d'applications et s'attacher à ce caractère au moment de l'introduction de la notion ? La réponse se situe du côté d'enseignantes comme Sandra, qui dévoile à ses élèves que la distributivité explique leurs pratiques anciennes sans parvenir à les mettre au travail : elle le montre, ils n'en perçoivent pas la valeur de justification ni ne s'y intéressent. D'autres travaux (Mok 2010) laissent à penser que l'unification, ou la généralisation n'auront pas nécessairement lieu dans un après-coup, sans enseignement organisé à ce propos.

Les analyses des pratiques d'enseignement déclarées montrent que les enseignants perçoivent les caractères formalisateur, unificateur et généralisateur des savoirs à enseigner sur la distributivité, en allant plus loin que ce que les manuels peuvent donner à voir. Ainsi deux enseignantes témoignent de formalismes plus généraux que celui de la distributivité simple, avec des sommes à plusieurs termes. Un enseignant en particulier montre un projet fortement axé sur les spécificités FUG de la distributivité. Néanmoins, il semble qu'un obstacle s'érige alors : celui du discours à tenir sur les transformations de mouvement, qui est insuffisamment élaboré. Ce discours doit pouvoir articuler les aspects syntaxique et sémantique des expressions. C'est-à-dire que l'une des conditions d'existence de l'émergence des caractères FUG de la distributivité repose sur une dialectique entre les dimensions sémio-linguistique et mathématique qui doit être construite. Cette dialectique doit s'appuyer en particulier sur la dénotation des expressions pour fonder ce projet et envisager un enseignement organisé autour des caractères formalisateur, unificateur et généralisateur de la distributivité.

Chapitre 3

Une ingénierie didactique pour introduire la distributivité comme notion formalisatrice, unificatrice et généralisatrice

INTRODUCTION

Les analyses que nous avons conduites au travers des chapitres précédents ont fait émerger un certain nombre de fondements pour une reconstruction curriculaire autour de certains savoirs et savoirs faire attenants au calcul algébrique, que nous avons déterminés comme essentiels face aux difficultés d'élèves ou d'enseignement. Cette reconstruction vise à penser ensemble le travail dans les dimensions mathématique et sémio-linguistique, dont la prise en charge dans l'existant semble peu opérationnelle si ce n'est absente. Nous centrant sur la propriété de distributivité, nos résultats nous conduisent à envisager un enseignement fondé à la fois sur les caractères formalisateur, unificateur et généralisateur de ce savoir, et sur la notion de transformation de mouvement.

L'une des originalités de cette approche consiste à prendre les pratiques numériques anciennes comme point de départ à la construction de la propriété de distributivité. Il s'agit à la fois d'unifier et de formaliser les techniques de calcul mental, pour que la distributivité puisse se constituer comme composante technologique complétant les praxéologies. L'ingénierie que nous envisageons se donne également pour objet la mise à l'étude des mouvements de généralisation vis-à-vis des systèmes de nombres. En particulier, la théorie de l'addition itérée que nous avons identifiée comme fondamentale, doit venir occuper une fonction justificatrice, et s'articuler avec la composante technologique de la distributivité dans les praxéologies de calcul algébrique. Il s'agit enfin de prolonger l'enjeu d'unification aux types de tâches de développement et de factorisation, dont nos analyses de manuels ont montré l'évanescence et le risque de morcellement technologique.

Une autre spécificité de notre approche réside dans la prise en compte d'une dialectique que nous avons déterminée comme fondamentale, entre les dimensions mathématique et sémio-linguistique par l'étude d'une transformation de mouvement. Notre ingénierie consiste à tenter de dévoluer une telle dialectique et de mettre à l'étude une transformation de mouvement particulière qui est celle reposant sur la propriété de distributivité. De celle-ci doit pouvoir émerger une nouvelle conception de l'égalité : à la fois comme équivalence de programmes de calcul, et comme écriture d'une transformation portant sur les expressions. Il s'agit de construire un discours permettant de justifier les manipulations au moyen d'interprétations (sémio-longuistique ou mathématique) qui puissent varier et s'adapter selon le contexte, articulant ainsi ostensifs et non-ostensifs. Nous avons également mis en avant le rôle de la dénotation de ce point de vue, qui doit pouvoir se construire avec la transformation de mouvement. Notre analyse théorique de la notion nous amène à penser des formulations de la propriété à la fois d'un point de vue structural et procédural, fondé sur les fonctions syntaxiques.

L'objectif de notre expérimentation est de déterminer le potentiel de l'approche originale retenue, pour rendre sa fonction technologique à la distributivité dans les praxéologies de calcul algébrique, et dépasser les difficultés identifiées aux chapitres précédents, à la fois du point de vue d'un manque de savoir opérationnel et d'un manque de discours outillant techniques et adaptations.

A cet effet, nous consacrons ce chapitre à des analyses *a priori* et *a posteriori* très détaillées d'une ingénierie élaborée pour l'introduction de la propriété de distributivité, en classe de 5e de collège. Nous ne saurions faire l'économie de cette finesse pour pister la manière dont les dialectiques (entre les dimensions sémio-linguistiques et mathématique) peuvent advenir, dans l'élaboration des discours, qui n'émergent que lentement, et au détour d'interventions multiples, mais aussi de reprises du savoir et de ses organisations, au fur et à mesure des interprétations. Notre étude concerne en particulier la manière dont les élèves peuvent parvenir à s'en saisir, pour outiller leur pratique, la légitimer, voire l'adapter. Elle s'attache enfin à déterminer les réorganisations de connaissances qui peuvent s'exercer au fur et à mesure des séances composant l'ingénierie, ainsi que les unifications, formalisations et généralisations susceptibles de se construire.

L'ingénierie que nous avons élaborée s'est tout d'abord constituée dans le cadre de la théorie des situations didactiques. Aussi est-elle pensée en termes de situations, et se compose de la manière suivante :

Situation de calculs de produits → Situation de production d'égalités → Situation de formulation et d'institutionnalisation : une propriété commune → Situation d'institutionnalisation : le théorème de la distributivité

Figure 3.1 – Schéma récapitulatif de l'ingénierie

La première situation est organisée en deux temps. Les élèves sont tout d'abord invités à calculer mentalement un certain nombre de produits d'entiers naturels. Les facteurs choisis sont destinés *a priori* à favoriser l'utilisation de la distributivité en acte, même si d'autres procédures peuvent apparaître sans que cela gêne la suite du travail. On trouve par exemple 12×203 ou 35×98. Les calculs sont écrits au tableau et il est demandé aux élèves d'expliciter leurs techniques à l'oral. Dans un deuxième temps, les élèves travaillent par deux pour poser quatre multiplications distribuées sur un bout de papier. La calculatrice est autorisée pour contrôler, et les vérifications doivent porter sur le produit obtenu comme sur les produits partiels. Les écrits sont collectés pour la situation suivante.

La situation de production d'égalités consiste à écrire des égalités montrant les techniques utilisées pour trouver les résultats. Pour ce faire, les élèves, en groupe de quatre, se voient distribuer des photocopies de leurs productions (les techniques décrites à l'oral ont été retranscrites, et les calculs posés sont scannés). Mais les résultats sont effacés, car leur recherche n'est plus un enjeu. La consigne le spécifie, et précise que l'égalité attendue ne doit pas montrer de résultat, y compris de résultat intermédiaire. Les égalités visées sont par exemple $12 \times (200 + 3) = 12 \times 200 + 12 \times 3$ ou $35 \times (100 - 2) = 35 \times 100 - 35 \times 2$, pour reprendre les calculs précédents.

La situation suivante est à la fois une situation de formulation et d'institutionnalisation première d'une propriété commune. Le travail se déroule à partir d'un certain nombre d'égalités produites par les groupes lors de la situation précédente, et photocopiées. Les élèves sont invités à décrire une « chose commune » à partir de ces égalités. A l'issue de cette description collective, il leur est demandé de mettre à l'épreuve le discours produit pour écrire de nouvelles égalités, avant que le professeur n'établisse une preuve à partir de l'addition itérée.

La dernière situation est un prolongement de l'amorce d'institutionnalisation précédente. La question de la généralisation à d'autres types de nombres est alors posée, avant d'élaborer des formalismes rhétoriques et symboliques de la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, puis par rapport à la soustraction à partir de nouvelles égalités. Les élèves sont confrontés à de nouveaux calculs de produits, dont ils doivent justifier les techniques, mais aussi à des calculs de somme de produits ayant un facteur commun, afin d'utiliser le sens du développement comme celui de la factorisation pour la production d'égalités. Cette séance vise à la fois à faire usage des transformations de mouvements, et à parachever, momentanément du moins, une certaine unification, formalisation et généralisation de la distributivité.

La méthodologie que nous adoptons s'appuie sur une comparaison des analyses *a priori* et *a posteriori*. Etant donné que nous cherchons à déterminer l'émergence potentielle des aspects unificateur, généralisateur et formalisateur de la propriété de distributivité, nous utilisons ces éléments comme spectre d'analyse. Pour ce faire, nous nous appuyons sur les outils de la théorie des situations didactiques, et en particulier sur les notions de milieu et de variables didactiques afin de caractériser les spécificités du savoir susceptible d'émerger, et donc les possibles généralisations, unifications ou formalisations. Les particularités des savoirs et des milieux nous amènent à faire un usage de la terminologie sans que soient parfois réunies toutes les caractéristiques des notions théoriques. La première situation est par exemple qualifiée de situation d'action, tout en réalisant une première dévolution de la situation globale de formulation. Les variables du problème « fondamental » de calcul de produits que nous considérons comme telles, sont de nature à provoquer des variations des techniques sans modification de la technologie, si l'on excepte -ou unifie- le cas de la soustraction vis-à-vis de celui de l'addition : elles ne commandent pas des comportements considérablement différents et n'ont pas pour objectif de faire changer profondément l'activité de l'élève, mais bien de faire émerger des oscillations de la technique, et par suite des adaptations soutenues par une même technologie.

> Ce seront des variables didactiques dans la mesure où en agissant sur elles, on pourra provoquer des adaptations et des régulations : des apprentissages. Brousseau (1982)

Nous analyserons ces variables, non pas essentiellement pour ce qu'elles pourraient provoquer comme nouvelles connaissances, mais pour ce qu'elles donnent à voir de la technologie en construction, c'est-à-dire de son domaine d'efficacité jusque-là implicitement rencontré. Les choix des valeurs de ces variables donnent autant d'occasions d'emploi et par suite délimitent le sens donné à la propriété de distributivité visée, mais aussi les formalismes possibles. La situation n'est par ailleurs pas a-didactique. Du point de vue de la théorie des situations didactique (Brousseau 1997), une situation a-didactique, ou du moins présentant un potentiel d'a-didacticité non négligeable, demande une entrée dans la notion nouvelle visée par la *praxis*. Il s'agit en effet pour l'élève, à partir de rétroactions orchestrées par le milieu, de faire évoluer sa stratégie, c'est-à-dire ses techniques de résolution, elles-mêmes porteuses de la connaissance mathématique visée. Mais le caractère unificateur de la notion de distributivité réfère justement à des *praxis* anciennes de calcul mental et de multiplications posées. Ces *praxis* n'offrent *a priori* plus de problématicité au moment de l'introduction de la distributivité en 5e. L'enjeu sensible ne porte plus alors sur ces blocs, mais sur la technologie qui les unifie au moyen notamment d'une formalisation algébrique. Celle-ci est un vecteur d'unification, et ce faisant, la généralisation se construit et se donne à voir, avant de se révéler motrice de nouvelles praxis (notamment dans le domaine algébrique). Nous avons retenu cependant l'idée de milieu susceptible selon nous de favoriser l'unification que nous cherchons à construire. Le milieu auquel nous nous référons présente un caractère antagoniste dans un sens particulier du terme, lié au fait qu'il favorise des apprentissages, la nature des rétroactions ne provoque pas nécessairement des connaissances ou des modifications de connaissances, mais plutôt des réorganisations, ou des indices portant sur les formes d'écriture les engageant, ou non, tout en offrant des occasions de contrôle à l'élève de ce qu'il fait. Nous complétons donc notre analyse par une étude des praxéologies et de leur rapport afin d'approcher à la fois l'activité de l'élève, et les modifications des connaissances anciennes, en pistant les composantes technologiques qui se créent, et les praxis qu'elles légitiment.

La situation que nous avons envisagée, plutôt que d'une situation définie comme a-didactique, relève en partie de ce que Brousseau (1997) nomme une situation de formulation, car l'enjeu est un savoir et non la résolution d'un problème ou la réponse à une question au sens de la théorie anthropologique du didactique : « la *motivation* effective n'est pas le gain, ni le goût du jeu, ni même la découverte empirique d'une loi, ce sera la mise au point d'arguments, et d'un discours convaincant, c'est-à-dire consistant » (Brousseau 2005) sur des techniques déjà connues et utilisées. Nous nous plaçons de ce point de vue dans la perspective des travaux de Malara et Navarra (2006) dont l'objectif est de « favour reflection on processes […] to explore one's own *modus operandi* […] pupils are asked to work at a metacognitive level ».

La seconde situation, que nous avons nommée « de production d'égalités », revêt en cela certaines caractéristiques d'une situation de formulation puisqu'il est demandé aux élèves de produire de nouveaux ostensifs associés aux praxis anciennes. Des formulations, c'est-à-dire des discours, ont été construits au primaire, mais la formulation demandée est symbolique propositionnelle et non plus rhétorique. Il s'agit également d'un formalisme nouveau de la technique, comme nous l'avons vu dans les analyses de manuels de primaire, car il fait apparaître une décomposition. Plus encore, cette formulation, en raison des contraintes imposées par la consigne en particulier, exclut les éléments technologiques liés à la numération tels qu'ils apparaissent en primaire. La formulation n'est pas tout à fait celle de connaissances véritablement découvertes à propos du système constitué par la situation d'action, mais une certaine description de la praxis modifiant ces connaissances. Elle constitue néanmoins un premier formalisme (nouveau et symbolique) modélisant l'action : les calculs de produits. Les contraintes portant sur la forme langagière imposée (égalités, sans résultats) font évoluer le modèle d'action : ce ne sont pas les rétroactions de la situation d'action, mais ce choix est certainement porté par l'unification visée (autour de la distributivité, et qui exclut donc les éléments de numération) dont les raisons ne sont pas explicitées aux élèves. Nos analyses se centrent donc pour cette situation sur le caractère formalisateur de la distributivité. Il s'agit tout d'abord de déterminer la façon dont les élèves peuvent s'emparer de la consigne, et construire les égalités attendues. Nous utilisons pour cela le modèle de praxéologie. Il s'agit ensuite de caractériser la diversité des formalismes possibles. A cet effet, les variables didactiques de la situation de calcul de produits jouant un rôle important, nous en reprenons l'étude dans ce nouveau contexte.

La troisième situation a une double fonction : celle de créer un discours, métamathématique, pour pouvoir parler de, et interpréter les ostensifs construits, et celle de créer les non-ostensifs associés : la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. La situation revêt certaines caractéristiques d'une nouvelle situation de formulation à deux niveaux, en ce qu'elle repose sur deux milieux imbriqués et antérieurement constitués : celui reposant sur des calculs de produits, et celui des écritures d'égalités. Elle se situe cependant au croisement d'une situation de formulation et d'institutionnalisation puisqu'elle voit apparaître une première décontextualisation à l'occasion d'une certaine généralisation pour les nombres entiers.

Le premier niveau de formulation correspond à la dimension sémio-linguistique : il tend à décrire les transformations de mouvement, c'est-à-dire les transformations portant sur les écritures et permettant de produire des égalités. Cependant, dans le travail sémiotique lors de la situation précédente, l'action (langagière) n'est pas fondée par une transformation de mouvement. Elle repose sur des descriptions de techniques anciennes de calcul, dont on cherche à donner une certaine forme (une égalité). La formulation afférente ne saurait donc *a priori* aboutir à celle d'une transformation de mouvement que lorsque l'action portera effectivement dans cette dimension sur une telle transformation. C'est le rôle joué par la seconde consigne poussant à utiliser l'embryon technologique pour produire les égalités : la question posée est celle d'une théorie des écritures, et conduira donc à une seconde formulation pour décrire la transformation de mouvement, avant d'interroger le lien et la validité dans la dimension mathématique. Elle n'en est pas moins une première formulation des techniques portant sur les écritures que l'on cherche à unifier, rendant les ostensifs bavards.

Le deuxième niveau de formulation correspond à la dimension mathématique : le milieu de référence est toujours celui de l'action, c'est-à-dire celui des calculs de produits dont on élabore une technologie unifiant les praxis, autrement dit, dont on complète les organisations mathématiques. Ce faisant, les organisations mathématiques ponctuelles s'agrègent en organisation mathématique locale : l'unification et la formulation portent alors sur des techniques sur des nombres (et non plus des écritures bien que le lien se construise de façon concomitante), c'est-à-dire sur des programmes de calculs équivalents référant à la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition ou à la soustraction. La formulation est à ce niveau celle d'une connaissance mathématique portant sur l'action, ou autrement dit, d'un non-ostensif couplé aux ostensifs scripturaux. Lorsque l'exploration du domaine de validité et de la justification même de ce non-ostensif (composante théorique) aura eu lieu, il pourra donc constituer un élément technologique légitimant la praxis des types de tâches liés aux calculs de produits.

Pour cette troisième situation en particulier, notre analyse se fait successivement de deux points de vue. Afin d'étudier l'unification visée des praxis anciennes, nous nous appuyons sur des analyses praxéologiques pour en pister les complexifications. Celles-ci nous permettent également de caractériser la manière dont l'activité de l'élève, selon sa nature, peut amorcer une certaine dialectique entre les dimensions sémio-linguistique et mathématique. Dans un second temps, notre analyse porte sur les contraintes de la situation susceptibles de peser sur l'émergence des formalismes rhétoriques. Ainsi, nous retournons une nouvelle fois sur les variables didactiques, mais aussi sur les articulations entre les différents milieux créés.

Nous utilisons plus spécifiquement les outils de l'analyse épistémographique que nous avons présentés au chapitre 1 afin de pister les dialectiques entre les dimensions sémio-linguistique et mathématique et leur construction, pour la dernière situation qui voit véritablement émerger les premières transformations de mouvement. Nous nous appuyons également sur des analyses praxéologiques afin de pister les unifications, et généralisations qui s'opèrent dans les réorganisations de connaissances, et la manière dont la propriété de distributivité peut se constituer comme élément technologique.

Etant donné la nature des situations et l'évolution de ce que nous cherchons à caractériser, l'unification, la formalisation et la généralisation, les outils que nous utilisons diffèrent quelque peu d'une séance à l'autre comme nous venons de le voir. Pour chaque situation, nous préciserons en amont de nos analyses les raisons que nous venons d'exposer de manière synthétique.

Ce chapitre s'organise en deux parties, la première concerne les analyses *a priori*, et la seconde, les analyses *a posteriori* dont nous comparons les résultats à ceux de la première partie.

L'ingénierie que nous avons élaborée a été expérimentée dans deux classes de 5^{e} de collège. La première se déroule dans l'une des classes dans laquelle nous enseignons en tant que professeur.

La seconde expérimentation a lieu dans une classe avec un autre professeur. Pour chacune de ces expérimentations nous avons récolté des écrits d'élèves, et les enregistrements audio ou vidéo des séances. Nous avons également enregistré les entretiens explicatifs que nous avons menés en amont avec l'enseignant de la seconde classe, pour décrire le projet et les scénarios transmis. Nous avons cependant privilégié à ce jour, et dans le temps de la thèse, l'exposé des résultats d'une analyse fine et minutieuse *a posteriori* de la première classe seulement.

3.1. ANALYSES *A PRIORI* DES SITUATIONS D'INTRODUCTION DE LA DISTRIBUTIVITE COMME NOTION FUG

Cette première partie est dédiée à l'ensemble des analyses *a priori* des quatre situations que nous avons présentées en introduction. Pour cela, nous la structurons en quatre sous-parties, qui correspondent à chacune d'entre-elles.

3.1.2 Situation de calculs de produits

L'enjeu de la première situation est celle de la construction d'un premier milieu numérique, et une première étape de dévolution de la situation de formulation d'une connaissance ancienne et utilisée en acte : celle de la distributivité. Les élèves sont invités à calculer un ensemble de produits de nombres entiers donnés par le professeur dont le lecteur trouvera le détail en annexe. Notre analyse *a priori* est donc guidée par la question des conditions de l'émergence de techniques fondées explicitement sur cette technologie. A cet effet, nous avons conduit une analyse fine des techniques de calcul mental et de calcul posé des produits prévus par le scénario. Cette analyse concerne dans un premier temps les praxéologies susceptibles d'émerger dans l'activité des élèves, et plus particulièrement les composantes technologiques associées aux différentes techniques possibles. Nous complétons cette analyse par celle de certains ostensifs associés aux techniques anciennes de produits posés, que nous avons déjà mentionnés lors de l'analyse de manuels de primaire dans le chapitre précédent. Les ostensifs des points ou des zéros en particulier sont questionnés au regard des obstacles ou des contraintes qui peuvent peser sur l'explicitation de l'utilisation de la distributivité. Dans un deuxième temps, nous étudions un certain nombre de variables didactiques et de choix des valeurs afférentes, au regard de l'émergence possible de ce savoir, et de son utilisation en acte. Cette étude nous permet également de mettre en exergue les différentes formes du savoir utilisées implicitement. Celles-ci conditionnent *a priori* les formalismes susceptibles d'émerger dans la situation suivante de formulation. Nous étudions dans un dernier temps les erreurs possibles d'élèves et les moyens de validation dont ils peuvent disposer pour les surmonter.

Avant de rentrer dans l'analyse proprement dite des techniques, nous précisons que les connaissances supposées des élèves concernent des tables de multiplications et d'addition, et les relations entre les nombres comme les compléments à 100, à 200, ou comme les doubles familiers de 15, de 17 ou de 25, par exemple. Elles relèvent aussi de connaissances liées à la numération, comme les techniques de multiplications par 10 ou 100, fondées sur la valeur des chiffres selon leur rang dans l'écriture décimale de position. Nous supposons également connus l'algorithme de multiplication posée et les techniques de calcul mental usant implicitement de la simple distributivité de la multiplication par rapport à l'addition et à la soustraction. Notons que l'analyse de manuels de primaire que nous avons conduite au chapitre précédent permet de prévoir un certain nombre de difficultés pour le cas de la soustraction (voire même dans celui de l'addition) : cette connaissance ancienne n'est certainement pas travaillée autant que celle pour l'addition, et sa disponibilité dépendra probablement de la culture de la classe. Nous pouvons ajouter à ces connaissances, certaines connaissances en lien avec les moyens de validations (ordre de grandeur et chiffre des unités d'un produit par exemple), nous y reviendrons.

Le type de tâche auquel les élèves se trouvent confrontés consiste à calculer des produits de nombres entiers. Pour ce faire, deux grandes techniques sont possibles, celle du calcul mental, et celle du calcul posé. Nous analysons dans un premier temps ces deux techniques possibles dans leur généralité.

L'algorithme de la multiplication posée : entre distributivité et numération

La technique associée au calcul posé de produits de nombres entiers consiste à utiliser l'algorithme usuel, c'est-à-dire très majoritairement enseigné en primaire, pour poser une multiplication. Comme nous l'avons vu à l'occasion des analyses d'extraits de manuels au chapitre précédent, il peut par exemple, se présenter sous la forme suivante :

$$\begin{array}{rr} & 86 \\ \times & 34 \\ \hline & 344 \\ & 2580 \\ \hline & 2924 \end{array}$$

Le facteur écrit en haut est usuellement celui qui est écrit à gauche dans l'écriture du produit en ligne : 86×34. Mais ce n'est pas toujours le cas. Par exemple, il est possible d'échanger les facteurs au moment de poser l'opération par souci d'économie : on pourra écrire en bas le nombre ayant le moins de chiffres de sorte que l'on aura moins de produits intermédiaires à effectuer. La commutativité de la multiplication peut alors intervenir dans la composante technologique. Une fois l'écriture des facteurs et le premier trait horizontal dessiné, la première ligne de calcul correspond au produit du premier facteur par le chiffre des unités du second facteur 86×4, la deuxième ligne correspond au produit 86×30, et la dernière, sous le second trait, est celle de la somme des produits partiels. Ce faisant on effectue une décomposition décimale implicitement du second facteur sous la forme unités + dizaines en 4+30 avant d'utiliser la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. La technologie afférente peut s'écrire ici 86×34 = 86×4 + 86×30. Néanmoins, la technique est souvent décrite en primaire de façon plus morcelée : dès la première ligne, on peut déclarer « on fait 4 fois 6, 24, je pose 4, je retiens 2, 4 fois 8, 32, et la retenue, 34, j'écris 34 à gauche du 4 posé ». L'écriture se fait de droite à gauche par concaténation des résultats obtenus mentalement. Ce faisant, on utilise les propriétés de la numération de position, ainsi que la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition en référence à 6×4 + 80×4. Cette prise en compte des calculs intermédiaires pour effectuer les produits de chaque ligne, pourrait aboutir à une description de technique fondée sur la double distributivité : 86×34 = 6×4 + 80×4 + 6×30 + 80×30. Mais le jeu sur les chiffres permet d'effectuer additions et multiplications de façon entrelacée, et ce sans référence aux nombres en jeu, de sorte que la distance entre la pratique et la technologie pourrait être un obstacle à l'émergence de la distributivité.

Que fait-on lorsqu'on calcule avec des retenues ?
Reprenons la description chiffre à chiffre du premier produit partiel 86×4.

Cette routinisation de l'algorithme de multiplication et l'usage de la position sont de nature à masquer à la fois le produit partiel de 80 par 4 (car on effectue mentalement 8×4 + 2), et l'addition de 320 et de 24. La concaténation des écritures est celle de 34 et 4, qui ne correspond pas à la même somme, mais plutôt à l'addition de 340 et 4, ce qui éloigne encore de la distributivité. Plus encore, la somme ne porte que sur un seul chiffre, tout comme le produit ce qui peut faire obstacle à la mise à jour des nombres en jeu et de la distributivité. Plus précisément, l'omission ou l'implicite de la valeur des chiffres peut faire obstacle, pour certains élèves, à la perception du lien entre les dimensions mathématiques et langagière dans l'effectuation de la tâche. Regardons la nature de l'activité possible face à ce calcul. Il y a tout d'abord produit par le chiffre des unités, ou celui écrit le plus à droite du nombre (après transformation « 86 »→ « 6 »). Effectuer 4 fois 6 situe le travail dans la dimension mathématique en faisant appel à des résultats mémorisés des tables de multiplication. Que l'on écrive le chiffre 2 des dizaines ou qu'on le retienne, c'est ce que l'on fait lorsque l'on pense une retenue qui peut faire obstacle : la transformation « 24 »→ « 2 » dans la dimension linguistique consistant à isoler le chiffre de gauche, sans nécessairement faire référence à sa valeur, et le discours l'accompagnant peut l'omettre. C'est du reste l'un des intérêts de la numération de position : le travail dans le langage peut s'affranchir momentanément des valeurs qui seront retrouvées après coup grâce à leur position. Mais il n'est pas certain que les connaissances liées aux positions affleurent dans la technique pour l'ensemble des élèves. « Retenir » la dizaine n'est pas lié à la distributivité, et la projection de la transformation dans la dimension mathématique pose question. On pourrait par exemple la décrire comme la partie entière de 24/10, mais ce n'est guère satisfaisant du point de vue de la correspondance avec la pratique linguistique, car cela n'éclaire ni ne sous-tend véritablement la pratique, nous y reviendrons. Une fois la « retenue » identifiée, le travail fait de nouveau appel à des résultats de produits ou de sommes mémorisés, on effectue 8×4 + 2. Mais le travail suivant peut se situer en retour dans la dimension linguistique, sans lien avec la dimension mathématique. L'application de L dans L consistant à concaténer les écritures en les mettant côte à côte : (34;4) → « 344 » n'est pas liée à la distributivité. Dans la dimension mathématique, le calcul sous-jacent est 34×10 + 4. Là encore la technologie n'est pas celle de la distributivité mais celle de la numération décimale de position. L'usage d'un algorithme sans référence aux valeurs des chiffres peut potentiellement aboutir à une écriture du type 86×4 = 6×4 + 8×4, et là sans pouvoir décrire la pratique de la retenue. Corriger cette égalité ne pourra se faire qu'en référence aux valeurs. Plus encore, si la technologie de la numération de position est prégnante, alors l'écriture stricte de la technique dans la dimension mathématique serait la suivante : $\left[8 \times 4 + \mathrm{E}(6 \times \frac{4}{10}) \times 10\right] + \left[6 \times 4 - 10 \times \mathrm{E}(6 \times \frac{4}{10})\right]$, ou plus généralement, $(10a_1 + a_0) \times b_0 = a_0 b_0 - 10\left\lfloor\frac{a_0 b_0}{10}\right\rfloor + 10\left(a_1 b_0 + \left\lfloor\frac{a_0 b_0}{10}\right\rfloor\right)$. Ceci n'est évidemment ni accessible aux élèves, ni en réalité tout à fait idoine du point de vue de la modélisation de la pratique dans le processus de retenue. Il serait possible de rendre compte de la pratique dans la dimension mathématique, à l'aide d'une autre écriture mettant en jeu la division euclidienne.

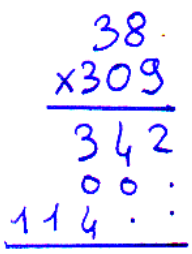
Si on note deux entiers naturels *a* et *b*, il existe deux entiers uniques *q* et *r* tel que $a = bq + r$ et $r < b$. On pose alors $r = a \ mod \ b$ et $q = a \ div \ b$. Si *a* est un entier strictement inférieur à 100, alors, *a mod* 10 correspond au chiffre des unités, et *a div* 10 au chiffre des dizaines. L'égalité précédente peut alors s'écrire : $(10a_1 + a_0) \times b_0 = (a_0 b_0) mod 10 + 10(a_1 b_0 +$ *a0b0div10.*

Cette écriture permet de définir et désigner les chiffres plus clairement, mais pour autant n'est pas pleinement satisfaisante du point de vue de la correspondance avec la pratique, car le mode de production des retenues se situe en réalité entièrement dans la dimension sémio-linguistique. Ni une soustraction ni une division euclidienne ne sauraient en rendre compte de façon satisfaisante. Ce processus apparaît dans toute sa complexité parce que les transformations dans la dimension sémio-linguistique ne sont pas des transformations de mouvement à proprement parler, on use de la grammaire des expressions (la position) mais l'isolement des chiffres ne correspond pas à une soustraction, mais plutôt à un traitement séparé, avec une prise en compte des valeurs des chiffres. Le lien entre mathématique et pratique sémio-linguistique est distendu en quelque sorte (il modélise mal la pratique, parce qu'elle est essentiellement linguistique et que la projection dans la dimension mathématique n'est pas pertinente pour éclairer cette pratique). La description de la technique en termes de retenues semble être un obstacle majeur à l'émergence de la technologie de la distributivité : on ne pourra pas produire d'écriture mathématique montrant cette technique.

Ainsi, le travail peut se situer uniquement dans la dimension sémio-linguistique (outre les produits mémorisés) sans référence à la dimension mathématique. Si les élèves ne disposent que de descriptions fondées sur la numération en termes de dizaines, ou centaines, donc de valeur de chiffres, sans écriture ou évocation du nombre référent associé aux facteurs du produit donné, c'est le passage *des chiffres au nombre* qui risque de faire obstacle à la mise à jour de la distributivité. Il semble donc que la prise en compte du nombre soit une condition nécessaire pour que les élèves puissent s'emparer de la notion de distributivité, dans le scénario prévu.

La question des ostensifs anciens : les points à la place des zéros

Nous avons vu plus haut, à l'occasion d'analyses de manuels de sixième notamment, que l'ostensif « 0 » associé au chiffre zéro dans les écritures des nombres correspondant aux résultats des produits partiels, peuvent être remplacés comme le donne à voir l'exemple suivant :



L'algorithme de multiplication peut ainsi se présenter avec un usage implicite des valeurs des chiffres selon leur position, en utilisant des ostensifs tels que les points, ou des espaces pour marquer, à la place des zéros dans l'écriture des nombres, l'absence de certaines unités. Cet usage des ostensifs peut n'être interprété que dans la dimension linguistique, comme un décalage, d'autant que dans l'exemple précédent, d'autres « 0 » apparaissent (vraisemblablement issus de calcul de produits par 0, autrement dit il y a bien un traitement différent du chiffre 0 selon qu'il correspond à un calcul ou à un décalage). Ceci peut renforcer, avec une description chiffre par chiffre des produits intermédiaires, l'idée que le nombre écrit par exemple à la dernière ligne est 114, et non 11 400. Par suite, cela risque de conduire les élèves à n'identifier que 38×3, ce qui peut faire obstacle à une écriture ultérieure décrivant l'algorithme. Ainsi au lieu de 38×9 + 38×300, on peut imaginer que les élèves écrivent 38×9 + 38×3.

La question des ostensifs : le problème du zéro et de la ligne de zéros
Lorsque l'un des chiffres du second facteur (celui que l'on décompose) est 0, l'ambiguïté des écritures peut aussi faire obstacle à l'identification des produits partiels des nombres et non des chiffres. Revenons un instant sur l'opération posée précédente : la deuxième ligne est écrite « 00. ». Cependant, le nombre 0 ne s'écrit pas 000 usuellement. L'identification de 0 à partir de l'ostensif « 00. » pose la question de la transparence du statut de nombre que l'on peut donner aux écritures de chaque ligne, et peut renforcer une désarticulation entre les dimensions mathématique et sémio-linguistique dans le travail technique.

Techniques de calcul mental et multiplicité des éléments technologiques selon les connaissances de nombres
Notons tout d'abord que les techniques de calcul mental excluent *a priori* les techniques de calcul posé avec retenues, il ne s'agit pas pour les élèves de poser de tête, mais d'utiliser les spécificités des nombres en jeu, et les propriétés des opérations pour obtenir des stratégies optimales, c'est-à-dire suffisamment rapides. Cela dépendra également, outre des procédures, des connaissances personnelles liées aux nombres en jeu de chaque élève, nous y reviendrons.

Contrairement à la technique posée, pour laquelle la distributivité, même implicite, fait nécessairement partie de la technologie, les techniques qui peuvent émerger pour le calcul mental des produits prévus par le scénario, ne correspondent pas nécessairement à cette composante. Par exemple, pour multiplier par 25, on pourra multiplier par 100 puis diviser par 4, en utilisant le fait que 25 est le quart de 100. Plus encore, la connaissance visée peut ne pas correspondre à une stratégie optimale. On ne saurait en effet estimer plus efficace ou économe la technique précédente face à celle consistant à utiliser la distributivité. La technologie visée ne sera donc ni toujours nécessaire ni nécessairement optimale. De la même façon, la théorie de l'addition itérée définissant la multiplication, peut aussi *a priori* se constituer comme technologie, ainsi que nous l'avons vu au chapitre précédent. Par exemple, l'on peut considérer que pour 68×11, l'on effectue une somme de 11 termes égaux à 68, dont on ne regroupe que les 10 premiers par associativité, pour calculer 68×10 + 68. Ainsi, l'on ne peut envisager le milieu, constitué de la liste de calculs, comme permettant à lui seul, de mettre en œuvre la connaissance visée, ni de la faire émerger comme stratégie optimale de résolution. L'enjeu est de la faire émerger à tout le moins comme stratégie possible, et anciennement connue et utilisée. Un second enjeu est celui d'une première formulation de la technique, en amorçant ainsi un moment technologico-théorique. Mais selon les connaissances anciennes des élèves (et la familiarité avec certains sous-types de tâches constitutifs éventuellement de la technique, nécessitant donc ou non des détours descriptifs d'autres praxéologies insérées), la technologie utilisée en acte pourra ne pas être isolée ni se révéler au devant de la scène.

De la même façon que pour l'utilisation des spécificités de la numération décimale de position, il est possible d'amplifier la technique d'un certain nombre de sous-types de tâches apparaissant lorsqu'ils se révèlent problématiques. Leur description peut alors être perçue comme nécessaire ou utile, et peut s'insérer dans la composante technologique. Cela dépend de la familiarité avec les nombres et les praxéologies ponctuelles nécessaires aux calculs intermédiaires. Ce phénomène d'imbrication pourra aboutir par exemple à décrire pour 43×21 la technique avec une formulation rhétorique correspondant à (43×2)×10 + 43×1. Multiplier par 20 consiste à multiplier par 2 puis par 10 avec par exemple la règle des zéros. Cette écriture combine alors deux technologies : celle de l'associativité et celle de la distributivité de la multiplication alors quelque peu masquée.

Variables didactiques et choix de valeurs pour l'émergence de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition ou à la soustraction

Le choix de certains facteurs peut, contrairement à l'algorithme de la multiplication posée, engager la distributivité de la multiplication par rapport à la soustraction. Dans le cas par exemple du produit 35 × 98, les techniques fondées sur la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition comme 35×90 + 35×8, seront en concurrence avec la distributivité de la multiplication par rapport à la soustraction avec 35 × 100 - 35 × 2, ce en lien avec le caractère familier des nombres et des procédures (le double de 35 ou la règle des zéros, plutôt que multiplier par 9 et engager encore une distributivité avec 30×9+5×9, et 30×8+5×8 procédure plus longue, plus coûteuse avec un usage récursif de la distributivité, et donc peu fiable). D'autres variables permettront de modifier quelque peu les techniques. Nous allons les détailler maintenant. Rappelons que, ainsi que nous l'avons décrit en introduction, ces variables sont considérées comme didactiques en ce qu'elles sont de nature à provoquer des adaptations de techniques, si fines soient-elles. Bien qu'il n'y ait pas de modification de la composante essentielle de la technologie en construction, les choix des valeurs de ces variables conduisent à délimiter le sens donné à la notion en jeu, et par suite les formalismes possibles associés. Nous avons conduit une étude très précise de ces variables, dont on trouvera l'analyse complète en annexe. Nous en résumons ci-après les variables didactiques pertinentes et les choix de valeurs retenues par le scénario afin de dégager certaines conditions d'émergence *a priori* des savoirs visés et des formalismes associés. La suite de notre analyse se situant dans le cadre de la théorie des situations didactiques, nous redéfinissons comme problème fondamental le type de tâche auquel les élèves sont confrontés, que nous décrivons, pour les besoins de l'analyse des variables didactiques de la manière suivante :

Effectuer le produit $\sum_{k=0}^{n} a_k 10^k \times \sum_{i=0}^{m} b_i 10^i$ de deux entiers non nuls a et b dont $(a_k)_k \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ et $(b_i)_i \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ sont les suites des chiffres.

Six variables didactiques se révèlent pertinentes au regard de l'utilisation visée de la distributivité en acte. Nous envisageons ces variables indépendamment des techniques mentales, ou posées. Néanmoins, nous distinguons, à l'intérieur des analyses, les influences de leurs prises de valeurs selon les spécificités de ces techniques.

La première variable est celle du nombre de chiffres que comportent les écritures des facteurs du produit donné à calculer.

V_1 : valeurs de (n ; m)

Au regard de l'enjeu de la situation et de la forme des écritures de la distributivité engagée et de sa théorie, les valeurs pertinentes sont essentiellement (0 ; 1) ou (1 ; 0) et (3 ; 3) ou plus généralement (n ; 3) ou (n ; 4). Nous ne reproduisons pas ici le cas des autres valeurs qui sont étudiées en annexe, soit qu'elles donnent lieu à des oscillations de techniques similaires, soit qu'elles se révèlent marginales sans modification nouvelle des techniques envisagées.

Les valeurs (0 ; 1) ou (1 ; 0) correspondent au cas où les produits sont constitués d'un facteur à un chiffre et d'un facteur à deux chiffres. Elles ne concernent que les spécimens de calcul mental dans le scénario prévu. Dans le premier cas, le nombre de gauche dans l'écriture du produit n'a qu'un seul chiffre, de sorte que la décomposition du facteur sera nécessairement celui écrit à droite. La distributivité de la multiplication par rapport à l'addition ou à la soustraction est alors « à gauche ». C'est l'inverse dans le second cas, la distributivité implicitement employée est alors « à droite ». Ainsi pour calculer 46×3 on peut envisager l'utilisation implicite de l'égalité $(40 + 6) \times 3 = 40 \times 3 + 6 \times 3$ tandis que pour calculer 7×32 on peut s'appuyer sur $7 \times (30 + 2) = 7 \times 30 + 7 \times 2$. Notons que la décomposition additive peut être différente selon que l'on choisisse de commencer par l'un ou l'autre des produits partiels (et en particulier par les unités qui sont à la fois chiffre et nombre ici) si l'on écrit de gauche à droite dans l'ordre de l'exécution des calculs.

Ainsi pourra t-on aboutir à l'utilisation implicite dans l'exemple de notre dernier calcul, de $7 \times (2 + 30) = 7 \times 2 + 7 \times 30$. Cette décomposition de 32 en 2 + 30 ne correspond pas aux habitudes de décomposition de l'écriture des décimaux que l'on écrirait 30 + 2. Dans ce cas, la technique de calcul mental est identique à celle du calcul posé partiellement de la sorte :

$$\begin{array}{rr} & 7 \\ \times & 32 \\ \hline & 14 \\ & 210 \end{array}$$

C'est-à-dire d'une part, que la décomposition ne concerne qu'un des deux facteurs : 32, puisque 7 n'a qu'un chiffre (et on a donc accès directement au nombre puisque le chiffre et le nombre se confondent). Ce facteur est celui qui est écrit à droite (et cela correspond au facteur écrit en bas que l'on décompose en somme dans les multiplications posées). On le décompose implicitement en 2 + 30. D'autre part, les produits partiels sont donc ceux du calcul mental :

2×7 puis 30×7. En revanche, l'algorithme diffère du calcul mental où l'addition se fait en même temps, par le truchement de la retenue mémorisée, si le travail se conduit chiffre par chiffre comme nous l'avons vu précédemment. Toutefois, le fait que la technique de calcul mental soit suffisamment proche, compte tenu du nombre de chiffres choisis pour les deux facteurs, est *a priori* de nature à favoriser l'entrée dans la tâche par tous, c'est-à-dire y compris par les élèves pour lesquels l'utilisation en acte de la distributivité n'est pas disponible. Cette valeur de la variable, semble également être de nature à éviter une amplification praxéologique et les obstacles afférents concernant l'émergence de la distributivité comme nous l'avons étudié plus haut. Nous détaillons en annexe les sous-types de tâches possibles, et les technologies de la numération afférentes s'insérant dans les praxéologies, qui, au regard des spécificités des nombres en jeu, s'avèrent peu plausibles. Il semble raisonnable de supposer que les nombres en jeu correspondent à des produits très familiers aux élèves (ceux de la table de multiplication de 7). La proximité avec la technique posée mettant en jeu la distributivité sans passer par ce que l'on considère ici comme des étapes intermédiaires de calcul (comme des produits par 10 non enjeu de la praxéologie visée) permet de supposer de plus, en lien avec les analyses des manuels de primaire, que la technique fondée sur le programme de calcul $7 \times 30 + 7 \times 2$ ou $7 \times 2 + 7 \times 30$ pourra être collectivement partagée, même si une recomposition du produit par 30 peut s'avérer nécessaire. Elle correspond du reste à une stratégie optimale de résolution par rapport à une technique fondée sur l'addition itérée. Nous situons donc la construction de la multiplication par addition itérée au niveau théorique, comme nous l'avons vu au chapitre précédent, dans la partie consacrés à l'analyse des praxis numériques anciennes de calcul du primaire. Toutefois cette théorie ne peut être tout à fait celle qui est à l'œuvre dans le cas de la distributivité de la multiplication « à droite » comme pour le produit 46×3. En effet, 46×3 = 46 + 46 + 46. Pour aboutir à 6×3 + 40×3 on sera conduit en toute rigueur à adjoindre à la théorie, la commutativité de l'addition avec, par exemple, la suite d'égalités suivantes : 46 + 46 + 46 = (40 + 6) + (40 + 6) + (40 + 6) = 6 + 6 + 6 + 40 + 40 + 40 = 6×3 + 40×3. D'un autre point de vue, la commutativité de la multiplication permet d'utiliser la même technologie que celle de 7×32 pour laquelle l'écriture sous la forme d'une somme est celle du facteur écrit à droite. Cependant, cette variable didactique (la décomposition du facteur écrit à droite ou à gauche) est susceptible de mettre à jour une possible adaptation des techniques, en lien avec les propriétés des opérations : commutativité et associativité.

Enfin, les valeurs (n ; 3) ou (n ; 4) de la variable V_1 permettent d'envisager des techniques reposant sur une certaine généralisation de la distributivité à des sommes de 3 ou 4 termes (si aucun chiffre de b n'est nul). Ainsi en va-t-il pour les techniques posées, à condition de ne pas échanger les facteurs par économie (si n < 3 par exemple, l'échange des facteurs permet d'effectuer moins de produits). Ainsi pour 435 × 374 on utilisera implicitement l'égalité $435 \times (4 + 70 + 300) = 435 \times 4 + 435 \times 70 + 435 \times 300$:

$$\begin{array}{r} 435 \\ \times \quad 374 \\ \hline 1740 \\ 30450 \\ 130500 \end{array}$$

La seconde variable didactique est la suivante :

V_2 : Relation d'ordre entre m et n

Ses valeurs possibles, égal, inférieur ou supérieur, conduisent à des analyses similaires : l'utilisation de la distributivité à droite ou à gauche (*a priori* plus économe car le nombre de produits partiels et de sommes est minoré, mais cela pourra dépendre d'autres variables comme nous allons le voir) peut être favorisée, et modifier alors la forme de la technologie et la composante théorique à l'instar de ce que nous venons de voir.

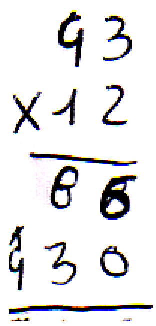
La troisième variable concerne certains obstacles de la numération que nous avons soulevés plus haut à propos de la technique de calcul posé.

V_3 : Présence ou absence de retenues dans la technique

Nous considérons ici à la fois la technique de l'algorithme posé et les « fausses » techniques mentales utilisant cette même technique. Nous supposons alors qu'intervient à un moment donné la technologie de la numération soutenant un travail chiffre par chiffre au sein de la technique.

Nous avons analysé plus haut comment la présence de retenue peut faire obstacle à la fois au passage d'une description chiffre par chiffre aux nombres et à l'identification des opérations en jeu. L'absence de retenue en revanche, peut permettre de lever ces obstacles d'une certaine manière. Prenons l'exemple du produit 512×3. Les choix des chiffres ici n'engagent pas de retenues, de sorte que la concaténation décrite plus haut des produits des chiffres 15, 3 et 6 donne le résultat correct. Cela peut encore davantage masquer les opérations, en particulier la somme des produits partiels, et la valeur des chiffres implicitement utilisée pour écrire le résultat. Cependant, l'absence de retenues peut permettre de retrouver le nombre assez directement au moyen de la valeur du chiffre et lever ici l'obstacle de la numération pour accéder à la technologie visée. En effet, si l'écriture du résultat peut se faire dans la dimension linguistique par concaténation des écritures des chiffres : on met le 6 à droite, puis le 3 à sa gauche, et enfin le 15 encore à gauche de l'écriture, l'absence de retenues peut donner l'accès aux nombres, c'est-à-dire aux produits partiels, à partir de l'écriture du résultat, à condition de retourner sur le sens de cette écriture. On obtient en effet la suite de symboles « 1536 » qui par lecture donne mille cinq cent trente six, et le lien avec les produits peut être retrouvé : 3 correspond à 3 dizaines, c'est-à-dire au nombre 30 que l'on obtient en multipliant 10 par 3, le travail sur le chiffre 1 correspond au produit par 10, car sa valeur est celle des dizaines. La mise à jour de ce lien, ou plus exactement des nombres, nécessaire pour accéder à la technologie de la distributivité, peut alors *a priori* être aisément retrouvée, à condition sans doute que le professeur le demande en calcul mental.

En calcul posé, l'absence de retenue peut donner un autre moyen d'accès aux produits partiels écrits, par reconstitution du sens grâce à la connaissance des nombres ou des chiffres et par proximité ostensive. Elle peut être un levier facilitant pour la reconstruction des produits partiels lorsqu'ils ne sont pas disponibles ou même mobilisables, c'est-à-dire lorsque les connaissances anciennes sont insuffisantes de ce point de vue. Ainsi en va-t-il du produit suivant :



86 peut être éventuellement identifié en référence à l'algorithme chiffre par chiffre : c'est le résultat de 3×2 concaténé à celui de 4×2. L'absence de retenue évite donc une somme, et peut peut-être permettre de reconstruire plus aisément 86 comme un produit, dont la familiarité avec les doubles peut aussi jouer un rôle, tout comme 430 peut être *a priori* reconnu comme un produit par 10, et permettre ainsi de retrouver le lien avec 43. Ces éléments peuvent constituer des points d'appui pour les élèves, mais aussi pour les interventions du professeur en cas de difficulté et de connaissances insuffisantes de l'algorithme. Ceci fait écho à la variable V_4 suivante.

V_4 : valeurs particulières des chiffres ou des nombres / Familiarité connaissances des nombres.

De même que certaines valeurs des variables V_1 ou V_2, les valeurs de cette variable sont de nature à affecter le choix du facteur (à gauche ou à droite) à décomposer. On pourra, selon les nombres en jeu, préférer effectuer un produit partiel par 2 plutôt que par 7. Ainsi pour calculer mentalement 17×12, on peut supposer *a priori* que la technique repose plutôt sur la décomposition de 12 (la distributivité est donc à gauche) que sur celle de 17. Nous n'excluons pas pour autant que l'autre décomposition puisse exister. Les valeurs des chiffres du nombre décomposé en somme peuvent se constituer en points d'appuis pour lever les obstacles de la numération à l'instar de ce que nous venons de voir et donner accès aux produits partiels par des techniques de reconnaissance. Ainsi en va-t-il des chiffres 1 ou 2, comme pour l'exemple du produit de 43 par 12 posé ci-dessus. Ceci est également le cas lorsque le facteur décomposé est constitué de chiffres identiques. La comparaison des produits partiels (dont l'un peut être 10 ou 100 fois plus grand que l'autre par exemple) peut être un levier pour différencier les valeurs des chiffres dans chacun et parvenir à recomposer les écritures de chaque ligne comme celles de nombres, afin de lever l'obstacle des ostensifs des points par exemple. Les analyses détaillées en annexe permettent de spécifier les valeurs de cette variable didactique qui peuvent ainsi se constituer en point d'appui ou en obstacle pour l'émergence de la distributivité telle que le scénario l'envisage pour la situation de formulation suivante. Notons toutefois quelques valeurs possibles en lien avec certaines connaissances de produits. Le choix de valeurs pour les chiffres comme 1, 2, 3 ou 4 dont les tables de multiplication sont *a priori* bien connues doivent permettre de ne pas créer de difficulté supplémentaire ou d'augmentation de la technique comme on l'a vu au moment de l'exécution des produits partiels. Ainsi en va-t-il du choix de facteurs dont certains produits sont censés être mémorisés comme 15×4 ou comme 25×2. Cela permet *a priori* d'évacuer des techniques de calculs pour les produits intermédiaires supposés non problématiques (ou moins problématiques) qui ne sont pas un enjeu et pourraient détourner l'attention sur la technologie visée. Ainsi en est-il de (15×2)×2 ou (15+15)×2, pour 15×4 ou encore de 3×2 + 10×2 pour 13×2.

Ces mêmes préoccupations président aux choix des valeurs pour la cinquième variable didactique :

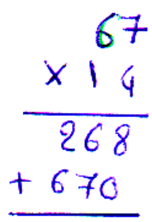
V_5 : Compléments à 100 ou à 200 de a ou b

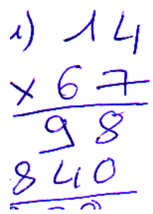
Les valeurs possibles correspondent à 100 – b < 4 ou 200 – b = 1. Ces choix pour des produits à effectuer mentalement demandent une connaissance des compléments à 100 ou à 200, qui sont par ailleurs utilisés dans plusieurs techniques de calcul mental (comme celles d'additions ou de soustractions engageant des étapes à la centaine par exemple). Cette familiarité doit permettre de faciliter la convocation de la décomposition du second facteur sous la forme d'une différence. D'autant que, comme nous l'avons vu, la technologie de la distributivité de la multiplication par rapport à la soustraction est alors plus efficace, moins coûteuse que celle de la multiplication par rapport à l'addition pour des calculs comme : 35 × 98 ; 23 × 97 ;25 × 19 ou 41 × 199. Notons toutefois que pour ces derniers calculs, (produits par 19 ou 99) comme nous l'avons déjà dit au chapitre précédent, la théorie de l'addition itérée peut se substituer à la technologie. Quoi qu'il en soit, le temps limité imparti annihile *a priori* des décompositions additives pour les techniques comme 35×90 + 35×8. Le choix des chiffres 9, 8 et 7 aussi. Les facteurs écrits à gauche font par ailleurs partie des nombres dont on connaît des produits comme 25 ou 35 ou des nombres dont les produits par 2 sont *a priori* aisément accessibles. Plus encore les compléments à 100 des facteurs ou des produits partiels comme 70 ou 69 ou 25 ou 41 sont *a priori* soit familiers ou mémorisés soit aisément accessibles. Nous supposons donc que les techniques favorisées sont celles fondées sur la distributivité de la multiplication par rapport à la soustraction comme 35×100 – 35×2 (notons ici que l'inversion des écritures des termes n'est plus possible) ou 23×100 – 23×3.

La dernière variable que nous considérons est la suivante :

V_6 : a×b et b×a inversion des facteurs provoquée par les listes différenciées données à chaque groupe.

Le choix de l'ordre de l'écriture des facteurs engage deux décompositions possibles, car en posant l'opération, c'est le facteur écrit en dessous que l'on décompose implicitement comme une somme. Les produits suivants en donnent un exemple :





.

Cela permet de préparer le caractère non unique pour un produit donné de l'utilisation implicite de la distributivité selon le facteur que l'on choisit de décomposer. Ainsi le premier produit posé correspond à l'égalité $67\times(10+4) = 67\times10 + 67\times4$ et le deuxième à $14\times(60+7) = 14\times60 + 14\times7$.

Nous allons maintenant analyser les erreurs possibles et les moyens de validations dont peuvent disposer les élèves.

Erreurs possibles et moyens de validation, la question de l'absence de rétroaction du milieu
Un premier genre d'erreur possible s'apparente à l'usage désarticulé des dimensions sémio-linguistique et mathématiques dans les manipulations de chiffres, ou de retenues. Nous pouvons les qualifier d'extensions praxémiques incontrôlées des techniques chiffre par chiffre.

Il s'agit tout d'abord de concaténations abusives. Par exemple, pour le produit 17×12, l'usage désarticulé de la dimension mathématique, des propriétés de l'écriture de position, peut conduire à écrire 1734 c'est-à-dire, en étendant la pratique pour 512×3 par exemple, à juxtaposer l'écriture des produits 17×1 et 17×2, sans référence à l'addition ni à la valeur des chiffres. Par ailleurs, une extension des pratiques chiffres par chiffres de l'algorithme de multiplication peut conduire aussi à des techniques erronées comme celle consistant à effectuer les produits des dizaines 1×1 puis celui des unités 7×2, avant de juxtaposer les écritures des produits pour obtenir « 114 ».

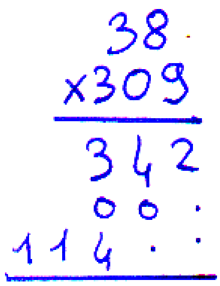
Ensuite, on peut envisager des erreurs fondées sur l'utilisation d'une fausse distributivité en quelque sorte, que le facteur 1 peut peut-être favoriser. Ainsi pour calculer 68×11 peut-on envisager l'utilisation de $68 \times 10 + 1$.

Des techniques de fausse double distributivité pourront également émerger comme nous l'avons vu plus haut, en lien avec les obstacles de la numération et des techniques chiffre par chiffre. Ainsi peut-on anticiper, pour le calcul du produit 43×21 des techniques fondées sur les produits des chiffres 4×2 et 3×1 et une concaténation des résultats, ou avec prise en compte des valeurs mais avec une fausse distributivité : $40\times20 + 3\times1$ et leurs variantes $4\times20 + 3\times1$ ou $40\times2 + 3\times1$ par exemple.

L'analyse des variables en annexe montre néanmoins que des concaténations peuvent constituer un résultat juste, comme pour 13×102 où 13×1 et 13×2 donnent 13 et 26 dont la juxtaposition conduit au bon résultat 1326. Cette concaténation est susceptible cependant de se révéler inefficace sans référence à la dimension mathématique pour 62×1001 en donnant 6262, ce qui doit permettre de mettre à jour et de corriger l'erreur.

Ceci nous amène à la question des moyens de validation à disposition des élèves.

Dans le cas du calcul posé, la calculatrice peut être un media pour enrichir le milieu : la consigne étant de vérifier à la fois les produits et les résultats intermédiaires, afin de préparer l'identification de chaque ligne de calcul comme produits partiels. Mais il n'est pas certain que cette seule consigne aboutisse à réinterpréter ainsi les lignes de calculs effectuées. D'une part un élève qui contrôlera un résultat juste supposera, non sans raison, que ses calculs intermédiaires sont alors justes. D'autre part, la calculatrice peut n'être qu'un outil de vérification couplé à du calcul mental dans des procédures attachées à des calculs chiffre par chiffre : elle pourra servir de vérification des produits mémorisés de tables de multiplication, sans que le calcul du produit intermédiaire soit jamais tapé. Plus encore, un élève utilisant des points à la place des zéros ou tout autre ostensif jouant le même rôle, pourra utiliser la calculatrice pour calculer le produit du second facteur par un chiffre en omettant encore sa valeur. Ce qui peut faire obstacle à l'écriture du processus de calcul ultérieurement comme nous l'avons déjà vu à propos du calcul suivant en particulier :



On peut par exemple taper à la calculatrice 38×3 pour la dernière ligne et conclure, à raison, que l'on a juste. Ce qui pourra par suite faire obstacle à une écriture décrivant l'algorithme au lieu de 38×9 + 38×300 on pourra écrire 38×9 + 38×3.

Dans le cas du calcul mental, (et l'on peut aussi l'envisager pour le calcul posé), deux autres moyens de validations de produits peuvent faire partie des connaissances des élèves. Il s'agit de calculer un ordre de grandeur du produit : le résultat obtenu doit être « assez proche ». Une seconde vérification consiste à prévoir ou contrôler le chiffre des unités : il s'obtient en effectuant le produit des chiffres des unités des deux facteurs. Le chiffre des unités de ce produit est alors celui du produit initial. Ces contrôles ne seront que partiels mais pourront écarter un certain nombre de résultats, et être un levier pour le professeur pour écarter des techniques de calcul erronées, et par exemple envisager de faire le lien avec un usage défectueux des valeurs des chiffres aboutissant à des ordres de grandeurs incorrects.

Toutefois, nous reprendrons les termes de Brousseau pour conclure qu'en cas d'erreur, la tâche de vérification n'apporte guère d'information sur ce qu'il aurait fallu faire (Brousseau 1982 p. 46). Ceci nous conduit à anticiper un rôle important laissé au professeur, mais aussi aux interactions entre élèves, dans les phases de validations.

Milieu numérique de référence et dévolution

Il s'agit dans cette situation d'aménager un milieu qui sera au coeur de la situation sivante. Les choix des valeurs des variables didactiques attenantes aux produits à calculer permettent d'envisager que le milieu constitué présente une certaine diversité relative à la forme de la connaissance visée de la distributivité à même d'en fonder les caractères formalisateur, unificateur et généralisateur. Ainsi, l'utilisation de la distributivité en acte peut-elle se faire à gauche ou à droite, en lien avec la multiplicité des choix possibles (voire imposés) des facteurs à décomposer. La présence de nombres à plus de deux chiffres permet également de préparer une généralisation de ces décompositions pour des sommes de trois ou quatre termes.

Les valeurs des compléments à 100 ou à 200 pour certains facteurs permettent également de favoriser l'utilisation de la distributivité de la multiplication par rapport à la soustraction, et de préparer ainsi à la fois l'unification avec les techniques assises sur la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et avec celles pour lesquelles la théorie de l'addition itérée remplace la technologie de la distributivité (dans les cas où la décomposition fait apparaître un terme égale à 1). Ce choix, que nous avons relevé comme inopportun dans les manuels de primaire ou de collège pour l'émergence d'une technique de calcul fondée sur la distributivité, apparaît ici complémentaire à d'autres, et s'inscrit dans une préparation d'unification et de complétion des praxis numériques anciennes. Cette diversité prépare *a priori* une multiplicité des formalismes possibles sur laquelle nous reviendrons dans l'analyse de la situation de formulation suivante.

Notre analyse *a priori* montre des choix des valeurs des variables didactiques susceptibles de se constituer en points d'appui pour l'émergence de la distributivité dans ses aspects formalisateur, unificateur et généralisateur, mais aussi en quoi elle peut demeurer implicite ou évanescente face à certains éléments technologiques liés aux praxis anciennes pouvant faire écran. Ceci s'explique d'une part en raison du travail qui peut se situer dans la dimension linguistique sans référence à la dimension mathématique, (avec le principe des retenues par exemple) masquant en partie les opérations effectuées. D'autre part, en raison de l'utilisation de la numération de position, l'algorithme peut être morcelé, par un travail sur les chiffres, ou par l'intervention d'autres praxéologies calculatoires intermédiaires, et masquer les liens avec les nombres. En cela notre analyse *a priori* montre que pour jouer son rôle de constitution d'un milieu pour formaliser, unifier et généraliser les techniques de calcul anciennes, cette première étape de dévolution nécessitera des interventions didactiques importantes de la part du professeur, en vue de (re-) mettre à jour les technologies utilisées implicitement jusqu'alors.

Les formulations des élèves quant aux techniques de calcul mental doivent par exemple être suffisamment transparentes du point de vue des opérations et des nombres. De même les imbrications d'autres praxéologies doivent être écartées (comme pour le double de 17 effectuer le double de 15 puis rajouter le double de 2), afin d'isoler en quelque sorte la technologie visée. Les praxéologies de calculs proposés étant anciennes, et *a priori* pas ou peu problématiques, nous supposons que cette incertitude resserrée dans la description des techniques ne porte pas de surinterprétations ou de saut inaccessible, mais bien un retour nécessaire sur les connaissances anciennes : comment sinon surmonter les obstacles liés à la numération et écrire une égalité lorsqu'on ne travaille que chiffre par chiffre avec des retenues, ou des points dans les produits posés ?

La situation est dès lors didactique, les interventions du professeur portent l'attention sur la distributivité en acte en levant éventuellement les implicites ou les omissions liées à l'utilisation des spécificités de la numération de position. Les descriptions anciennes de techniques de calcul mental peuvent en être modifiées. Néanmoins la situation est une situation d'action, même si les techniques de calculs ne sont *a priori* que peu problématiques, c'est-à-dire ne nécessitent pas l'émergence de connaissances nouvelles pour être exécutées.

Toutefois, le milieu est constitué d'une liste de calculs à effectuer, et n'offre pas de rétroaction de lui-même, dans le sens où les contrôles que l'élève peut effectuer peuvent lui apporter des moyens de validations, sans occasionner de connaissances nouvelles sur le système, ou de modification de l'action, si ce n'est celle consistant à recommencer la mise en œuvre de la technique. Ceci est fortement lié au caractère préconstruit des techniques anciennes. Le milieu présente pourtant un certain caractère antagoniste, dans le sens où les valeurs des variables didactiques choisies sont de nature à favoriser des réorganisations de connaissances, voire des adaptations, donc des apprentissages. Cependant, les phases de corrections collectives jouent un rôle alors essentiel de confrontation de techniques, d'autant que les analyses de manuels et de programmes que nous avons conduites au chapitre précédent, montrent que les connaissances anciennes pourront être très diverses d'un élève à l'autre selon les enseignements reçus.

3.1.2 Analyse a priori de la situation de production d'égalités

L'enjeu de cette situation est celui de la construction d'un deuxième milieu constitué d'un ensemble d'égalités formalisant les techniques de calcul fondées sur l'utilisation implicite de la distributivité qui ont été mises en œuvre lors de la situation précédente. Il s'agit d'une seconde étape de dévolution de la situation de formulation pour cette connaissance ancienne. Les élèves, par groupes de quatre, sont invités à produire un certain nombre d'égalités. Rappelons que pour ce faire, les élèves disposent des retranscriptions de leurs descriptions rhétoriques pour les techniques de calcul mental, et des reproductions des multiplications posées dont les résultats sont effacés. Les fiches distribuées à chaque groupe sont répertoriées en annexe. Notre analyse *a priori* s'effectue en deux temps. Elle concerne tout d'abord la question de la genèse possible des égalités visées, c'est-à-dire du formalisme attendu, conforme au formalisme institutionnel (instancié pour des valeurs numériques), de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition ou à la soustraction. Nous nous intéressons donc à l'activité possible de l'élève, dont la modélisation en termes de praxéologies est particulièrement appropriée. Nous la mettons en regard avec les consignes et les interventions prévues du professeur afin de pister les évolutions de l'activité possible. Dans un second temps, notre étude s'attache à la question de la diversité des formalismes à même d'émerger. Cette question est corrélée à celle des potentialités du milieu qui s'élabore pour préparer les unifications, les généralisations et les formalisations qui seront au cœur de la situation suivante. A cet effet, nous poursuivons notre analyse dans le cadre de la théorie des situations didactiques, afin de caractériser les relations entre le milieu précédent et le milieu en construction. Cette étude s'appuie en particulier sur un retour sur les connaissances anciennes en jeu, mais aussi sur les moyens de validation, couplés aux variables organisationnelles de la situation. En cela, nos analyses reprennent à ce moment là, pour les mettre en regard, certains éléments pointés lors de l'analyse en termes de praxéologies, tout en les complétant. Nous terminons notre étude par un retour sur les variables didactiques de la situation précédente et leurs valeurs, pour étudier les différents types d'égalités associés, c'est-à-dire les différents formalismes de la connaissance susceptibles d'émerger.

Analyse en termes de praxéologies

Examinons tout d'abord les types de tâches à accomplir par les élèves. La première consigne est ambigüe : elle demande de produire une égalité, elle réfère donc à un genre de tâche qui est ancien mais qui est, dans les pratiques anciennes du primaire, couplé à un type de tâche calculatoire, à partir d'un calcul écrit et donné aux élèves, dont on attend un travail dans le cadre numérique pour produire, et écrire à droite du signe =, le résultat. Mais la consigne offre ici une rupture de contrat (Brousseau 1998) dans le sens où l'égalité attendue ne doit pas « montrer de résultats ». L'égalité est employée essentiellement en primaire comme annonce de résultat. La consigne impose donc par cette contrainte d'envisager l'égalité autrement. Cependant, et c'est là l'ambiguïté, une interprétation possible de cette consigne consiste à considérer qu'elle désigne l'un des deux membres de l'égalité lorsqu'elle évoque « le processus » de calcul, et non les deux membres de l'égalité. Cette interprétation est sans doute renforcée par les consignes données lors de la séance précédente. En effet, la formulation empruntait le même vocabulaire : « quel processus de calcul as-tu utilisé ». Ce faisant, le professeur n'attendait pas davantage que les opérations et les résultats intermédiaires, c'est-à-dire qu'à aucun moment cette description n'est poussée jusqu'à l'identification de la décomposition d'un facteur en somme. Il apparaît donc peu probable *a priori* qu'une égalité du type attendu émerge dans un premier temps. Prenons l’exemple du calcul du produit de 7 par 32 donné en calcul mental lors de la première situation. L’égalité afférente visée est la suivante : $7 \times (30 + 2) = 7 \times 30 + 7 \times 2$. L’interprétation de la consigne laisse *a priori* dans l'implicite la nature du deuxième membre de l'égalité. Les habitudes anciennes permettent de supposer que les écritures pourront être celles des produits à effectuer, comme 7×32 pour notre exemple. Cependant, comme les résultats intermédiaires apparaissent dans les écritures des calculs posés, et parfois dans les descriptions rhétoriques, le second membre pourra alors être constitué des sommes des résultats des produits partiels, comme 210 + 14. On peut donc supposer *a priori* que les premières écritures produites seront de l’une des formes suivantes pour notre exemple :

$$7 \times 32 = 7 \times 30 + 7 \times 2$$

$$7 \times 32 = 7 \times 30 + 14$$

$$7 \times 32 = 210 + 14$$

$$7 \times 32 = 210 + 7 \times 2$$

$$7 \times 30 + 7 \times 2 = 210 + 14$$

Afin de soutenir la description des organisations mathématiques, nous nous appuierons sur la fiche suivante distribuée à l’un des groupes de la classe :

7 × 32	*J’ai fait 7 fois 3 ça fait 21 fois 10, 210 et après j’ai fait 7 fois 2 ça fait 14 et j’ai additionné 210 et 14.*
12 × 203	*12 fois 200 plus 12 fois 3 ça fait 36*
58 × 16	58 × 16 348 + 580
248 × 67	248 × . 67 1736 14880

Le type de tâche auquel sont confrontés les élèves peut s’énoncer ainsi, si l’on se réfère à la consigne prévue par le scénario :

T : Ecrire une égalité montrant un « processus » de calcul

Il relève d'un genre de tâche plus large consistant à écrire une égalité. Mais ici, le terme « processus de calcul » est ambigu (indéfini du point de vue de l'élève). Il réfère, tout d'abord, à la technique calculatoire mise en œuvre, c'est-à-dire au programme de calcul arithmétique équivalent au produit dont on demande un résultat. Il réfère ensuite, implicitement, à un autre programme de calcul lié à la décomposition d'un facteur sous la forme d'une somme que l'on n'évoque que rarement dans les discours accompagnant les pratiques calculatoires. C'est-à-dire qu'apparaissent deux sous-types de tâches composant la technique :

Le premier est un type de tâche de traduction sous la forme d'une expression arithmétique, dont on empruntera la formulation à Assude Coppé, Pressiat (2012) :

> t_1 : Passer de la formulation « rhétorique » d'un programme de calcul à sa formulation symbolique

La formulation symbolique est l'écriture d'une expression numérique. Ce sous-type de tâche n'est pas nouveau à ce niveau d'enseignement, ni à ce moment de l'année. Il est apparu notamment au travers de l'étude des règles d'écritures d'enchaînement d'opérations en lien avec les priorités de calcul. Néanmoins, nous supposons que ce type de tâche peut encore être suffisamment problématique pour occuper une part du travail, et justifie sa mise en exergue dans notre description de technique. D'autant que la technique associée est difficilement explicitable. Elle mêle étroitement les dimensions sémio-linguistique et mathématique, de sorte que la technique de production ne semble pouvoir s'expliquer que lorsque la production a eu lieu : on la contrôle par effectuation du programme écrit sous forme symbolique par exemple, ou par analyse de la forme écrite, mais le geste destiné à la création pose question. On pourrait le décrire comme une traduction « dans l'ordre » terme à terme des ostensifs donnés (rhétoriques pour ne pas dire langagier, oraux éventuellement) dans le langage L_{Arit}. Ainsi traduirait-on « *12 fois 200 plus 12 fois 3* » de la fiche précédente en « $12 \times 200 + 12 \times 3$ » (Nous écrivons ici à dessein le signe de la multiplication dans le sens inversé par rapport au sens de « fois », dans une lecture indifférente, et une écriture « dans l'ordre »).

En réalité il n'en est rien, car la production s'accompagne constamment de moyens de vérifications dans les deux dimensions sémio-linguistique et mathématique, orchestrant la grammaire des expressions, et les priorités opératoires, contrôlant au fur et à mesure la nature (un produit, une somme) et la fonction syntaxique (terme, facteur) de chacune de ses sous-expressions. Dans ce contrôle, peut devoir intervenir un usage des parenthèses idoine[40], sans quoi la technique précédente conduirait à produire des écritures comme $7 \times 3 = 21 \times 10 = 210 + 7 \times 2 = 14$ pour traduire « *J'ai fait 7 fois 3 ça fait 21 fois 10, 210 et après j'ai fait 7 fois 2 ça fait 14 et j'ai additionné 210 et 14* ». Ce faisant, les égalités produites sont à la fois fausses, et ne correspondent pas à une seule égalité.

Selon les formulations « rhétoriques » proposées, la technique consistera donc aussi, à effectuer un tri et à supprimer certains intermédiaires, comme des résultats partiels évoquant

[40] Notons que le mot parenthèse n'est jamais énoncé dans les descriptions rhétoriques, contrairement au nom des opérations et des nombres par exemple.

une suite d'égalités, c'est-à-dire une description par étape. Ecartant ainsi les résultats intermédiaires dans l'exemple précédent, on peut écrire $(7 \times 3) \times 10$ puis 7×2 et inscrire le signe + entre les expressions numériques en identifiant les produits partiels. Notons par ailleurs, qu'il restera à recomposer le premier produit sous la forme d'un produit de deux facteurs dont l'un soit l'un des facteurs du produit initial, c'est-à-dire ici à écrire 7×30 à la place de $(7 \times 3) \times 10$.

Pour le calcul posé ce sous-type de tâche est plus malaisé à décrire, d'une part parce que les ostensifs scripturaux ne désignent pas clairement les facteurs des produits intermédiaires, et d'autre part, parce que la formulation rhétorique (*a priori* plutôt chiffre par chiffre dans les pratiques anciennes des élèves) est éloignée du support écrit donné. Les élèves disposent bien d'un discours soutenant la technique posée de calcul, mais la technologie est imprégnée d'éléments technologiques de numération comme nous l'avons vu dans l'analyse de la situation précédente. Le discours est alors susceptible de faire obstacle à l'écriture, contrairement au cas du calcul mental. Il peut aussi pourtant être un support pour retrouver les produits partiels comme nous l'avons vu également plus haut. Le passage à la formulation symbolique pourra se faire à partir de la connaissance de l'algorithme, ou à partir des résultats des produits partiels qui sont écrits à chaque ligne. Quoi qu'il en soit, la technique engage une reconstruction, ou une reconnaissance des produits partiels dans un premier temps. Il s'agira aussi dans un deuxième temps, d'identifier une somme, dont l'ostensif + associé n'est pas toujours écrit, mais pour laquelle, la connaissance de l'algorithme est certainement *a priori* suffisante. La production de la formulation symbolique est donc plus difficile : elle demande que les connaissances sur l'algorithme soient recomposées en termes de calculs sur des nombres, avec identification des opérations, dont les ostensifs ne sont pas tous donnés par le support écrit, mais qui peuvent vraisemblablement être en partie disponibles ou reconstruits compte tenu de l'importance accordée au type de tâche lié au calcul posé de produits en primaire et encore en 6^e. Nous avons vu néanmoins que des interventions du professeur pour dépasser les obstacles de la numération sont à prévoir dans le cas contraire, pour certains élèves du moins. Une description de l'organisation mathématique peut alors se formuler ainsi :

> t_1' : Passer de l'écriture posée des résultats des produits partiels à la formulation symbolique du programme de calcul sous-jacent.
>
> τ : Identifier les produits partiels avant d'en écrire la somme.

Ces premiers sous-types de tâches sont de nature à produire les écritures de l'un des membres de l'égalité comme $12 \times 200 + 12 \times 3$. Le deuxième sous-type de tâche doit donc correspondre à la production de l'autre membre de l'égalité comme $12 \times (200 + 3)$.

La consigne peut laisser une certaine incertitude quant au sous-type de tâche attendu qui est en réalité le suivant :

> t_2 : Trouver puis écrire sous forme symbolique d'expression numérique un programme de calcul équivalent « intermédiaire »

Ce qui rend ce sous-type de tâche peu transparent, c'est que l'intermédiaire qui est en jeu est une étape implicite de décomposition d'un facteur en somme.

> τ : Identifier le facteur décomposé en somme dont les termes sont les facteurs des produits partiels, puis écrire le produit du premier par cette somme.
>
> θ : Algorithme de multiplication ?

La technologie de l'algorithme de multiplication ne semble pas ici tout à fait pertinente parce qu'elle n'est pas encore suffisamment mathématisée. L'égalité entre le produit donné à calculer et le programme de calcul que l'on exécute, est préconstruite, puisqu'on n'en a qu'une *praxis* au primaire. Du moins la technologie se situe-t-elle peut-être dans une dialectique entre un discours qui guide l'algorithme (qui lui sert de technologie, mais ce discours est lacunaire), et l'écriture du produit donné à calculer, complété éventuellement par les produits partiels (en calcul posé toujours, en calcul mental parfois, selon les traces écrites données aux élèves). En réalité, on est en train de modifier l'organisation mathématique, en la complétant, c'est-à-dire, en construisant une autre technologie : celle de la distributivité. On modifie la composante technologique dont disposent les élèves en orientant la production d'une formalisation nouvelle de *praxis* anciennes. Le mode de création de ces égalités est complexe, il fait référence à un système constitué de discours et d'ostensifs scripturaux. Cela suppose que la technologie des praxéologies calculatoires relève de calculs sur des nombres et non de la numération. La formalisation est aussi nouvelle dans le sens où elle engage une égalité, et donc l'écriture symbolique de deux programmes de calcul arithmétiques équivalents. Plus encore, ces programmes de calcul ne doivent référer à aucun résultat, ni être le programme de calcul initial du produit donné à calculer au départ. Ce sont autant de ruptures dans l'utilisation des écritures qui peuvent permettre de penser que les égalités visées n'émergeront certainement pas sans interventions fortes du professeur.

L'intervention prévue par le scénario consiste à reprendre collectivement une égalité comme $7 \times 32 = 7 \times 30 + 7 \times 2$ dans les termes suivants[41] :

> « Maintenant, regardez les égalités que vous avez produites, à droite il y a bien un procédé de calcul qui explique ce que l'on fait, mais à gauche vous écrivez toujours l'opération de départ.
>
> Mais ce n'est pas une égalité entre l'opération et le processus que je vous demandais.
>
> C'est une égalité qui montre tout le processus, et uniquement le processus, pas le calcul de départ. Parce qu'il manque une explication à chaque égalité pour comprendre le lien entre l'opération de départ et les processus écrits à droite. »
>
> « A gauche vous mettez l'opération de départ, mais il manque une explication pour le 30 et le 2, pour dire d'où ils viennent »
>
> « Quelle est la relation entre 30, 2 et 32 ? »
>
> « Comment écrire ça en mathématiques ? »

[41] Notons que ces formulations établies par le scenario sont très proches de ce que l'on trouve *a posteriori*, du fait que le professeur s'est attaché à les apprendre pour les restituer le plus fidèlement possible.

« C'est-à-dire quel calcul les lie ? »

« Il faut écrire 30+2 dans l'écriture du membre de gauche pour montrer d'où viennent le 30 et le 2 dans le membre de droite »

On voit donc un glissement possible de t_2 en

t_2' : Trouver une autre écriture de l'un des nombres qu'on multiplie sous la forme d'une somme

Le travail s'effectuera donc *a priori* dans la dimension linguistique : les sommes ne seront pas interprétées comme une écriture d'un programme de calcul, mais comme une autre écriture de nombre, c'est-à-dire comme une décomposition additive, d'autant que les techniques de calcul reposent pour l'addition, sur les décompositions de numération (sous la forme centaines + dizaines + unités).

C'est donc le deuxième type de tâche apparaissant avec la seconde consigne, qui jouera le rôle essentiel de réinterprétation de ces écritures comme programmes de calcul :

T : Vérifier une égalité entre deux expressions numériques

La technique afférente consiste à exécuter les programmes de calcul arithmétiques écrits dans chaque membre à la calculatrice, et à comparer les résultats obtenus : l'égalité est juste si les résultats sont égaux. La technologie est celle de l'égalité sur $\mathbb{R}$ traduisant l'équivalence de deux programmes de calculs arithmétiques.

Ce deuxième type de tâche modifie le rapport à l'égalité produite : déconnectée de son mode de production, elle est objet de vérification en lien avec son statut de relation d'équivalence qui se construit. Cette vérification dans la dimension mathématique permet également de contrôler en partie la validité des écritures. Du point de vue épistémographique, elle consiste à évaluer les dénotés des écritures arithmétiques, qui sont des nombres réels, et, si les expressions dénotent le même nombre, alors l'égalité est vraie, c'est-à-dire que le dénoté de l'égalité est la valeur de vérité « Vrai », et « Faux », sinon. Nous reviendrons sur la question de la validation dans la seconde partie de notre analyse. Notons tout de suite que si des égalités comme $7 \times (30+2) = 7 \times 30 + 7 \times 2$ peuvent être déclarées justes, tandis que des égalités comme $7 \times 30 + 2 = 7 \times 30 + 7 \times 2$ peuvent être déclarées fausses, cette vérification ne permet pas de discriminer une égalité comme $7 \times (30+2) = (7 \times 3) \times 10 + 7 \times 2$ qui n'est pas du type attendu. Nous allons y revenir dans la seconde partie de notre étude que nous abordons maintenant.

Connaissances, milieu et variables de la situation de formulation

Cette analyse complète la précédente par une mise en perspective des milieux construit et en construction, quant aux enjeux de formalisation, d'unification et de généralisation de la notion de distributivité. Nous retournons également sur le caractère nécessaire des interventions didactiques du professeur au regard des moyens de validation, et des dialectiques entre les dimensions sémio-linguistique et mathématique qui sont apparues en partie lors de l'analyse précédente des praxéologies à mettre en œuvre par les élèves.

A cet effet, nous décrivons dans un premier temps succinctement le milieu de cette seconde situation et les connaissances supposées des élèves pour étudier les validations mathématiques et sémio-linguistiques. Dans un second temps, notre étude se poursuit par l'analyse de l'influence des variables didactiques sur les égalités à produire.

Le milieu est constitué des fiches distribuées à chaque groupe comportant un tableau dont nous avons présenté un exemple plus haut. A gauche sont inscrits les produits qui ont été donnés à calculer lors de la première situation. A droite sont retranscrites les descriptions que les élèves ont pu faire de leurs techniques pour le calcul mental, et pour les multiplications posées, les traces écrites des élèves ont été scannées. Les résultats ont été effacés. Les élèves disposent de plus de leur cahier et de leur calculatrice. On peut supposer aussi que le milieu est enrichi des connaissances sur les algorithmes de calcul réactivées et éventuellement remodelées lors de la séance précédente.

Par ailleurs, les connaissances nécessaires et supposées des élèves sont de deux types. Dans la dimension mathématique, nous avons vu que la connaissance de l'algorithme de multiplication, qu'il soit posé, ou mental, doit être en partie recomposée du point de vue des nombres, en évacuant les éléments technologiques du côté de la numération. Dans la dimension sémio-linguistique, les connaissances anciennes portent sur les règles d'écritures d'enchaînements de calculs, et d'utilisation des parenthèses, en lien avec les priorités des opérations. Notons par ailleurs que l'utilisation des conventions d'écriture n'est certainement pas nécessaire pour la connaissance visée. Une égalité comme $7 \times (30 + 2) = (7 \times 30) + (7 \times 2)$ correspondra tout aussi bien à la distributivité que l'égalité écrite sous cette forme : $7 \times (30 + 2) = 7 \times 30 + 7 \times 2$. La seule connaissance nécessaire relève de l'utilisation idoine des parenthèses pour structurer l'écriture.

Cette nature double, à la fois mathématique et sémio-linguistique, des connaissances *a priori* nécessaires, se manifeste aussi pour ce qui est de la validation des égalités, comme nous l'avons entrevu plus haut. Une partie de la validation est portée par le milieu numérique produit lors de la première situation : c'est-à-dire l'ensemble des résultats des produits effectués qui ont été effacés. La calculatrice permet de les retrouver pour valider les égalités. Si les écritures produites pour chaque membre d'une égalité, ne correspondent pas à un même nombre, le milieu, par l'intermédiaire de la calculatrice, offre donc une rétroaction qui engage à produire une autre écriture. Ainsi une écriture comme $7 \times 30 + 2 = 7 \times 30 + 7 \times 2$ pourra être discriminée à l'aide de la calculatrice, car l'égalité est fausse. Une égalité vraie peut pourtant ne pas correspondre au formalisme visé.

La validation ne porte en effet que sur l'égalité, dans la dimension mathématique. C'est le professeur qui est garant de la validité des types d'écritures, conformément à la consigne. C'est la contrainte portée sur la forme qui permettra ainsi de rejeter des égalités comme $7 \times 32 = 210 + 14$ car « l'égalité attendue n'est pas celle du calcul et du résultat », « on ne veut pas de résultat intermédiaire » annonce le professeur. Plus encore, la situation ne peut apporter de rétroaction en cas de non adéquation de l'écriture avec la connaissance visée de façon isolée. C'est le cas par exemple de l'égalité que nous avons déjà mentionnée $7 \times (30 + 2) = (7 \times 3) \times 10 + 7 \times 2$ et qui correspond à la description donnée au premier groupe : « *J'ai fait 7 fois 3 ça fait 21 fois 10, 210 et après j'ai fait 7 fois 2 ça fait 14 et j'ai additionné 210 et 14.* ». L'égalité est vraie, elle correspond à la consigne. Mais elle réfère à la fois à la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition et à l'associativité de la multiplication. On retrouve ici les obstacles de la numération que nous avons mentionnés plus haut, et qui n'ont pas été levés par le professeur au moment de la formulation rhétorique dont témoigne la retranscription dans la fiche donnée à ce groupe.

L'analyse praxéologique montre qu'il est peu probable que les écritures visées émergent spontanément, essentiellement en raison de la rupture de contrat liée à l'utilisation de l'égalité, et de la non transparence des sous-types de tâches en jeu qui découlent de la reconstruction technologique qui ne peut être à ce moment dévoilée, à moins de ne plus laisser de place à toute action de l'élève. Le milieu offre donc des éléments qui permettent un certain nombre de rétroactions mais pas une validation définitive des écritures. Le moment collectif de validation mené par le professeur est alors, dans cette séance, crucial.

Dès lors, la question de l'analogie scripturale se pose : lorsque collectivement au tableau est construite une égalité du type attendu comme $7 \times (30+2) = 7 \times 30 + 7 \times 2$ comment s'assurer que les élèves continueront à produire leurs écritures en référence aux algorithmes et non pas aux ostensifs de cette égalité ? Le scénario prévoit de ce point de vue que le professeur efface le tableau pour limiter cette analogie, mais ce sont essentiellement les variables didactiques qui peuvent permettre d'envisager *a priori* que demeure la référence à l'algorithme et donc l'utilisation du milieu, c'est-à-dire des traces écrites des calculs intermédiaires. Chaque groupe a en effet des produits différents, nous allons en analyser les variables au regard des écritures possibles. Notons néanmoins qu'une analogie scripturale pourrait conduire à une égalité sans lien avec la description donnée comme $35 \times (90+8) = 35 \times 90 + 35 \times 8$ pour :

35 × 98	*J'ai fait 35 fois 100 et après j'ai fait moins 35 fois 2.*

Nous poursuivons notre analyse par celle des variables attenantes à l'organisation de l'activité de l'élève, avant d'étudier les variables didactiques de la situation.

L'une des premières variables concerne la disposition des élèves : on peut choisir de les faire travailler seul ou à plusieurs. Le scénario prévoit un travail en groupes, ce qui peut permettre aux élèves de confronter leurs réponses et de combler les lacunes des connaissances liées aux algorithmes qui peuvent encore faire obstacle. Ce choix peut aussi favoriser la dévolution et la prise en compte de la rupture de contrat, ainsi que des rétroactions du milieu numérique.

Par ailleurs, une autre variable consiste à choisir de donner les mêmes calculs à chaque groupe ou des calculs différents. Le fait de proposer des calculs différents peut *a priori* conduire à minorer l'analogie scripturale, c'est le choix effectué pour le scénario. Cela permet aussi de construire un ensemble d'écritures assez diversifiées en lien avec les variables didactiques, et nombreuses : 28 égalités seront produites sans tenir compte des égalités bonus pour les groupes les plus rapides. Ces égalités serviront à leur tour de milieu pour la situation de formulation suivante et leur diversité peut être une première étape pour donner un sens assez 'vaste' à la notion de distributivité que l'on construit. Nous y reviendrons.

Une dernière variable essentielle pour l'enjeu d'unification est celle des écrits choisis : ils sont issus de techniques différentes de calcul : celle du calcul mental, et celle du calcul posé. Les analyses précédentes montrent par ailleurs, que le sous-type de tâche consistant à retrouver les produits partiels est plus difficile *a priori* dans le cas du calcul posé que dans le cas du calcul mental. Les formulations rhétoriques peuvent *a priori* être de nature à permettre à chaque groupe de s'engager dans la tâche.

Nous allons maintenant analyser les variables didactiques de la situation au regard de la diversité des formes textuelles dans les feuilles distribuées au élèves, et l'influence de leurs valeurs en ce qui concerne l'activité de l'élève.

Une première variable didactique essentielle est celle de la nature du langage du support écrit.

V'_1 : La nature des traces écrites des techniques de calcul

Cette variable prend deux valeurs : le langage peut être méta-calculatoire[42] ou arithmétique. Dans le premier cas, les opérations sont désignées par les ostensifs langagiers écrits « fois », « plus », « j'additionne », de même que les facteurs des produits partiels sont la plupart du temps énoncés. Dans le second cas en revanche, aucune trace n'indique que chaque ligne intermédiaire est un produit. La connaissance de l'algorithme est essentielle pour les recomposer, avec les obstacles possibles que nous avons analysés plus haut.

Nous allons maintenant rentrer dans le détail des ostensifs qui sont autant de variables didactiques :

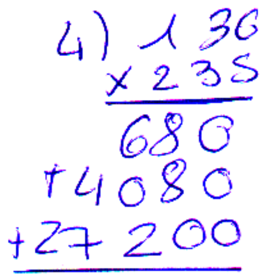
V'_2 : Ostensifs des résultats intermédiaires

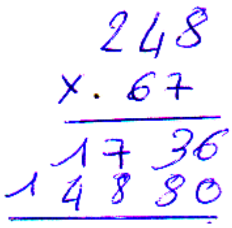
Cette variable peut prendre deux valeurs : présence ou absence. Dans le cas du calcul posé, ils sont toujours présents, et dans le cas du calcul mental, ils peuvent, ou non être écrits. La consigne demandant de ne pas écrire de résultats, lorsque les produits partiels sont écrits, il s'agit donc, soit de ne pas tenir compte de l'information pour l'écriture, soit de s'en servir pour recomposer les écritures de produits.

V'_3 : Ostensifs des opérations

De la même façon, cette variable peut prendre deux valeurs : présence ou absence. Dans le cas du calcul posé, aucun ostensif ne réfère aux produits intermédiaires. Selon les fiches distribuées, le signe + peut apparaître ou non :

[42] Le langage méta-calculatoire (Drouhard 2013) est un langage quasi-naturel qui sert à exprimer tout ce qui concerne les calculs effectués dans les langages de niveaux inférieurs (et en particulier arithmétique).





Dans les descriptions rhétoriques, les opérations sont clairement identifiées par « j’additionne », « plus », « on ajoute », « on enlève » ou « fois ». Dans une seule fiche apparaît « et » pour l’addition. De la même façon, une seule fiche présente un implicite quant aux termes dans la description suivante : « *62 fois 1 000 et 62 fois 1 et on ajoute* ». Les connaissances des techniques peuvent être nécessaires pour mettre à jour l’ensemble de la technique et aboutir à l’écriture, mais le support écrit est exhaustif dans la grande majorité des cas pour le calcul mental.

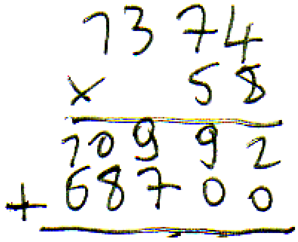
Nous allons maintenant préciser le rôle des variables didactiques du milieu précédent, liées aux oscillations de techniques que nous avons analysées pour la situation de calcul de produits, et dont les valeurs, pour cette situation de formulation, sont *a priori* de nature à générer une certaine diversité dans les égalités produites.

Nous avons déjà étudié la manière dont la diversité des calculs proposés lors de la première situation conduit *a priori* à des utilisations implicites de différentes formes de la distributivité. Cette diversité se transmet dès lors aux formes textuelles, c’est-à-dire aux égalités envisagées. Ainsi, selon les calculs donnés sur les feuilles qui leur sont distribuées, les élèves produiront des égalités *a priori* de type différent. Le tableau suivant récapitule les différentes formes liées aux variables didactiques pertinentes. Elles ne sont pas toutes représentées, cependant, dans la mesure où, les autres variables ou les autres valeurs, que nous avons écartées pour cette synthèse, produisent *a priori* des égalités dont les types sont déjà représentés.

Variables didactiques	*Valeurs possibles*	*Exemples*	*Egalités possibles*	*Formes possibles de la distributivité*
V_1 : Nombre de chiffres des facteurs a et b ou valeurs de (n;m)	(0 ; 1)	**7 × 32** *J'ai fait 7 fois 3 ça fait 21 fois 10, 210 et après j'ai fait 7 fois 2 ça fait 14 et j'ai additionné 210 et 14.*	$7 \times (30 + 2) = 7 \times 30 + 7 \times 2$	Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition à droite
	(1 ; 0)	**46 × 3** *J'ai fait 6 fois 3, 18 et 4 fois 3 ça fait 12 c'est 120 et 18.*	$(40 + 6) \times 3 = 6 \times 3 + 40 \times 3$	Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition à gauche
	(3 ; 3)	**136 × 235** 4) 136 × 235 680 +4080 +27 200	$136 \times (5 + 30 + 200) = 136 \times 5 + 136 \times 30 + 136 \times 200$	Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition pour une somme de trois termes
V_5 : Compléments à 100 ou à 200 de a ou b.	$100 - b < 4$	**35 × 98** *J'ai fait 35 fois 100 et après j'ai fait moins 35 fois 2.*	$35 \times (100 - 2) = 35 \times 100 - 35 \times 2$	Distributivité de la multiplication par rapport à la soustraction
V_6 : inversion des facteurs/place des facteurs dans l'écriture	$a \times b$ et $b \times a$	**67 × 14** et **14 × 67** 67 × 14 268 + 670 1) 14 × 67 98 840	$67 \times (10 + 4) = 67 \times 10 + 67 \times 4$ $14 \times (60 + 7) = 14 \times 60 + 14 \times 7$	Non unicité de la forme et de la décomposition pour un produit donné (choix du facteur décomposé).

Les écritures peuvent donc relever de la distributivité à gauche ou à droite, de la multiplication par rapport à l'addition ou à la soustraction, et les décompositions peuvent être en somme de plus de deux termes, et non uniques. Notons par ailleurs que nous n'avons pas repris les possibilités évoquées lors de l'analyse de la première situation, et qui demeurent ici *a priori*, d'apparition d'égalités relatives à la double distributivité. Le scénario ne prévoit pas de les discriminer. Cependant, il est possible que les élèves s'auto-censurent en partie par analogie scripturale après la phase de correction collective.

Nous supposons de plus que sont susceptibles d'apparaître des écritures présentant une certaine diversité dans l'organisation spatiale des termes, des facteurs, mais aussi des membres de l'égalité, aboutissant en particulier à des formes correspondant au sens du développement comme au sens de la factorisation. Cependant, la question de la place géographique c'est-à-dire de l'organisation spatiale des ostensifs ne peut s'analyser tout à fait en termes de variable didactique. Le milieu en effet ne saurait influencer à lui seul les choix opérés par chaque groupe. Nous supposons pourtant que ces choix puissent être différents d'un groupe à l'autre, nous allons les préciser et expliquer les raisons pour lesquelles ils sont indifféremment possibles *a priori*. Ces choix participeront de façon essentielle à la création d'un ensemble d'égalités, c'est-à-dire d'un milieu riche du point de vue des formes pour la situation de formulation suivante. Examinons tout d'abord l'exemple suivant :



L'identification des produits partiels pourra conduire à écrire 1374×8 ou 8×1374 indifféremment. Dans le sens de la multiplication comme addition itérée, c'est pourtant la première écriture qui est adéquate. La seconde relève de la commutativité en plus. Mais cette commutativité est très familière en 5^{e}. Il est possible que l'une ou l'autre des écritures soit utilisée. Néanmoins, la lecture se faisant de haut en bas et de droite à gauche, on peut supposer *a priori* qu'une première égalité produite serait 1374×58 = 1374×8 + 1374×50 (le premier produit partiel, celui qui est écrit en haut, est écrit à gauche dans la somme). Mais après la phase de correction collective, les élèves pourront choisir la décomposition de 58 en 50 + 8 selon les habitudes en lien avec les décompositions additives liées à la numération plutôt qu'en 8 + 50, qui correspondrait à l'ordre (gauche-droite) des produits partiels. Les termes et les facteurs pourront ne pas être répertoriés géographiquement dans les écritures avec des égalités comme 1374×(50+8) = 1374×8 + 1374×50.

Ces choix possibles reposent aussi, dans le cas du calcul mental, sur l'utilisation banalement erronée de l'ostensif langagier « fois ». L'écriture idoine de « 3 fois 2 » est en effet « 2×3 ». Il est fort à parier que peu d'élèves choisissent cet ordre, en écrivant plutôt dans une transcription « dans l'ordre » : « 3×2 ». L'utilisation de « fois » étant indifférenciée à l'oral comme à l'écrit, la place des facteurs communs peut aussi varier dans les écritures.

Ainsi en est-il dans l'exemple suivant :

23 × 97	*J'ai fait 100 fois 23 ça fait 2 300 après j'ai enlevé à 2 300, 3 fois 23.*

Si les élèves choisissent de faire une transcription dans l'ordre, l'écriture de l'un des membres de l'égalité pourra être : 100×23 - 3×23. Et de même le facteur commun n'est pas répertorié géographiquement par rapport au produit initial 23 × 97.

Plus encore, les choix opérés par les élèves pourront aussi porter sur la place des membres de l'égalité. Ces choix pourront être inconscients ou motivés par les contraintes de la situation.

Si les élèves s'engagent tout d'abord dans le sous-type de tâche t_1 de traduction de la technique de calcul, on peut envisager *a priori* que ce sera l'écriture première, donc l'écriture à gauche de l'égalité comme « 100×23 - 3×23 = ». L'écriture du membre de droite peut évidemment poser problème. Si la contrainte de passer au tableau ou de produire une écriture à droite est forte, les élèves pourront s'affranchir d'une partie de la consigne et écrire tout de même le produit donné. On obtient alors 100×23 - 3×23 = 23×97. Mais après la phase collective, si les élèves conservent le sens de leur écriture en modifient le membre de droite, on obtient une égalité dans le sens de la factorisation : 100×23 - 3×23 = 23×(100 – 3).

Un autre choix peut se fonder sur l'usage ancien de l'égalité entre un calcul et son résultat. On peut supposer que le type de tâche étant nouveau, parmi les premières égalités, et malgré la consigne, figureront des écritures dont le membre de gauche soit l'écriture du produit donné comme : 23×97 = 100×23 - 3×23 pour reprendre l'exemple précédent. Mais alors, après la phase collective, l'écriture, si elle est conservée dans ce sens aboutira à celle d'un développement : 23×(100 – 3) = 100×23 - 3×23.

Ainsi, nous supposons que la place des ostensifs dans les écritures puisse tout à fait être diverse, selon les choix des élèves, plus ou moins influencés par les consignes, et les habitudes liées aux connaissances antérieures. Cette souplesse des écritures accompagne une certaine diversité que notre analyse *a priori* a permis de mettre à jour pour cette première situation de formulation. L'ensemble d'égalités revêt de multiples facettes préparant ainsi le milieu des situations suivantes dont les enjeux de formalisation, d'unification et de généralisation se font plus précis. C'est ce que nous allons voir maintenant.

3.1.3 Situation de formulation et d'institutionnalisation : une propriété commune

L'enjeu de cette situation est celui de l'unification des *praxis* anciennes de calcul mental et de calcul posé. Celle-ci passe par un nouveau formalisme, rhétorique, portant sur les égalités produites. Ce formalisme véhicule une unification et une généralisation des égalités produites lors de la situation précédente, dans le sens où il est demandé aux élèves de produire une formulation qui puisse être commune à un certain nombre d'entre elles, données ensemble. Il y a donc une première décontextualisation qui s'opère, de sorte que la situation est aussi une première étape d'institutionnalisation. Cette généralisation des égalités, jusqu'alors considérées comme des descriptions de techniques, amorce la construction d'un élément technologique commun complétant les praxéologies anciennes. Notre analyse se déroule en deux temps. Tout d'abord, elle s'attache à déterminer les conditions et les contraintes portées par la situation susceptibles d'aider, ou au contraire de poser difficulté à la généralisation et par là, à l'émergence du formalisme rhétorique attendu, ou du moins d'une forme proche. Pour cela, nous nous situons dans le cadre de la théorie des situations didactiques afin d'analyser les spécificités du milieu choisi par le scénario, en lien avec les milieux précédents, les connaissances supposées nécessaires à la réalisation des tâches prescrites aux élèves, ainsi que les consignes prévues. Nous analysons également les différentes phases dans cette situation de formulation jalonnées par des situations de validation la faisant évoluer. Dans un second temps de notre étude, nous ré-explorons ces phases dans le but d'analyser la nature de l'activité de l'élève, mathématique, ou méta-mathématique. Nous adoptons donc un autre point de vue, dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique. Nous parlerons donc plutôt de moments de l'étude correspondant à l'organisation didactique. Néanmoins, ces moments sont en quelque sorte des sous-moments de ce que l'on peut interpréter comme un moment technologique, dans le sens où la propriété de distributivité émerge. L'analyse des praxéologies a pour objet de déterminer la manière dont elles se complexifient, et de façon intrinsèque, la manière dont elles préparent ou se jouent des articulations entre les dimensions sémio-linguistique et mathématique. Pour ces raisons, notre analyse *a priori* de cette situation, plus que les autres, se déroule successivement dans deux cadres théoriques, qui nous paraissent complémentaires. Certains éléments pourront, ponctuellement, se recouper, mais chaque cadre théorique apporte des nuances d'interprétations qui enrichissent dans une partie ou dans l'autre, les analyses au regard de leurs objets. Par ailleurs, la nature de l'activité de l'élève pouvant être influencée par les interventions de l'enseignant, nous les étudierons dans la seconde partie, en lien avec les praxéologies en jeu.

Connaissances, milieu et variables didactiques de la situation

Le milieu est constitué des écritures de certaines égalités produites par les groupes lors de la situation précédentes. Le scénario prévoit que les élèves disposent de la retranscription suivante photocopiée pour chacun :

$17 \times (10 + 2) = 17 \times 10 + 17 \times 2$

$62 \times (1\,000 + 1) = 62 \times 1\,000 + 62 \times 1$

$86 \times (30 + 4) = 86 \times 4 + 86 \times 30$

$68 \times (10 + 1) = (68 \times 10) + 68 \times 1$

$(500 + 34) \times 22 = (500 \times 22) + 34 \times 22$

Les élèves disposent également de la calculatrice. Ce milieu est *a priori* enrichi par les connaissances[43] liées à la mémoire de la *praxis* de la première situation de calcul de produits, d'une part, et à celles liées à la mémoire des techniques de production des égalités lors de la situation de formulation précédente. Ainsi, ces mémoires peuvent-elles jouer un rôle et orienter l'interprétation d'un membre d'une égalité comme $17 \times (10 + 2)$ comme celle d'un produit de deux nombres. D'une part, la mémoire de l'action est de nature à identifier cette écriture comme celle d'un produit, puisque la première situation consistait à calculer des produits. D'autre part, la mémoire de la production des égalités est *a priori* de nature à interpréter la somme comme une écriture de nombre, ici le nombre 12, que l'on a décomposé.

Intéressons-nous maintenant aux variables didactiques de la situation. Elles sont ici essentiellement liées à la forme des expressions. Elles ne sont pas sans lien avec les variables des séances précédentes, mais nous les envisageons ici au regard de la consigne, c'est-à-dire comme des variables portant sur les écritures. Leurs valeurs conditionnent en partie à la fois la description de la technologie et sa portée ou son domaine de validité. De ce point de vue, elles sont donc considérées comme didactiques. Elles relèvent néanmoins essentiellement de la dimension sémio-linguistique, bien qu'elles soient liées, nous le répétons, aux variables de la dimension mathématique. Les égalités proposées sont issues d'un choix parmi l'ensemble des égalités produites par les groupes. Nous décrirons par conséquent des variables qui ne prennent éventuellement qu'une seule valeur dans ce corpus. La description des variables pose du reste question, car elles réfèrent à la grammaire des expressions, et en particulier à l'organisation « géographique » des écritures. Il va sans dire que ces descriptions portent en elles mêmes des choix (dans le lexique employé, dans les objets sur lesquels elles portent par exemple), et qu'ils auraient pu être autres. Ces choix sont orientés par ce que nous cherchons à analyser : l'influence de ces variables sur le domaine de validité de la connaissance émergeante, et sur le discours qui pourra être construit.

La première variable est la suivante :

V''$_1$ *: Catégorie du membre de gauche de l'égalité*

[43] Nous revenons sur les connaissances supposées nécessaires à l'activité de l'élève dans la seconde partie de notre analyse car elle est étroitement liée à la nature de cette activité, comme nous le verrons. Nous nous limitons ici aux connaissances liées à l'imbrication des différents milieux qui s'élaborent au fur et à mesure des situations.

Ses valeurs possibles sont Somme, Différence ou Produit. Cette variable est jumelée avec celle de la nature du membre de droite de l'égalité pour les mêmes valeurs possibles. Elles sont considérées comme variables, étant donné que le sens de lecture et d'écriture se fait de gauche à droite. L'égalité étant une relation d'équivalence, la symétrie permet une lecture de droite à gauche, mais d'une part, un tel sens de l'égalité est en construction à ce niveau d'enseignement, et d'autre part, dans la pratique du calcul littéral, l'écriture se fait de gauche à droite. Dans ce cas, l'utilisation de l'égalité est orientée, de même que l'est tout discours par la chronologie de ce qui est énoncé. Ainsi selon les valeurs de cette variable, le sens sera celui du développement ou de la factorisation. Les valeurs somme ou différence renvoient quant à elles au domaine de validité de la distributivité de la multiplication qui concerne à la fois la soustraction et l'addition. Aucune des égalités ne concerne ici de différence, et elles présentent toutes un membre de droite qui est un produit. La distributivité sera limitée à celle de la multiplication par rapport à l'addition, et ce, dans le sens du développement. Les unifications potentielles liées à d'autres valeurs de ces variables auront donc lieu ultérieurement, tout comme les généralisations liées à celles de la seconde variable :

V''$_2$: Nombre de termes de la somme constituant l'un des membres de l'égalité.[44]

Les valeurs possibles sont celles de tout entier *n* supérieur ou égal à 2. Les écritures à *n* termes peuvent généraliser la distributivité et permettre de s'affranchir d'une technologie supplémentaire qui est celle de l'associativité, et ainsi d'éviter une amplification praxéologique dans les techniques du calcul algébrique, ainsi que nous l'avons vu à l'occasion d'analyses de manuels lors du chapitre précédent. Dans l'ensemble des écritures proposées aux élèves, la seule valeur de *n* est 2. La distributivité ne sera pas construite dans sa généralité à ce moment là de l'étude. Les formulations produites pourront également faire référence au nombre « deux » de termes et limiter la technologie dans ce sens.

Les variables suivantes concernent les localisations géographiques de certains éléments dans l'écriture des égalités.

V''$_3$: Place de l'écriture du facteur décomposé en somme (ou en différence) par rapport au signe × dans l'écriture du produit.

Les valeurs possibles sont à gauche, ou à droite. De la même façon que précédemment, envisager la distributivité comme distributivité à gauche ou à droite indifféremment, permet de s'affranchir d'une technologie supplémentaire qui est ici celle de la commutativité de la multiplication, et de gagner en efficacité dans les techniques du calcul algébrique en évitant là encore une amplification praxéologique. Ainsi pourra-ton développer $(30+7)\times 18$ sans devoir faire appel à la transformation de mouvement $(30+7)\times 18 \xrightarrow{commut} 18\times(30+7)$.

[44] Cette variable ne concerne pas la différence : la soustraction n'étant pas associative, on ne saurait définir de différence de plus de deux termes. Cependant, tout opérateur lié aux opérations de l'arithmétique est binaire. Simplement, dans le cas de la multiplication et de l'addition, l'associativité permet de considérer des écritures à *n* termes ou à *n* facteurs (donc non parenthésée pour se ramener à deux) parce qu'il n'y a pas d'ambiguïté sur la dénotation.

Parmi les égalités prévues par le scénario, la dernière écrite, montre la distributivité à droite, de sorte que le seul élément pertinent, c'est-à-dire unifiant, pour la description, sera la fonction syntaxique (le facteur du produit par exemple) et non la place dans l'écriture (ce qu'il y a à gauche du signe ×). Les transformations de mouvement opérant sur les fonctions syntaxiques, qui sont invariantes dans les expressions, cette valeur de la variable est *a priori* de nature à favoriser des formulations fondées sur ces fonctions syntaxiques. Cette analyse est commune à celle des valeurs de la variable suivante :

V''_4 : Géographie relative des sous-expressions de chaque membre de l'égalité

Les valeurs possibles peuvent être « les mêmes » (toutes à gauche ou toutes à droites) ou « différentes » (tantôt à gauche, tantôt à droite). Le caractère relatif s'exprime par rapport aux signes opératoires. Dans le corpus sélectionné, cette variable prend la valeur « les mêmes » pour les facteurs communs. Pour chaque égalité, le facteur commun est soit à gauche, soit à droite, mais s'il est à gauche (respectivement à droite) dans le membre de gauche de l'égalité, il est également à gauche (respectivement à droite) dans le membre de droite de l'égalité comme dans la première égalité : $17 \times (10 + 2) = 17 \times 10 + 17 \times 2$. La valeur « différentes » concerne une seule égalité qui est la suivante : $86 \times (30 + 4) = 86 \times 4 + 86 \times 30$. Le terme 30 est écrit à gauche dans la somme du premier membre de l'égalité alors que le facteur 30 est écrit dans le produit du terme de droite de la somme du second membre de l'égalité. Cette valeur de la variable peut *a priori* être un levier pour des descriptions qui ne soient pas fondées sur les places des ostensifs, mais qui réfèrent aux fonctions syntaxiques.

Nous allons maintenant analyser plus avant l'évolution de la situation de formulation en fonction des phases prévues par le scénario.

Cette séance organise en cascade plusieurs phases. Les élèves doivent tout d'abord formuler une propriété commune qui est en partie un modèle des actions liées aux calculs effectués lors de la première situation. Cette nouvelle formulation s'appuie sur des formulations intermédiaires symboliques et instanciées de ces calculs construites lors de la situation de production d'égalités. La décontextualisation qui s'opère pour faire émerger une propriété commune, place cette situation à l'interface d'une situation de formulation et d'institutionnalisation. De même que pour la situation précédente en ce qui concerne certaines caractéristiques syntaxiques, les validations offertes par le milieu ne peuvent suffire et comme nous le verrons ci-après, des interventions didactiques fortes de l'enseignant restent ici nécessaires dans la gestion du jeu didactique autour de la formulation collective de cette propriété commune.

La première consigne prévue est la suivante : « Voici toutes les égalités que vous avez produites et qui montrent une certaine ressemblance. L'objectif de cette séance est d'identifier et d'expliquer cette chose commune. ».

La consigne postule une unification possible, tout en laissant l'objet de la formulation ou de l'unification très vague, il est désigné par « chose commune » sans plus de spécification. Ceci s'explique par le caractère provisoire du formalisme attendu, dans le sens où à ce stade, il ne s'agit pas encore véritablement de construire un théorème mais d'unifier les écritures, en articulant les aspects syntaxique et sémantique, nous allons y revenir. Ce manque de précision de la consigne laisse supposer qu'il puisse coexister deux interprétations possibles.

La première est relative au milieu initial de l'action. On peut supposer en effet que la mémoire didactique de ce point de vue puisse jouer un rôle : les calculs effectués lors de la première séance ont servi de milieu pour les écritures des égalités. Si l'on interprète la consigne comme une situation de formulation portant sur ce premier milieu, il s'agit d'une nouvelle formulation du modèle d'action, modélisante à un autre niveau dans le sens où elle unifierait les modèles instanciés précédents des calculs de produits. Ce modèle s'inscrit dans la dimension mathématique, c'est la connaissance visée de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition ou à la soustraction. Néanmoins cette connaissance repose sur une équivalence de programmes de calcul. Cependant, les techniques de calcul sont essentiellement portées ou décrites, par les membres de droite des égalités, montrant des sommes de produits partiels. L'action ne réfère pas *a priori* à deux programmes de calculs mais à un seul. L'équivalence n'assure que le fait que le programme de calcul soutenant la technique donne bien le même résultat que le programme de calcul du produit initial donné. Le premier membre est donc peu interprétable du point de vue de l'action, dans la dimension mathématique. Ainsi lors de la production de l'égalité $17 \times (10 + 2) = 17 \times 10 + 17 \times 2$ à l'occasion de la situation précédente, on peut supposer que l'écriture du facteur 10 + 2 dans le membre de gauche ne soit pas interprétée comme une écriture de la technique de calcul, mais bien comme une autre écriture du nombre 12. Et c'est là toute l'ambigüité du travail qui se joue à la fois dans la dimension mathématique et dans la dimension sémio-linguistique. Il est cependant à supposer que cette seule consigne n'est pas de nature à faire émerger, compte tenu de la construction du milieu des écritures, une interprétation dans la dimension mathématique des membres de gauche, pour aboutir à la distributivité. Les formulations de types programmes de calcul qui pourraient émerger ne devraient *a priori* concerner que les membres de droite.

La seconde interprétation de la consigne est relative au milieu de la première formulation, c'est-à-dire au milieu des écritures des égalités. L'unification portant alors sur des processus d'écriture d'égalités, dans la dimension sémio-linguistique, en décontextualisant en partie des calculs des produits, pour construire la transformation de mouvement afférente. Si les membres de gauche relèvent d'un travail précédent dans la dimension linguistique, avec des décompositions de nombres pour répondre à une consigne, ce n'est *a priori* pas le cas des membres de droite des égalités produites. On peut donc supposer que les formulations seront incomplètes à ce moment de l'étude.

Le milieu ne pourra offrir que peu de rétroactions du point de vue des formulations. Chaque formulation étendant une description d'une égalité pourra par exemple être confrontée aux autres égalités, mais leur nombre est limité. Toutefois, le jeu sur les variables d'écriture pourra en partie tourner des formulations vers l'identification de fonctions syntaxiques, comme nous l'avons vu précédemment.

La seconde consigne doit permettre *a priori* de modifier les interprétations, et ainsi compléter dans les deux dimensions les formulations, et les validations.

La consigne est la suivante : « Peut-on produire des égalités utilisant cette « chose commune identifiée » et qui soient du même type que celles que vous avez écrites. ». Six calculs sont proposés et écrits au tableau : 156 × 78 ; 15 × 103 ; 9 × 305 ; 387 × 13 ; 435 × 86 ; 25 × 99.

On retrouve ici des choix de valeurs des variables de la situation de calculs de produits qui peuvent conduire à des écritures de différentes égalités pour un même calcul : avec deux ou trois termes, avec des facteurs décomposés écrits à gauche ou à droite du signe ×. Ainsi pour 156×78, on peut supposer *a priori* que les écritures suivantes puissent apparaître :

$$156 \times (70 + 8) = 156 \times 70 + 156 \times 8$$

$$(150 + 6) \times 78 = 150 \times 78 + 6 \times 78$$

$$(100 + 50 + 6) \times 78 = 100 \times 78 + 50 \times 78 + 6 \times 78$$

Avec leurs variantes de positions géographiques des nombres correspondant aux valeurs des variables didactiques précédentes. Cette diversité des écritures pour un même calcul peut être un levier pour aboutir à une formulation portant une certaine généralisation (ne mentionnant pas le nombre de termes par exemple) et construite à partir de fonctions syntaxiques et non pas d'indices ostensifs non pertinents mathématiquement.

En dessous de chaque calcul, le scénario prévoit que soit écrit : « égalité » puis « vérification ». Cette nouvelle consigne augure une phase de validation partielle dont l'enjeu est de préparer à une nouvelle phase de la situation de formulation.

Cette mise à l'épreuve engage l'élève à utiliser leurs premières formulations pour écrire de nouvelles égalités dans la dimension sémio-linguistique, et donc en faire l'usage comme une théorie. Toutefois, il n'est pas certain que les élèves essayent d'employer ce qui a été formulé plus ou moins adroitement et de façon probablement incomplète. Comme la consigne repose encore sur des écritures de produits, même s'il ne s'agit pas de les calculer, nous supposons *a priori* que les productions antérieures d'égalités pourront constituer une mémoire pour l'écriture du membre de gauche, notamment pour la décomposition d'un des facteurs comme une somme. On peut aussi supposer que les élèves se fondent sur des analogies scripturales des écritures photocopiées. Cependant, les choix des valeurs des variables laissent penser qu'il puisse se construire un travail sémiotique associé en partie aux fonctions syntaxiques pour la manipulation des nombres et des écritures et dépasser la seule analogie scripturale.

La validation de l'adéquation de ce que l'on fait dans la dimension sémio-linguistique est ambigüe. Elle reposera là encore sur la confrontation avec les écritures données, et les embryons de discours produits. Elle est cependant de nature à prendre en compte la dimension sémio-linguistique dans la production d'égalité pour les deux membres, et en particulier pour le membre de droite. L'intervention du professeur semble néanmoins inévitable dans cette phase.

La « vérification » demandée convoque aussi une validation dans la dimension mathématique de la formulation. La recherche du dénoté de chaque membre de l'égalité oblige à considérer l'écriture à gauche comme un programme de calcul à exécuter et non plus seulement comme une écriture d'un produit dont on a donné à un facteur, une autre écriture de nombre. Une somme telle que 10+2 n'est plus considérée comme un jeu d'écriture (une décomposition) mais bel et bien comme une opération à effectuer au moment de la vérification. La vérification joue donc *a priori* le rôle essentiel de recomposition de l'écriture comme celle d'un programme de calcul, dans son intégralité. Ainsi s'installe un jeu constant, entre programme de calcul et écritures, de nombres ou d'égalités, dans une dialectique des dimensions sémio-linguistique et mathématique. L'ambivalence des consignes et des validations permet *a priori* la coexistence, mais donc aussi le dialogue constant, de deux interprétations et de deux dimensions. Cette validation prépare une nouvelle formulation entièrement en termes de programmes de calculs équivalents, et donc la dissociation des dimensions mathématiques et sémio-linguistiques. L'intervention du professeur pour mettre des mots sur les programmes de calculs en lien avec les vérifications semble toutefois inévitable pour assurer la construction d'un discours idoine.

Le scénario prévoit enfin une phase de validation portant sur la dimension mathématique afin de justifier l'équivalence des programmes de calculs produits par le jeu d'écriture. Elle est entièrement à la charge du professeur, qui sur un exemple générique, doit écrire *in extenso* le produit sous la forme d'une somme avant d'utiliser l'associativité de l'addition :

$387 \times 13 = 387 + 387 + 387 + 387 + 387 + 387 + 387 + 387 + 387 + 387 + 387 + 387 + 387$ $= (387 + 387 + 387 + 387 + 387 + 387 + 387 + 387 + 387 + 387) + (387 + 387 + 387) = 387 \times 10 + 387 \times 3$.

Orienter les praxéologies mathématiques vers une dialectique syntaxique/sémantique
Cette troisième situation peut être interprétée en termes anthropologiques, comme un second moment technologique pour les types de tâche de calcul de la situation de calcul de produits. Elle s'appuie sur les premières descriptions de techniques sous les formes imposées d'égalités. L'enjeu de l'unification s'articule à celui de l'augmentation du degré de complétude des praxéologies anciennes. Nous avons vu lors de l'analyse de la première situation que les contraintes portant sur les égalités produites sont *a priori* de nature à modifier les praxéologies de calcul dans le sens où, pour constituer la distributivité comme composante technologique, il s'agit de s'affranchir des éléments relatifs à la numération de position. Les descriptions rhétoriques anciennes ne s'avèrent pas idoines. Les égalités jouent donc un rôle d'intermédiaire pour construire une nouvelle description de technique, et par suite compléter les praxis anciennes autour d'un questionnement technologique : celui de la justification des techniques fondées sur ces égalités et de leur domaine de validité, à la fois dans les dimensions mathématique et sémio-linguistique.

La nature des praxéologies évolue donc constamment. Ce qui correspond du reste à la nature du moment technologico-théorique qui ne se réalise pas en général en un seul épisode : il est étroitement lié aux autres moments de l'étude. Nous montrerons donc dans notre analyse comment les autres moments organisés *a priori* par le scénario pourront servir de levier pour faire émerger à partir d'un embryon technologique une technologie plus élaborée, qui se précisera au fur et à mesure de reprises de la technique et de questionnements ou de mises à l'épreuve autour des principales fonctions de la technologie : descriptive, justificatrice ou productrice de techniques. Un ensemble de praxéologies émerge et évolue en s'agrégeant ou en se complétant comme nous allons le voir. Nous analysons tout d'abord l'activité de l'élève en termes de praxéologies, et mettons en regard leur nature avec les interventions prévisibles de la part de l'enseignant. Dans un second temps, nous revenons sur l'ensemble des praxéologies construites pour en étudier une première complexification.

Le premier type de tâche auquel les élèves sont confrontés relève de notions usuellement protomathématiques. La demande de reconnaissance de forme est cependant explicite, avec un enjeu d'unification :

> C'est ainsi encore que telle notion protomathématique peut devenir, en affleurant à la surface du discours didactique explicite, une notion paramathématique. Chevallard 1985 p. 56

Il ne s'agit pas pour autant d'exercer une capacité de reconnaissance, mais c'est l'objet de la reconnaissance qui est l'enjeu. Il est néanmoins extrêmement vague au travers de la consigne d'identification d'une chose commune comme nous l'avons vu plus haut. Celle-ci réfère à la fois à une transformation de mouvement commune dans la dimension sémio-linguistique et à une équivalence de programmes de calcul dans la dimension mathématique. Le type de tâche attendu en réalité peut s'énoncer de la façon suivante :

T : Décrire sous forme rhétorique une transformation de mouvement / l'équivalence de deux programmes de calcul.

Ces deux objets modélisent et décrivent dans deux dimensions différentes, les techniques de calcul des produits dont on cherche à compléter l'organisation mathématique. Ces objets n'étant pas disponibles pour les élèves, la consigne ne saurait les évoquer. Ils ne disposent pas davantage de praxéologie institutionnelle permettant d'aborder ce type de tâche. Il semble donc que le genre de tâche dont puissent réellement s'emparer les élèves relève d'une reconnaissance de formes ou de patterns semblables. Sans qu'aucune praxéologie liée n'ait été énoncée dans la scolarité, les reconnaissances de formes ou la recherche de similitudes vivent néanmoins constamment :

> C'est ainsi que de nombreux tests supposent la mise en œuvre de la capacité de « reconnaissance », c'est-à-dire du maniement de la *dialectique ressemblances/dissemblance* […]. De nombreuses « capacités » ainsi identifiées restent absentes de l'*univers de l'enseignant*, notamment parce qu'elles ne peuvent pas, comme telles (c'est-à-dire dans leur généralité), *faire l'objet d'un enseignement*. L'enseignant peut entraîner ses élèves à reconnaître (par exemple) une différence de deux carrés ; il n'existe pas pour autant un enseignement dont l'objet soit « la dialectique ressemblance/différence ». Chevallard 1985 p. 54

Des effets de contrats sont néanmoins prévisibles, d'une part parce que le travail mobilise cette dialectique qui n'est pas objet de l'enseignement, et d'autre part parce qu'en toute fin, ce qu'il est pertinent d'identifier comme élément unificateur ne peut être validé que par le professeur. Il n'y a pas *a priori* pour l'élève, de raison par exemple, d'écarter l'ostensif des parenthèses comme unificateur des écritures des membres de gauche. Il y a un contrat qui se tisse en réalité à ce moment là quant à la « *grille de perception* définie par *le contrat didactique* et sa hiérarchie de valeurs » (Chevallard 1985 p. 54). On peut supposer *a priori* que les techniques de reconnaissances soient fondées sur l'analogie scripturale et consistent à identifier et décrire les ostensifs superposables, c'est-à-dire identiques pour chaque ligne d'écriture : les signes ×,+, =, les parenthèses. Ces seuls ostensifs ne sont pas pertinents eu égard au savoir qui est visé. Il est donc possible que le professeur doive intervenir, à tout le moins pour écarter ces éléments pris isolément, et selon, pour engager une reconnaissance tournée vers les transformations de mouvement et les programmes de calcul équivalents.

Cependant, la prise en compte du lien entre les membres de gauche et de droite, et entre les nombres peut conduire les élèves à une première recherche de pattern commun spontanée, d'autant que les productions des écritures lors des séances précédentes peuvent soutenir cette interprétation de la consigne pour dépasser les simples reconnaissances sémiotiques primaires. Comme nous l'avons vu précédemment, la mémoire didactique des situations antérieures, et des milieux construits peut jouer ce rôle. Ainsi peut-on envisager des formulations intermédiaires comme « dans chaque membre de droite, on multiplie le facteur du membre de gauche par chacun des termes entre parenthèses » ou plus instanciées, c'est-à-dire qui mentionnent des nombres particuliers.

Le scénario ne prévoit pas d'interventions spécifiques de l'enseignant. Pourtant, il n'est pas certain que cette mémoire didactique des séances précédentes affleure spontanément. Il est donc possible que le professeur soit amené à provoquer ce passage dans l'une ou l'autre des dimensions, en référence aux milieux des situations précédentes par exemple. Plus encore, nous avons vu que, compte tenu des spécificités des techniques alors mises en œuvre, les discours susceptibles d'émerger devraient être, du côté sémio-linguistique, comme du côté mathématique (avec les programmes de calculs) lacunaires, c'est-à-dire qu'ils ne devraient prendre en compte que l'un ou l'autre des membres de l'égalité. Nous supposons que le discours émergeant spontanément soit de nature double, sans pour autant décrire ou interpréter complètement dans l'une ou l'autre des dimensions l'ensemble de l'écriture. Ainsi il apparaît improbable qu'une désyncrétisation (des dimensions sémio-linguistique et mathématique) advienne sans l'intervention du professeur. Celles-ci auront donc pour fonction de délimiter et compléter les discours dans les dimensions sémio-linguistique et mathématique. La construction d'un discours méta-mathématique ne sera que collaborative : la raison d'être du travail proposé est celui d'une unification dont les raisons ne sont pas dévoilées aux élèves, pas plus que la forme idoine sous laquelle elle peut se réaliser quant aux *praxis* anciennes de calcul mental et posé. L'élucidation des techniques sémio-linguistiques ne répond pas à un problème mathématique usuel, dans le sens où il s'agit d'une ré-organisation des connaissances qui est visé, et un degré de complétude plus grand des praxéologies afférentes. Il restera à questionner la contingence du point de vue de la nature des interventions, des possibles effets de contrat et de leur influence sur le savoir et en particulier de pister en quoi elles peuvent vider ou non les contenus mathématiques visés au moment de l'analyse *a posteriori* de cette situation.

Le second type de tâche consiste à produire une égalité à partir d'un produit de deux nombres entiers donné, relevant de la même « chose commune » c'est-à-dire à la fois de la même transformation de mouvement ou de la même équivalence de programmes de calcul. Les formulations étant *a priori* très incomplètes, la praxéologie afférente est toutefois en construction.

Ce type de tâche conduit à mettre à l'épreuve l'embryon technologique constitué par les premiers discours descriptifs élaborés autour des égalités, au regard de sa fonction potentiellement productrice. Il réalise de fait un moment exploratoire de la technique de production d'égalités jusque-là contextualisées par les ostensifs (scripturaux et discursifs) accompagnant les calculs. Rappelons toutefois que nous avons vu plus haut le rôle de la mémoire didactique des situations antérieures, et par suite, l'importance des interventions du professeur pour assurer que les élèves s'emparent de l'utilisation de l'embryon technologique élaboré.

Le troisième type de tâche est mathématique, il a été mis en œuvre lors de la séance précédente : il s'agit de vérifier une égalité. Rappelons que la technique consiste à exécuter les programmes de calculs écrits dans chaque membre de l'égalité avant d'en comparer les résultats. La technologie repose sur la relation d'équivalence qu'est l'égalité, mais aussi sur des connaissances des règles d'écritures et de priorités des opérations. La description de la technique pourra aboutir à envisager les écritures comme celles de programmes de calcul équivalents et non plus seulement comme production d'une transformation de mouvement[45]. Cette vérification a donc pour rôle de servir de levier pour le professeur pour modifier le discours technologique élaboré jusque là et dissocier les aspects manipulatoires (pour la production d'égalité, technique des gestes) et mathématiques (l'équivalence des programmes de calcul) sans en rompre la dialectique.

Nous terminons notre analyse en revenant sur l'ensemble des praxéologies construites ou en constructions jusqu'ici afin d'en montrer les articulations et les réorganisations qui s'opèrent tout au long des situations. Cette étude nous sert de synthèse intermédiaire des analyses précédentes, avant de passer à l'analyse de la situation d'institutionnalisation qui s'y appuiera.

Reprenons tout d'abord une description succincte des praxéologies anciennes de calcul de produits :

T_{calc_m} : Calculer mentalement le produit de deux entiers

> $\tau_{calc\_m}^{+}$: Décomposer l'un des facteurs sous la forme d'une somme puis calculer la somme des produits de l'autre facteur par chacun des termes.
> $\tau_{calc\_m}^{-}$: Décomposer l'un des facteurs sous la forme d'une différence, puis calculer la différence des produits de l'autre facteur par chacun des termes.
>
> θ_{calc_m} : discours descriptif instancié, connaissance des nombres.

T_{calc_p} : Calculer, en posant, le produit de deux entiers

> $\tau_{calc\_p}^{+}$: Combinaison de $\tau_{calc\_m}^{+}$ plus ou moins morcelée de produits et de sommes chiffres par chiffres.

[45] Notons que nous parlons de transformation de mouvement, alors qu'elle est ici en construction puisque la technologie mathématique n'est pas *a priori* tout à fait identifiée, tout comme ne le sont pas encore tout à fait les fonctions syntaxiques sur lesquelles elles opèrent. Il s'agit plutôt d'embryon de transformations de mouvement.

θ_{calc_p} : discours descriptif instancié de produits et de sommes chiffres par chiffres, éléments liés à la numération décimale de position.

Ces deux praxéologies sont des praxéologies ponctuelles. L'enjeu de l'ingénierie est à la fois de compléter ces praxéologies et donc d'enrichir, et modifier les éléments technologiques, afin que la technologie puisse assurer notamment sa fonction justificatrice, et dans un même mouvement, de construire une organisation mathématique locale, c'est-à-dire d'unifier les organisations mathématiques ponctuelles précédentes *via* cette technologie. Nous allons voir comment, les praxéologies auxquelles les élèves sont confrontés, vont pouvoir nourrir et modifier les organisations de connaissances, en les complexifiant, c'est-à-dire en y agrégeant d'autres praxéologies. Nous structurons notre propos en un certain nombre de phases, qui sont prévues par le scénario et qui correspondent à des délimitations temporelles (certaines amorcent aussi un passage d'une situation à une autre, mais pas toutes).

Première phase : création de nouveaux ostensifs pour θ_{calc_m} et θ_{calc_p}

Cette phase véhicule un double enjeu : celui d'un nouveau formalisme à même de porter une unification future des technologies, et celui d'une recomposition des technologies anciennes évacuant en particulier les éléments de numération susceptibles d'y faire obstacle.

La praxéologie $\wp_{écrire=}$ alors à l'œuvre est la suivante:

$T_{écrire\ =}$:Ecrire une égalité pour décrire les techniques de calcul de T_{calc_m} et T_{calc_p}

$\tau_{écrire=/traduc}$: Traduire les formulations rhétoriques (avec ostensifs discursifs et graphiques de différente nature pour le calcul mental et posé) en écritures symboliques de programmes de calculs portant sur des nombres pour l'écriture de l'un des deux membres de l'égalité, puis pour le second, écrire l'un des facteurs comme une somme ou une différence des facteurs utilisés pour les produits partiels identifiés.

Cette praxéologie introduit une contrainte portant sur la forme qui oblige notamment à reconstituer, c'est-à-dire identifier chaque ligne des calculs posés comme produits partiels de nombres. Elle provoque une description alternative des techniques, mais qui n'est pas sans lien avec les technologies initiales. Etant donné le mode de production de ces égalités, nous ne pouvons à ce stade interpréter les égalités comme technologie alternative effective, c'est-à-dire vécues comme telles par les élèves, des praxéologies de calcul. Ce sont de nouveaux ostensifs pour les technologies anciennes (embryons technologiques) qui restent instanciés, c'est-à-dire fortement liés aux spécimens des types de tâches, autrement dit, aux nombres dont on calcule les produits. C'est aussi une nouvelle description du modèle d'action.

La fonction du type de tâche suivant est ambivalente :

$T_{vérifier\ =}$:Vérifier une égalité entre deux expressions numériques.

La vérification peut en effet porter à la fois sur la conformité de la traduction, et donc sur les écritures en référence aux ostensifs supports de $T_{écrire\ =}$, et à la fois sur la validité mathématique de l'égalité. La première n'est pas entièrement indépendante de la seconde comme nous l'avons vu plus haut. Mais le rôle essentiel de cette nouvelle praxéologie est celle que véhicule la technique qui sera mise en œuvre :

> $\tau_{vérifier=}$: Exécuter les programmes de calcul écrits dans chaque membre de l'égalité puis comparer les résultats : l'égalité est vraie si les résultats sont égaux.

Cette technique engage en effet à réinterpréter les écritures de chaque membre de l'égalité comme des écritures de programmes de calcul, exécutables. Ce qui permet une première décontextualisation du mode de production des écritures, en particulier pour les membres comme $7 \times (30 + 2)$ où la somme est *a priori* construite comme une autre écriture de nombre et non comme programme de calcul. 30+2 doit être calculé, cela donne 32 et on effectue 7×32 pour évaluer ce membre d'égalité. L'écriture possède donc, de façon cruciale, une double interprétation : celle d'un produit dont on a modifié l'écriture de l'un des facteurs (on a donné une écriture décomposée du nombre), et celle d'un programme de calcul (on additionne puis on multiplie). On voit là s'élaborer *a priori* un jeu essentiel entre structure d'expression, dimension sémio-linguistique et dimension mathématique. Les nouveaux ostensifs des égalités associés aux technologies initiales, véhiculant cette double interprétation et l'idée de relation d'équivalence, seront aux fondements de la construction d'une technologie alternative et unificatrice pour les praxéologies de calcul. Celle-ci passe par une modification de la praxéologie liée au type de tâche d'écriture des égalités, en explorant à la fois une nouvelle technique, indépendante des praxéologies de calcul, et en questionnant sa légitimité, réalisant par là une nouvelle décontextualisation.

Deuxième phase : modification de $\wp_{écrire=}$ et embryon de θ_{calc}

L'enjeu des organisations suivantes est de construire une nouvelle technologie des praxéologies de calcul fondées par les égalités construites précédemment. D'une part, les égalités sont instanciées, non seulement par leurs techniques de production, mais encore par le fait qu'elles portent sur des nombres particuliers. D'autre part, les discours anciens θ_{calc_m} et θ_{calc_p} ne sont plus tout à fait idoines au regard des égalités. Pour que ces égalités fonctionnent comme technologie, il reste à reconstruire les discours afférents, et à construire des techniques décontextualisées d'écritures de ces égalités, donc à élaborer une nouvelle praxéologie $\wp_{écrire=}$.

$T_{Description}$: Décrire « une chose commune »

Ce genre de tâche relève en réalité d'une certaine activité de modélisation d'un système constitué des égalités données par le professeur et construit une première étape d'unification et de discours. Nos analyses conduisent à penser que ce discours sera *a priori* construit d'un conglomérat d'éléments parcellaires, relatifs à la transformation de mouvement encore en chantier et à l'équivalence de programmes de calcul. Il ne prendra le statut d'embryon technologique pour $\wp_{écrire=}$ qu'à partir du moment où le professeur engagera les élèves à se confronter à $T_{écrire=}$ avec ce discours pour en faire émerger une nouvelle technique. Un certain nombre de produits sont donc proposés aux élèves dont on demande d'écrire une égalité avec les premières descriptions produites collectivement. Ce moment exploratoire pourra permettre de mettre en évidence les insuffisances du discours élaboré (lacunaire), à condition que le professeur engage les élèves à décrire les gestes de production d'écriture, c'est-à-dire de la transformation de mouvement. Dans la dimension sémio-linguistique, le rôle du professeur est prégnant, il est garant, en toute fin de la conformité des écritures au discours. En revanche, dans la dimension mathématique, c'est-à-dire au moment des tâches de vérifications, les descriptions des programmes de calcul sous forme rhétorique, même si elles sont faites à la demande du professeur, pourront être un point d'appui essentiel pour unifier, c'est-à-dire généraliser les programmes de calculs numériques.

La praxéologie en chantier $\wp_{écrire=}$ est alors modifiée de la façon suivante :

$T_{écrire\,=}$:Ecrire une égalité pour décrire les techniques de calcul de T_{calc_m} et T_{calc_p}

> $\tau_{écrire=}$: transformation de mouvement (jeux d'écritures) / Utiliser les descriptions issues de $T_{Description}$
>
> $\theta_{écrire=}$: équivalence de programmes de calcul non encore généralisées, partielles issues de $T_{Description}$

Cette praxéologie encore inaboutie n'a toujours pas entièrement de fonction technologique pour les praxéologies de calcul initiales. Pour ce faire, la décontextualisation doit se poursuivre à deux niveaux : celui de $T_{Description}$ et de $\tau_{écrire=/traduc}$. C'est ce qu'apportera la question de la généralisation, et la création d'un environnement théorique avec les écritures *in extenso* des produits définis par addition itérée et regroupement des termes par associativité de l'addition.

Troisième phase : généralisation des entiers …

Cette phase est entièrement prise en charge par le professeur. Elle est présentée comme une composante technologico-théorique de $\wp_{écrire=}$. La preuve repose sur la définition de la multiplication par addition itérées d'entiers, sur l'associativité de l'addition. Ces composantes font partie des connaissances anciennes des élèves de primaire, de sorte que la convocation par le professeur semble *a priori* suffisante pour que les élèves adhèrent au caractère justificateur des manipulations.

Ainsi $\wp_{écrire=}$ est en partie complétée au niveau technologico-théorique : la technologie est encore insuffisante pour décrire véritablement la technique, mais elle est enrichie de la preuve sur un exemple générique :

$T_{écrire\,=}$:Ecrire une égalité pour décrire les techniques de calcul de T_{calc_m} et T_{calc_p}

> $\tau_{écrire=}$: transformation de mouvement (jeux d'écritures) / Utiliser les descriptions issues de $T_{Description}$
>
> $\theta_{écrire=}$: équivalence de programmes de calcul partiellement décrites, issues de $T_{Description}$, justification sur l'exemple générique.
>
> $\Theta_{écrire=}$: Définition de la multiplication comme addition itérée sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, et commutativité de l'addition sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Cette phase est une amorce de la situation d'institutionnalisation suivante comme nous allons le voir maintenant.

3.1.4 Analyse a priori de la situation d'institutionnalisation

L'enjeu de cette situation consiste à faire élaborer véritablement la composante technologique θ_{calc} des praxéologies anciennes de calcul, et ainsi de les unifier, à partir de l'ensemble des praxéologies construites dont nous venons de faire la synthèse. Cette situation finalise la réorganisation des praxéologies dans un mouvement d'unification (de T_{calc_m} et T_{calc_p}), de généralisation et de formalisation (de l'embryon technologique construit lors de la situation précédente). Le scénario prévoit tout d'abord que le professeur pose la question de l'extension de l'embryon technologique prouvé sur les entiers, à d'autres types de nombres, déjà connus, que sont les nombres décimaux et rationnels. Après l'avoir admis, les élèves sont engagés à produire, sous la conduite du professeur, et à partir du formalisme embryonnaire élaboré lors de la situation précédente, plusieurs formalismes nouveaux : deux formalismes rhétoriques[46] et un formalisme algébrique. Ces formalismes confèrent le statut de savoir aux connaissances construites précédemment. En cela, il s'agit d'une situation d'institutionnalisation. Plus encore, la phase suivante de la situation insère la propriété au sein des praxéologies de calcul. Rappelons qu'elle est advenue au moyen d'autres praxéologies, de sorte que cette phase est cruciale pour l'unification visée. Ainsi les connaissances construites sont-elles structurées et réorganisées dans le sens où cette situation voit l'émergence d'une propriété permettant de décrire et justifier les techniques de calcul. Ceci conduit à la genèse des premières véritables transformations de mouvement, articulant les dimensions mathématique et sémio-linguistique. Les élèves sont en effet confrontés à des types de tâches de calcul, numérique et algébrique les engageant. Enfin, le mouvement de généralisation et d'unification s'achève par la prise en compte d'égalités dans le sens de la factorisation, et d'autres engageant des soustractions. Les élèves sont alors de nouveau confrontés à $T_{Description}$ et $T_{écrire\ =}$ pour insérer dans les praxéologies élaborées les extensions afférentes de la technologie (et étendre conséquemment les praxéologies elles-mêmes). Bien que cette situation soit une situation d'institutionnalisation, avec des phases de dé-contextualisation (élaboration de la propriété et généralisations) et de re-contextualisation (calculs), nous nous situerons tout de même dans le cadre de la théorie anthropologique pour analyser cette situation. En effet, la constitution du savoir se fait dans une complexification fine et très particulière d'un certain nombre de praxéologies, qui ne sont pas toutes de nature mathématique, et qui s'étendent et se complètent au fur et à mesure de l'avancée de l'étude, et de l'activité de l'élève. Les dé-contextualisations et re-contextualisations prévues par le scénario ont pour rôle de façonner la composante technologique qui émerge, et d'amener les élèves à l'intégrer dans les praxéologies numériques anciennes, ce qui conduit à les unifier. Les outils de la théorie anthropologique nous semblent dès lors particulièrement adaptés pour pister la façon dont les recompositions se jouent dans l'activité de l'élève, et les conséquences de ces réorganisations sur la forme du savoir (les unification, les formalisations et généralisations).

Nous revenons à la troisième phase sur laquelle nous avons terminé l'analyse précédente, pour la compléter, et ainsi l'intégrer dans cette situation d'institutionnalisation.

---

[46] L'un repose sur des descriptions de programmes de calcul, et leur équivalence, l'autre sur la structure des expressions algébriques, ce qui renvoie à la description d'une transformation de mouvement par les fonctions syntaxiques. En cela, nous nous approchons des aspects procédural et structural au sens de Sfard (1991)

Troisième phase : généralisation des entiers … à d'autres types de nombres

Le scénario prévoit que le professeur pose la question du domaine de validité de la technique pour écrire des égalités avec d'autres types de nombres. Il s'agit d'une première extension envisagée, qui interroge à la fois la généralisation de la technologie, ou de l'équivalence des programmes de calcul, et la généralisation de la théorie, c'est-à-dire du type de preuve. Si pour des produits de décimaux par un entier, on peut envisager une justification proche, ce n'est plus le cas pour des rationnels. En outre, la question peut être évoquée pour des nombres relatifs, mais comme la construction de la multiplication n'aura lieu qu'en 4^e, elle ne saurait être à l'étude.

Le choix fait par le scénario consiste à évacuer la question de la preuve sur d'autres types de nombres, en particulier sur les rationnels (alors qu'elle peut se déduire de la distributivité sur les nombres entiers comme nous l'avons vu au chapitre précédent), pour admettre l'extension. Ce choix est questionnable, mais il peut *a priori* maintenir la tension entre les organisations mathématiques qui se construisent, s'agrègent ou se complètent.

L'intervention du professeur posant la question de l'extension modifie une nouvelle fois la praxéologie $\wp_{\textit{écrire=}}$ en la détachant des praxéologies de calcul. Lorsqu'il pose la question de la validité de $\tau_{\textit{écrire=}}$ pour d'autres types de nombres, il sous-entend alors que cette technique puisse s'étendre à un type de tâche plus large dont relèverait le type précédent, c'est-à-dire qu'il inclut de fait cette praxéologie dans une possible organisation mathématique locale qui pourrait s'énoncer de la façon suivante :

$T_{\textit{écrire =}}$: Ecrire une égalité relevant d'une certaine transformation de mouvement (fondée sur la distributivité en réalité)

> $\tau_{\textit{écrire=}}$: transformation de mouvement (jeux d'écritures) / Utiliser les descriptions issues de $T_{\textit{Description}}$
>
> $\theta_{\textit{écrire=}}$: équivalence de programmes de calcul partiellement décrites, issues de $T_{\textit{Description}}$, justification sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, admise sur $\mathbb{D}\times\mathbb{D}$ puis sur $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

Des exemples sont prévus par le scénario pour engager les élèves dans une extension praxémique sur d'autres types de nombres avant d'admettre leur généralité.

Quatrième phase : explicitation d'un théorème

Le scénario prévoit ensuite que les élèves soient engagés, sous la direction du professeur, à reprendre la formulation embryonnaire établie pour en construire une, qui soit celle d'une propriété mathématique, établie en partie, pour les nombres entiers, et admises pour les autres nombres. Les formulations attendues sont les suivantes[47] :

---

[47] La seconde formulation ne mentionne pas le nombre de termes, tandis que la première le limite à deux. Ceci est en accord avec l'analyse que nous avons faite précédemment du choix d'égalités ne montrant pas l'extension possible à trois ou quatre termes par exemple. Le premier formalisme n'inclue pas toute la généralité possible. Nous verrons dans les analyses *a posteriori* comment l'extension pourra avoir lieu. Notons simplement que cette formulation puisse alors être considérée comme intermédiaire (ce qui n'est pas anormal, le formalisme doit pouvoir évoluer en fonction de l'évolution du savoir, et l'institutionnalisation retouchée).

Ajouter deux nombres puis multiplier par un autre est équivalent à multiplier chaque terme par cet autre nombre avant d'ajouter les produits.

Le produit d'un nombre par une somme est égal à la somme des produits par chacun des termes.

La double formulation a pour fonction à la fois de décrire la technique et de créer un discours raisonné, qui puisse assurer une fonction justificatrice dans la dimension mathématique. La formulation en termes d'équivalence de programmes de calculs en relève. Le scénario envisage que la formulation puisse émerger en collaboration entre élève et professeur. Néanmoins les difficultés de formulation sont *a priori* nombreuses. Tout d'abord, la notion d'équivalence est nouvelle, et les élèves n'ont *a priori* jamais rencontré de formulation de ce type. Ensuite, la formulation rhétorique d'un programme de calcul écrit sous forme symbolique est *a priori* peu familière[48], et la formulation attendue a ceci de spécifique, qu'elle demande non pas de décrire un programme de calcul numérique (s'appuyant sur les nombres) mais le programme de calcul mathématisé (dont les nombres sont considérés comme paramètres) : il y a une généralisation, ou une dé-contextualisation, que le discours doit porter, c'est-à-dire que la modélisation se réalise dans la description. Plus encore la formulation fondée sur les natures et fonctions syntaxiques demande des reconnaissances de formes, de structure des expressions, dont on sait que, même si un travail antérieur a été réalisé en début d'année dans les classes, les techniques posent difficulté aux élèves. On peut donc anticiper des interventions fortes du professeur.

Toutefois, ainsi que nous l'avons décelé lors des analyses précédentes, les praxéologies construites par les élèves dans les situations antérieures, paraissent revêtir des potentialités importantes, pour se constituer comme levier, à la fois pour les élèves dans leur tâche, et pour les interventions didactiques de l'enseignant. Nous résumons ci-après deux éléments susceptibles *a priori* de jouer un rôle fondamental.

Mathématisation des programmes de calculs préparées par les descriptions de $\tau_{vérifier=}$

Nous avons vu que les écritures de sommes de produits partiels devraient être *a priori* interprétées comme des programmes de calcul, compte tenu de $\tau_{écrire=/traduc}$ issues des praxéologies de calcul. Les vérifications de $\tau_{vérifier=}$ demandent d'interpréter de même les écritures de l'autre membre de l'égalité comme des programmes de calcul. Le professeur ayant *a priori* demandé de décrire les programmes de calculs instanciés pourra donc s'appuyer sur cette mémoire de la situation pour faire évoluer les discours vers une description plus générale, et faire émerger un modèle des programmes de calculs arithmétiques. La distance ne semble donc pas trop grande.

Evitement d'une difficulté de reconnaissance de forme préparé par T_{calc_p} *et* T_{calc_m}

La situation initiale de calculs de produits sert *a priori* toujours de référence aux constructions des praxéologies suivantes. Nous avons vu comment une double interprétation des écritures

[48] L'étude d'Assude, Coppé, Pressiat (2012) que nous avons déjà mentionnée, révèle en effet la faible présence de ces objets dans les manuels analysés.

doit pouvoir coexister dans une dialectique entre les dimensions linguistiques et mathématiques, en particulier pour les écritures de sommes. Ceci conduit à supposer que la mémoire de la production des écritures comme $7 \times (30 + 2)$ joue un rôle essentiel en permettant d'éviter un travail de reconnaissance de forme : 30 + 2 est une autre écriture de 32. Ainsi $7 \times (30 + 2)$ pourra *a priori* être considéré comme l'écriture d'un produit dont on a changé d'écriture l'un des facteurs, et donc être reconnu comme produit, sans convoquer des praxéologies anciennes ou altières d'identification de structure d'expression, possiblement fastidieuses et détournant de l'enjeu de la situation. Il restera bien sûr à identifier $7 \times 30 + 7 \times 2$ comme somme de produits partiels. Il est toutefois *a priori* possible que les premières égalités construites par les groupes comme sommes des résultats des produits partiels permettent également d'interpréter ces écritures comme sommes, mais cela relèvera plus certainement de la contingence, (certains groupes auront pu écrire directement les sommes de produits).

On voit donc que la mémoire didactique des praxéologies construites en amont peut être essentielle pour l'émergence des formulations, de sorte que les interventions de l'enseignant, si elles sont importantes, doivent pouvoir se nourrir de cette mémoire, pour guider un véritable travail collectif, en maintenant la tension entre les dimensions mathématiques et linguistiques.

A l'issue de ce travail, $\mathcal{P}_{écrire=}$ est relativement complète, les descriptions de techniques et le discours technologique sont construits. Le scénario prévoit alors l'introduction du symbolisme algébrique comme support de mémorisation des formulations portant une certaine généralité. Il s'agit d'écrire sous forme symbolique le théorème, c'est-à-dire l'équivalence des deux programmes de calculs mathématisés : $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$. L'écriture se fait *a priori* à partir de la seconde formulation, et, pour maintenir la tension entre les différents formalismes, le scénario prévoit de demander aux élèves de pouvoir interpréter l'écriture symbolique doublement, comme le support des deux formulations rhétoriques. Ces trois formalismes sont désignés comme ceux d'un théorème.

La question qui demeure alors est celle de l'articulation de la praxéologie $\mathcal{P}_{écrire=}$ dans les organisations mathématiques de calcul, et de l'inclusion du théorème comme élément technologique, qui font l'objet de la cinquième phase que nous allons voir maintenant.

Cinquième phase : re-contextualisation et première unification des praxis anciennes

Il s'agit de proposer aux élèves d'effectuer des calculs de produits, autrement dit, de se confronter à de nouveaux spécimens de T_{calc_m}, engageant *a priori* $\tau_{calc\_m}^{+}$ (compte tenu des variables). Il leur est de plus demandé de justifier leur technique par des égalités. Les calculs à exécuter sont 34×102 puis 57×6. Ce faisant, le scenario impose les égalités comme nouvelle technologie des calculs. Il modifie donc les praxéologies de calcul par contrat, mais provoque une occasion d'évaluer la fonction potentiellement technologique de la praxéologie précédemment construite, ainsi que de sa fonction descriptrice. En effet, pour que les anciennes technologies soient écartées, il semble inévitable que la contrainte d'écriture des égalités soit posée. Des interventions du professeur sont prévues pour assurer la tension entre les dimensions mathématiques et sémio-linguistique. Celles-ci doivent engager les élèves, d'une part, à décrire les programmes de calculs numériques à l'occasion des vérifications, et à assurer les équivalences par le théorème, et d'autre part, à décrire les transformations de mouvement mises en œuvre (les manipulations à l'aide des fonctions syntaxiques). Reprenons la praxéologie alors en jeu :

T_{calc_m} : Calculer mentalement le produit de deux entiers

> $\tau_{calc\_m}^{+}$: Décomposer l'un des facteurs sous la forme d'une somme puis calculer la somme des produits de l'autre facteur par chacun des termes.
>
> θ_{calc_m} : Egalités issues du théorème (et dont participe $\mathcal{P}_{écrire=}$)

Le choix des valeurs des variables didactiques du second produit 57 × 6, a pour fonction de s'assurer que le théorème résiste (c'est-à-dire que la formulation résiste) à une décomposition à gauche du signe de la multiplication et que ne donne plus à voir l'écriture algébrique. L'écriture algébrique porte moins d'extension possible *a priori*.[49]

La seconde consigne donne un nouveau type de tâche à accomplir, qui consiste à compléter les égalités suivantes :

$$6 \times (a + 4) =$$

$$5 \times (7 + b) =$$

$$(3 + a) \times 4 =$$

$$36 \times 235 =$$

Les trois premières modifient encore en l'étendant une partie de $\wp_{écrire=}$. Il s'agit d'une partie seulement, car le premier membre n'est pas ici à produire. C'est une extension praxémique fondée sur le théorème, et, parallèlement, une recontextualisation partielle de ce théorème en lien avec son écriture symbolique. La rupture avec le sens de l'égalité (comme annonce de résultat) ayant déjà eu lieu dans le domaine numérique, on peut *a priori* penser que ces égalités soient interprétées comme écritures d'équivalences de programmes de calculs, ce qui est soutenu par l'une des formulations rhétoriques.

La dernière égalité a pour rôle *a priori* d'évaluer la robustesse du théorème à une adaptation de technique portant sur le nombre de termes. Etant donné la diversité des écritures *a priori* produites lors de la situation de production d'égalités, il est très probable qu'au moins une écriture avec une somme de trois termes apparaisse dans la classe.

Toutefois, il n'est pas du tout sûr que la formulation du théorème ne mentionne pas le nombre de termes (deux), comme le prévoit d'ailleurs l'une des formulations du scenario. Un double travail devrait alors s'engager. Le premier consiste à légitimer pour ce spécimen l'extension

[49] On pourrait alors interroger le rôle des écritures si leurs propriétés ne sont pas questionnées (en particulier celle de la substituabilité) pour porter les extensions que l'on souhaite. Ce questionnement est absent du scénario. Nous y reviendrons dans le dernier chapitre de cette thèse.

praxémique de $\tau_{écrire=}$ (une vérification suffit), le second doit s'attacher à la question de l'extension de la technologie, par un moment de retour sur la composante théorique. Cette dernière, si elle légitime à son tour le caractère général de l'extension, peut exiger de retoucher la technologie, dans sa formulation à la fois rhétorique et algébrique. De nouveau, un questionnement des propriétés des écritures algébriques devrait alors émerger, mais comme nous l'avons vu plus haut, le scénario ne le prévoit pas, tout comme n'apparaît pas celui de l'extension à un nombre quelconque de termes.

Sixième phase : unification et fonction productrice de la technologie

La phase suivante a pour enjeu la fonction productrice de la technologie élaborée : le théorème peut-il servir à créer de nouvelles techniques pour d'autres types de tâches, à savoir calculer mentalement des sommes de produits ayant un facteur commun ?

Le choix fait par le scénario n'est pas de rentrer dans une nouvelle praxéologie pour ce faire, mais de retourner sur $T_{Description}$ au préalable. Ceci est en lien avec l'objectif d'une unification des types de tâches de développements et de factorisation, c'est-à-dire que le projet global d'enseignement guide ce choix. Les égalités proposées sont les suivantes :

$$50 \times 16 + 16 \times 8 = (50 + 8)\times 16$$

$$30 \times 7 + 2 \times 7 = (30 + 2) \times 7$$

$$(25 \times 9) + (25 \times 10) = 25 \times (10 + 9)$$

De la même façon que pour les premières égalités données à observer, les termes et facteurs communs ne sont pas répertoriés géographiquement pour favoriser *a priori* une reconnaissance et un discours tournés vers les fonctions syntaxiques.

La justification des égalités peut se faire de deux manières : soit par effectuation des programmes de calculs écrits de part et d'autre, donc en mettant en œuvre $\tau_{vérifier=}$ soit en utilisant le théorème et le fait que la dénotation d'une égalité ('Vrai') n'est pas modifiée par la transformation de mouvement $A = B \xrightarrow{échange} B = A$. Compte tenu du fait que le scénario prévoit de confronter les élèves à $T_{Description}$ il est *a priori* plus probable que ce soit cette deuxième justification qui apparaisse, d'autant qu'il est prévu que le professeur demande le lien entre ces égalités et les précédentes.

A la suite de cette identification et de la justification, $\mathcal{P}_{écrire=}$ est alors dissociée et apparaissent deux sous-types de tâches : écrire dans le sens du développement et écrire dans le sens de la factorisation. Les élèves sont alors confrontés au second sous-type de tâche, en abordant les calculs 35 × 98 + 35 × 2 et 2,34 × 7 + 2, 34 × 3 proposés par le professeur pour chercher l'intérêt de ce sens d'écriture. Cependant, pour chacun de ces calculs, il est possible que la technique $\tau_{calc\_m}^{+}$ soit mise en œuvre, comme par exemple pour le premier produit de 35 × 98 + 35 × 2. Ceci aboutirait à un calcul du type 35×90+35×8+35×2 éventuellement plus morcelé en décomposant 35 en 30+5. Compte tenu de la consigne qui est d'utiliser l'autre sens de l'écriture de l'égalité, il est *a priori* probable qu'au moins un élève cherche à calculer

35×100. La technologie unifie alors deux types de tâches calculatoires, et les deux sous-types de tâches de $\mathcal{P}_{écrire=}$. C'est ce qu'il est prévu d'institutionnaliser à ce moment-là.

A ce stade se trouvent ainsi complétées les organisations mathématiques de calcul, au niveau technologico-théorique pour les additions, et unifiées $T_{calc\ m+}$ et $T_{calc\ p}$ (le cas des soustractions étant exclu). Un nouveau type de tâche a été agrégé : celui du calcul mental de somme de produits ayant un facteur commun.

Septième phase : unification et émergence d'une organisation mathématique locale

De la même façon que précédemment, le scenario prévoit que les élèves soient confrontés à un ensemble d'égalités produites par les groupes, reposant sur la distributivité de la multiplication par rapport à la soustraction. L'enjeu est de nouveau celui de l'unification, et les élèves doivent de nouveau accomplir $T_{Description}$. Les formulations construites lors de l'élaboration du théorème doivent pouvoir servir de point d'appui pour les élèves, de même que précédemment pour les égalités relevant de factorisations. Ceci conduit à unifier les types de tâche de calcul de produits, mental et posé, en incluant $\tau_{calc\_m}^{-}$, mais aussi de nouveaux types de tâche de calcul mental de somme ou de différences de produits ayant un facteur commun. La technologie de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition ou à la soustraction revêt alors un aspect unificateur, qui permet d'organiser les praxéologies anciennes et nouvelles au sein d'une organisation mathématique locale de calcul.

Nous allons maintenant aborder les analyses *a posteriori*.

3.2. ANALYSES A POSTERIORI DES SITUATIONS D'INTRODUCTION DE LA DISTRIBUTIVITE COMME NOTION FUG

Rappelons que les analyses qui suivent concernent l'expérimentation menée dans l'une des deux classes de 5e où elle a eu lieu. Il s'agit d'une classe ordinaire, d'un collège ordinaire. Les élèves sont au nombre de 28, mais nous n'avons obtenu l'autorisation d'enregistrement des interventions ou de reproduction des écrits que pour 24 d'entre eux. Nos données sont constituées d'enregistrements audio ou vidéo de cinq séances correspondant aux situations de calcul de produits, de production d'égalité, de formulation et d'institutionnalisation. Elles sont complétées par le relevé des productions d'égalités des groupes lors de la seconde séance, ainsi que des photocopies d'une quinzaine de cahiers, donnant accès aux traces écrites des élèves tout au long de leur travail lors des cinq séances. Nous disposons également de deux copies de la synthèse qui sera réalisée plus tard par le professeur. Enfin, nous avons photocopié des extraits de 21 copies, correspondant au devoir donné en fin d'étude par le professeur. Nous n'avons pas de donnée quant aux trois copies manquantes. Nous reprenons la structure de nos analyses *a priori* en fonction des situations, de façon à pouvoir les comparer, et pister l'émergence effective des caractères formalisateur, unificateur et généralisateur de la distributivité. Nous analyserons en particulier les dialectiques qui apparaîtront, comme nous le verrons, entre les dimensions mathématique et sémio-linguistique, dans l'activité des élèves. La finesse de ces dialectiques, et de leur émergence, qui peut se dérouler sur un temps assez long, nous amène à conduire des analyses *a posteriori* particulièrement détaillées, notamment pour les situations de formulation et d'institutionnalisation. Nous avons néanmoins fait le choix de les présenter ici dans leur intégralité car les articulations entre sémantique, syntaxique, mathématique ou para-mathématique se jouent subtilement dans les interventions comme dans les écrits des élèves. Compte tenu de notre analyse *a priori*, et afin de lui comparer notre analyse *a posteriori*, nos outils d'analyse sont ceux de la théorie anthropologique du didactique (pour modéliser l'activité de l'élève), et ceux de la théorie des situations didactiques (pour ce qui est notamment du rôle des variables didactiques). Nous nous appuierons par ailleurs sur les outils de l'analyse épistémographique afin de préciser dans quelle dimension sont pris les objets numérico-algébriques sur lesquels les élèves peuvent travailler, afin de pister la façon dont ces dimensions peuvent dialoguer, et de caractériser l'émergence de transformations de mouvement. Notons que ces outils apparaissent plus prégnants ici car les dialectiques reposent sur des interactions langagières que l'analyse *a priori* ne peut prévoir précisément, et dont le discours se construit peu à peu, à partir d'essais, et de retouches.

3.2.1 Analyse a posteriori de la situation de calculs de produits

La séance se déroule en deux temps. Les élèves sont disposés par deux. La première demi-heure est consacrée au calcul mental de produits écrits au tableau, avec une alternance de temps de recherche individuels et de corrections collectives. Les 20 minutes suivantes sont consacrées à poser des calculs de produits avec une phase de recherche individuelle suivie d'une phase de correction par deux et avec la calculatrice.

Tableau synoptique du déroulement

Temps (en min)	Tâches	Organisation / Phase	Techniques et éléments technologiques	Validation
1				
2				
3				
4				
5				
6	7 × 32 46 × 3 512 × 3	Recherche individuelle		
7				
8				
9		Correction collective	Programme de calcul : (7×3)×10 + 7×2 Technique posée fondée sur la numération « 2 fois 7 heu, 14 je mets le résultat je retiens 1, et7 fois 3, 21 plus 1, 22 et ça fait 224. » « j'ai fait 7 fois 2, j'ai mis en haut pour retenir la dizaine, j'ai fait 7 fois 3, 21 plus 1, 22 et ***j'ai pas ajouté*** 22 à 4, *j'ai mis à côté* […]: j'ai pris 1 à 4, j'ai ajouté 1 à 22, et 22 *je l'ai posé devant / là* »	Professeur
10			« j'ai fait 6 fois 3, 18 et on retient 1, et 4 fois 3, 12 et 1, 13. »	Professeur
11			« j'ai fait 3 fois 2, 6, 3 fois 1, 3 et 3 fois 5, 15 […]et j'ai tout mis » « 2 fois 3 ça fait 6, 10 fois 3, 30, et 500 fois 3, 150 […] 1500 »	Professeur
12	17 × 12 68 × 11 43 × 21	Recherche individuelle		
13				
14				
15		Correction collective	340 = 17×10×2 ? (seul le résultat est exprimé) 17×10 + 17×2	Ordre de grandeur pour rejeter puis professeur
16			68×10 + 11 = 691 68×10 + 68×1	« c'est pas plus 11 c'est plus 68 car 68 fois 1 »
17			149 ? 43×20 + 43	Ordre de grandeur
18	13 × 102 15 × 104 12 × 203 62 × 1001	Recherche individuelle		
19				
20				
21		Correction collective	13×100 + 13×2 1506 [technique erronée de retenue ? 13 fois 2, 26 je pose 6 je	Ordre de grandeur pour

			retiens 2 et 13 fois 1, et 13 +2 = 15 et ordre de grandeur]	1506
22			15×100 + 15×4	Professeur
23			12×200 ; 12×3 et juxtaposition / addition ?	Professeur
24			62×1000 + 62×1	
25	35 × 98 23 × 97 25 × 19 41 × 199	Recherche individuelle		
26				
27				
28		Correction collective	35×100 - 35×2	Professeur
29			2219 ? 9041 ? puis 941 2231 = 23×100 - 23×3 23×90 + 23×7 ? (supposée pour Mar)	Dernier chiffre Ordre de grandeur
30			275 = [25×10 + 25 ?] 245 = [2×1 concaténé à 9×5] 25×20 - 25	Professeur
31			41×200 – 41	
32	Poser des produits	Travail individuel		
33				
34				
35				
36				
37				
38				
39				
40				
41	Vérifier puis corriger en comparant avec son voisin	Travail par deux		
42				
43	Utiliser la calculatrice pour vérifier toute l'opération, pas que le résultat.			Calculatrice
44				
45				
46				
47				
48				
49	Mettre au propre les calculs	Individuel		

Techniques de calculs : obstacles et erreurs

Une amplification de la technique : une occasion manquée de recomposition ?

Le premier temps de correction collective met à jour une amplification de technique composée d'un sous-type de tâche, consistant à multiplier par 10. L'élève interrogé explique ainsi sa technique pour calculer 7×32 :

> « j'ai fait 7 fois 3 ça fait 21 / heu fois 10 ça fait 210 et après j'ai fait 7 fois 2 / 14 et j'ai additionné »

Sa technique s'exprime dans la dimension mathématique, il décrit par étape un programme de calcul numérique que l'on pourrait écrire de la façon suivante : $10 \times (3 \times 7) + 2 \times 7$. Il s'exprime directement dans la dimension mathématique et la technique repose bien sur des manipulations de nombres. L'amplification qu'il décrit relève d'un calcul simple, multiplier par 30 consiste à multiplier par 3 puis par 10. Nous supposions *a priori* que les amplifications n'auraient lieu qu'à l'occasion de calculs mettant en jeu des nombres ou des opérations insuffisamment familières pour nécessiter une description. Ce n'est vraisemblablement pas ce qui peut motiver ici la description. On peut donc rapprocher cette amplification des techniques (éventuellement posées) fondées sur la numération, soit l'élève peut essayer de recomposer, en cherchant à décrire sa technique par un programme de calcul, la technique des zéros pour multiplier par un nombre entier de dizaines (il décrit une multiplication par 30), soit il recompose la technique posée chiffre par chiffre en programme de calcul (ce qui est moins vraisemblable compte tenu du fait qu'il commence par le chiffre des dizaines : si tel était le cas, il devrait *a priori* plutôt commencer par le chiffre des unités dans sa description). Ce calcul intermédiaire peut néanmoins masquer le premier produit partiel. Le professeur n'interviendra pourtant pas pour le recomposer en 7 fois 30. Cette description aurait pu par ailleurs servir de levier pour faire le lien avec la technique faussement mentale consistant à poser c'est-à-dire à effectuer, avec retenues, des produits chiffres par chiffres. En effet, le chiffre 3 étant dans le programme de calcul comme nombre, le professeur aurait pu poser la question du lien entre les descriptions, et faire le lien entre 3 dizaines et le produit par 10. Pourtant, ni le professeur ni les élèves ne feront publiquement ce lien. La technique exposée ne semble pas élucidée pour tous : « beh c'est compliqué » entend-on dans le fond de classe, sans que cela soit relevé. A la demande de l'enseignant pourtant, une autre description de technique apparaît, qui, elle, repose sur la technologie de la numération et sera exprimée dans la dimension sémio-linguistique.

La technique de juxtaposition et retenues : un découplage des dimensions mathématique et sémio-linguistique.

Ainsi Art explique-t-il :

> Art : J'ai fait 2 fois 7 heu / 14 je mets le résultat je retiens 1 / et 7 fois 3 / 21 / plus 1 / 22 / et ça fait 224

Pour pousser l'élève à rentrer dans la dimension mathématique, le professeur fait mine d'interpréter son obtention de 224 par une addition qui serait celle des nombres annoncés (sans leur valeur interprétés comme nombres d'unités) 22 et 4, dont la somme est plutôt 26 :

> P : Mais attends, 22 et 4 ça fait pas 224 ça fait 26

L'élève ne perçoit pas les intentions du professeur, et répond que le « et » du professeur relève de l'addition alors que visiblement ce n'est pas ce qu'il fait, ce que tente d'élucider You en expliquant au professeur qu'il a posé :

> Art : Non mais / heu / c'est pour l'addition
> You : mais toi t'as posé
> P : Mais alors
> Art : ouais
> P : Mais 22 et 4 ça fait bien 26 / je vois pas comment ça fait 224
> Art : non mais j'ai posé

Ce que confirme Enz en clarifiant la chose : il n'a pas ajouté, il a mis à côté :

> Enz : moi j'ai fait pareil / j'ai fait 7 fois 2 / j'ai mis en haut pour retenir la dizaine / j'ai fait 7 fois 3/ 21 / plus 1 / 22 et j'ai pas ajouté 22 à 4 / j'ai mis à côté
> P : ah mais non / parce que c'est pas 22
> Enz : j'ai pris 1 à 4 / j'ai ajouté 1 à 22, et 22 je l'ai posé devant / là

On voit donc combien les praxis sont séparées pour ces élèves et combien il est difficile d'interpréter dans la dimension mathématique les pratiques de manipulations des chiffres : on les met à côté, et ce n'est clairement pas une addition. Le professeur rejette la description alors qu'elle est parfaitement légitime dans la dimension sémio-linguistique, et l'élève interprète ce fait, non pas comme une attente d'un programme de calcul, ou de valeurs omises, mais comme un rejet de technique parce qu'elle ne correspond pas à la consigne de calcul mental : il a posé dit-il, ce qui explique la juxtaposition à ses yeux. On peut noter ici encore une occasion manquée et un malentendu entre professeur et élève. Le professeur aurait pu s'appuyer sur la mention de la valeur du 1 de Enz qui dit qu'il retient la dizaine, et mettre à jour les valeurs des chiffres pour interpréter du point de vue des nombres comme une addition de 21 dizaines à 1 dizaine et à 4 unités permettant de recomposer le nombre 22 dizaines et 4 unités comme une addition de 220 et 4 puis de faire le lien avec le calcul précédent de 210 + 14. Non seulement ce n'est pas élucidé, mais plus encore, les interventions du professeur insistant sur 22 et demandant implicitement aux élèves de l'interpréter comme nombre c'est-à-dire comme 220 semble contre-productif du point de vue de l'unification. Car, outre le fait que cela ne suffit pas pour interpréter la retenue, cela donne comme calcul 220 + 4 et non 210 + 14. L'écriture 220 + 4 ne correspond pas directement à la distributivité et peut donc faire obstacle à son émergence. Dans ce premier moment, les interventions du professeur non seulement, ne permettent pas de lever les obstacles, des traitements dans la dimension sémio-linguistique, ou des amplifications de techniques, mais encore importent-elles de nouveaux obstacles en mettant l'accent sur des calculs intermédiaires peu pertinents au regard de la technologie visée.

Un deuxième épisode de découplage des dimensions vient renforcer le malentendu quant à la validité de la technique de juxtaposition :

> Fla : j'ai fait 3 fois 2 / 6 / 3 fois 1 / 3 et 3 fois 5 / 15.
> P : mais sauf que /
> You : Madame / moi / j'ai
> Fla : et j'ai tout mis
> P : Et tu as tout ?
> Fla : mis
> P : Et tu as tout mis

Wil : à la suite
P : Sauf que /
Fla : c'est pas juste

Fla interprète les hésitations de son professeur comme une indication d'erreur de technique et donc de résultat. Et cela semble bien être le contrat qui s'installe. La dimension sémio-linguistique des pratiques de calcul semble écartée sans réinterprétation pour faire le lien avec la dimension mathématique et les programmes de calcul afférents. Ainsi Wil, qui a fait une erreur de calcul, propose un autre résultat.

P : alors il faut corriger ce que tu dis // qui peut corriger ? oui
Wil : ça fait 1526
P : Ah non / ça fait bien 1536 / Wil ?
Wil : 2 fois 3 / ça fait 6 / heu 10 fois 3 ça fait 30 /
P : Ah / vous avez entendu ? Vous avez entendu ? Tu recommences ?
Wil : 2 fois 3 ça fait 6 / 10 fois 3 / 30 / et 500 fois 3 / 150
P : non pas 150
Wil : 1500
P : Et qu'est-ce qu'on fait avec tous ces résultats ?
Els : on les additionne
P : D'accord // la suite.

On voit le professeur valider la technique de Wil, invalider celle de Fla alors qu'ils obtiennent le même résultat. Pourtant, aucun lien ne sera établi entre les deux. Il est donc peu probable que l'unification puisse avoir lieu, du moins à ce moment de l'étude.

Obstacles de la numération : omissions des valeurs des chiffres et extensions abusives

Comme prévu lors de l'analyse *a priori*, on observe dans cette séance deux extensions incontrôlées de la pratique de l'algorithme posé sans prise en compte des valeurs des chiffres. Ainsi Gre propose-t-il le résultat 245 pour 25×19. Le professeur ne demandera pas d'expliciter sa technique, ni ne produira de moyen de validation. Ce sera la non-conformité du résultat avec la technique explicitée et validée par autorité du professeur qui remplira ce rôle.

Ce faisant l'on ne peut qu'émettre une hypothèse pour expliquer ce résultat. Cela paraît néanmoins compatible avec une technique d'extension des produits chiffres par chiffres lorsque l'un des facteurs n'a qu'un seul chiffre, et ainsi un usage implicite d'une fausse double distributivité : il s'agit comme nous l'avons vu lors de l'analyse *a priori* au travers d'un autre exemple, d'effectuer les produits des unités puis celui des dizaines et de concaténer les résultats. En effet, 9 fois 5 donne 45 et 2 fois 1 donne 2 ce qui par juxtaposition des écritures de droite à gauche aboutit à 245. Cela correspond à un usage implicite d'une égalité fausse du type pour a, b, c et d chiffres : $(10a+b)(10c+d) = 100ac + bd$ où les « doubles produits » sont omis.

Un autre épisode révèle une difficulté liée à la numération, à l'occasion d'une erreur de prise en compte des valeurs des chiffres de retenue. Ainsi Seb propose-t-il le résultat 1506 pour le calcul 13×102. Un autre élève a déjà produit le bon résultat, et explicité le programme de calcul attendu. Ainsi se poursuit l'épisode :

P : Qui a un autre processus ? De calcul// [silence] Seb tu n'es pas convaincu
Seb : non
P : non ? Toi tu aurais dit combien ?

Seb : 1506
P : Pourquoi 1506 c'est pas possible ?
You : Parce que c'est trop loin de 13 fois 100 ça fait 1300
P : Parce que 13 fois 100 c'est // 1300 donc effectivement 1506 c'est beaucoup trop grand. Ce serait pas ce 2 des 2 dizaines que tu aurais rajouté au 3 des centaines ? // Alors que 13 fois 2 ça fait bien 26 donc 2 c'est bien 20 (*semble montrer au tableau les résultats intermédiaires écrits*) // Tu corriges ? //

On voit ici le professeur demander un moyen de validation, un élève produire un ordre de grandeur et argumenter pour rejeter le résultat. Puis, et ce sera le seul épisode de ce type, le professeur interprètera l'erreur et suggèrera le lien entre chiffres, valeurs et nombre en montrant au tableau les résultats intermédiaires inscrits et les chiffres qui les composent. Mais cet épisode est très bref et chargé d'implicites, de sorte que l'on ne saurait supposer que chacun puisse s'emparer de ce lien suggéré. Ainsi le professeur suppose-t-il que Seb a bien effectué les produits partiels. Il suppose plus exactement que Seb est capable de recomposer les produits des chiffres comme les produits partiels des nombres. Il semble plus probable que Seb recourre à une technique qu'il aurait pu décrire ainsi : je fais 13 fois 2 ça fait 26, je pose 6 je retiens 2, puis je fais 13 fois 1, 13 et je rajoute 2 de la retenue ce qui donne 15. Mais Seb ne concatène par ensuite directement pour écrire 156. Il est donc probable qu'un ordre de grandeur le guide alors pour produire 1506 à moins qu'il n'ait effectué 13 fois 0 en omettant la retenue. Un second épisode semble néanmoins confirmer que Seb intègre des ordres de grandeur dans sa technique : il propose en effet le résultat 9041 pour le produit 23×97, sans que l'on puisse tout à fait envisager ce qui l'amène à produire ce nombre ; dès que le professeur demande pourquoi un tel résultat est impossible, et les interventions précédentes aboutissent à une utilisation d'un ordre de grandeur, Seb se corrige et propose 941. On peut donc penser que prenant en compte un ordre de grandeur inférieur, il tente une correction de la valeur d'un chiffre pour obtenir un résultat plus proche de son ordre de grandeur. Quoi qu'il en soit, comme nous l'avons vu lors de l'analyse *a priori*, les retenues forment ici un obstacle à l'identification des produits partiels et il n'est pas certain que Seb reconnaisse 13×100 dans sa technique, de sorte que 3 dans son calcul n'ait pas nécessairement la valeur de centaine dans sa technique. Ce ne sont que des hypothèses pour interpréter ici les hésitations de Seb, néanmoins, l'on peut douter de la transparence de l'intervention du professeur pour faire le lien entre les procédures de calcul mental et de calcul posé.

On observera par la suite de moins en moins de techniques fondées sur la numération explicitées, certainement par contrat, par autocensure des élèves, elles sont exclues comme ne répondant pas à la consigne, mais peut-être aussi parce qu'elles produisent de plus en plus d'erreurs, et le professeur ne demande pas d'expliciter les procédures donnant des résultats faux.

De fausses distributivités inattendues

Ainsi les techniques erronées ne seront que des hypothèses et des reconstructions. Tel est le cas du calcul 17×12. Cla propose 340 comme résultat, puis l'invalide sur l'invitation du professeur en fournissant elle-même un ordre de grandeur :

Cla : 340
E : c'est pas possible
P : Pourquoi ça peut pas être 340 ?

Cla : Ah non je me suis trompée / heu parce que heu 10 fois 10 ça fait 100 / parce que là si on arrondit à 10 ça fait 20 fois 10
P : Oui et ça fait ?
Cla : 200
P : 200 / donc effectivement, un ordre de grandeur est 200 / ça peut pas être 340.

Le professeur ne demandera pas comment Cla a obtenu 340. Néanmoins, on peut peut-être envisager qu'elle ait effectué (17×2)×10. On peut en partie interpréter ceci comme un obstacle de numération dans le sens où Cl a bien produit une décomposition du nombre 12 en 10 et 2, mais les nombres sont utilisés pour effectuer un produit.

Une autre fausse distributivité apparaît pour le calcul 68×11 avec une technique que l'on pourrait écrire 68×10 + 11 :

P : Bon le deuxième Seb ?
Seb : On fait 68 fois 10
P : Oui ?
Seb : Six-cent // heu ça fait 680 et on rajoute 11
P : Donc ça fait ?
Brouhaha
Gre : Non / on peut pas
Seb : 691
Lis : Madame on peut pas
P : 691 / Chr tu es pas d'accord ?
Chr : non
P : Pourquoi ça peut pas être 691 ?
Chr : Parce que c'est pas plus 11 [inaudible]

On voit ici Seb expliciter sa technique avant d'annoncer son résultat, de sorte que la technique n'est pas disqualifiée par un résultat faux au moyen d'un ordre de grandeur ou d'une vérification du dernier chiffre par exemple, mais par une erreur de technique soulevée par d'autres élèves :

P : Flo ?
Flo : Oui voilà c'est pas plus 11
Sop : C'est plus 68
P : Ah toi tu dis c'est pas plus 11 c'est plus 68
Sop : Oui parce que 68 fois 1 / ça fait 68 / on fait 68 fois 10 ça fait 680 plus 68 fois 1 ça fait 68 et ça fait 748

Sop fait un saut ici d'interprétation, elle interprète 68 comme résultat de 68 fois 1, cependant, cela permet d'avoir un embryon technologique justifiant quelque peu que l'on n'ajoute pas 11 : on ajoute 68 parce que c'est 68 qu'on multiplie par 11 c'est-à-dire par 10 puis par 1.

On peut supposer que la technologie vécue pas d'autres élèves soit une composition avec addition itérée.

Une autre technologie mêlée à celle de la distributivité : celle de l'addition itérée
Ainsi que l'avait montré l'analyse *a priori*, on retrouve des techniques qui relèvent d'une technologie en partie fondée sur l'addition itérée, lorsque les chiffres des unités d'un des facteurs sont égaux à 1 en particulier. C'est ce que l'on peut supposer à partir d'interventions comme les suivantes :

Mar : On fait 860, parce qu'on fait 43 fois 20 et plus heu 43 et ça fait neuf cent heu pour le calcul 43×21 et pour le produit 41×199 :

> Wil : 41 fois 200
> P : ça fait ?
> Wil : 8200 moins 41

Ou encore pour le produit 25×19

> Chr : 25 fois 20 ça fait 500
> P : 25 fois 20 ?
> Classe : 500
> P : 500 /
> Flo : moins 25
> P : moins 25 et ça fait ?
> Classe : 475

On peut supposer que les interventions du professeur, excluant peu à peu toute autre technique que celle fondée sur des produits partiels, conditionnent cela et poussent à identifier des produits par 1. Du moins est-ce le cas pour 62062 dont la technique est décrite de la sorte :

> P : oui // et comment on trouve 62062 ?
> Ili : on fait 62 fois 1000
> P : oui et ensuite ?
> Ili : 62 fois 1
> P : oui et après ? Fla tu termines ?
> Fla : on ajoute 1000 fois 62 et une fois 62

Des recompositions qui n'auront pas lieu ?

Malgré les maladresses des interventions du professeur, il semble néanmoins que se tisse un contrat consistant à décrire la technique sous la forme d'un programme de calcul. L'on voit un élève recomposer de lui-même en partie, ou du moins reconstruire une partie de sa technique dans la dimension mathématique. C'est ce que l'on observe pour Enz qui, interrogé en début de séance avait clairement explicité sa technique de concaténation. Interrogé plus tard, il modifie son discours de la façon suivante :

> P : 12 multiplié par 203 / En ?
> Enz : 2436
> P : Tu peux expliquer comment tu as procédé ?
> Enz : J'ai fait heu 12 fois 200 / ça fait 1200 / heu /
> P : 12 fois 200 non ça fait pas 1200
> Mar : ça fait 2400
> Art : c'est fois 100 / 1200
> P : 2400 oui / après ?
> Enz : 12 fois 3
> P : ça fait ?
> Enz : 36
> P : après ?
> Enz : beh ça fait 2436

On peut s'interroger sur la technique qu'il a réellement mise en place. Une technique fondée sur les écritures sans prise en compte de leur valeur donne le bon résultat, comme nous l'avons vu dans l'analyse *a priori*. Enz donne ensuite le bon produit partiel 12 fois 200 mais se trompe dans le résultat partiel, alors qu'il a trouvé le bon produit. Peut-être est-ce là une interprétation abusive, mais le fait qu'il ne décrive pas plus loin l'addition des produits partiels laisse planer un doute quant à ce qu'il a réellement effectué. Quoi qu'il en soit, il a modifié son discours et par suite ré-interprète sa technique. Modifiant son discours, il a en partie, pour les produits partiels, tourné sa technique vers un usage implicite de la distributivité avec une prise en compte des nombres, même si l'addition finale n'est pas clairement exprimée. Ce sera néanmoins le seul moment de la séance où le professeur ne demandera pas d'aller jusqu'à cette étape de description de la technique pour ne pas la laisser implicite.

Nature et fonction des interventions du professeur

La première fonction des interventions du professeur, pour les résultats justes, est de pousser les élèves à expliciter leurs techniques de calcul, et ce sous la forme d'un programme de calcul dont il demande de ne laisser aucune opération, ni aucun résultat intermédiaire implicite. On le voit par exemple à l'occasion du calcul 62×1001 dont nous avons reproduit un extrait plus haut, où le professeur pousse la classe à l'explicitation.

Nous avons vu précédemment à quel point le professeur ne demandait pas d'expliciter des techniques erronées, du moins supposées par lui erronées à partir de résultats faux. On peut peut-être y voir ici une suspension du moment technologique. Comment en effet expliquer, outre le fait que l'on ne trouve pas le bon résultat avec telle ou telle technique, la raison de son dysfonctionnement, cela ouvrirait peut-être prématurément un questionnement technologique auquel on ne saurait répondre en l'absence de technologie idoine à laquelle comparer les fausses distributivités par exemple.

En revanche, les premiers calculs qui donnent des techniques pseudo-mentales fondées sur l'algorithme posé offrent l'occasion de ré-interpréter ces techniques qui donnent aussi de bons résultats (sans extension abusive avec des valeurs des variables didactiques différentes). Mais cette occasion n'est pas saisie par l'enseignant, comme nous l'avons vu plus haut. Certainement parce que la forme des interventions est trop opaque. Comment interpréter « P : ah mais non, parce que c'est pas 22 » autrement que par une erreur de calcul ? Il semble néanmoins qu'il puisse y avoir un effet de contrat d'explicitation ou de passage des chiffres aux nombres qui vive dans la classe puisque sans plus de précision une élève entend les attentes du professeur et répond :

> P : oui d'accord, 21 plus 1 ça fait 22, mais c'est pas 22, Ma ?
> Mat : c'est 210 et 10
> P : et alors ça fait ?
> Mat : 220

Et de même plus loin :

> P : Ah mais c'est pas 13
> Elèves : 130
> P : C'est ? Seb ?
> Seb : 13 fois 10
> P : oui donc / c'est ?
> Ame : 130

Néanmoins, nous avons vu plus haut que ces formes d'interventions peuvent faire obstacle à la technologie visée par l'introduction d'une addition qui correspond au travail sur les retenues et qui est déconnecté en partie avec les produits partiels : la recomposition ne se fait pas au bon moment, c'est ce que pose comme problème le passage d'une description avec retenues, car une somme partielle est effectuée avant l'un des produits partiels, et le masque au moment de l'écriture. Le professeur ne l'ayant pas anticipé, il se retrouve à essayer de faire élucider un produit partiel dont on a déjà fait une partie de l'addition comme 220. Il aurait pu se fonder là encore sur l'intervention de Ma qui fait le lien entre 22 et les produits partiels en proposant un programme de calcul partiel pour projeter le travail fait avec la retenue dans la dimension mathématique, elle explicite 210 + 10 mais le professeur ne le relève pas et il n'est pas certain que les autres élèves s'en emparent. Du moins les interventions laissent à la charge des élèves les recompositions nécessaires pour passer du travail sémio-linguistique à des techniques fondées sur des programmes de calcul, que le contrat néanmoins les amène à produire malgré tout sous l'impulsion du professeur.

Ainsi pour chaque calcul et de plus en plus, seront décrits les programmes de calcul attendus et les résultats justes.

La question des validations

La question de la validation ne se pose que pour des résultats faux, ou mis en débat. Ce sont les hésitations du professeur ou les interventions d'autres élèves qui poussent à demander une vérification. Les validations sont, pour le calcul mental de deux sortes : l'utilisation d'un ordre de grandeur (4 occurrences) ou le contrôle du chiffre des unités (pour un seul calcul). Lorsqu'il y a consensus comme pour les premiers calculs, ou lorsque le professeur déclare le résultat juste, et sans protestations de la classe, le résultat est admis comme tel sans plus de vérification. Cependant, on observe pour les derniers calculs, l'utilisation de la calculatrice, de façon privée, par certains élèves sceptiques de la technique exposée usant de la distributivité de la multiplication par rapport à la soustraction. Nous avons vu en effet d'après l'analyse de manuels de primaire que cette technique n'était certainement pas aussi familière pour les élèves et pouvait ne pas faire partie de leur connaissance. Il n'est pas surprenant que ces techniques demandent une validation, mais elle n'est pas mise en œuvre par l'ensemble de la classe. Néanmoins on peut estimer que le fait que l'un des élèves ait vérifié, valide pour l'ensemble de la classe la technique annoncée, et la validation diffuse :

> You : J'y arrivais pas au début / mais en fait j'ai fait fois 100 heu 35 fois 100 / et après j'ai fait moins heu / en fait j'ai fait 35 fois 100 moins 35 fois 2 / 35 fois 2 ça fait 70 / j'ai fait 35 fois 100 ça fait 3500 et j'ai fait 3500 moins 70 c'est 3430.
> *Silence*
> Mar : Madame j'ai pas compris
> P : Vous n'êtes pas d'accord ?
> *Brouhaha* si on est d'accord
> Art : Si / 3500
> You : en gros j'ai fait 3500 moins 70
> Seb : oui c'est bon (*a visiblement vérifié à la calculatrice*)
> P : oui en gros il a fait 3500 moins 70
> Dans la classe : oui c'est bon
> P : oui ça fonctionne bien,
> Mar : Madame / j'ai pas fait cette technique [inaudible]

Une dernière validation d'un autre type correspond à un choix de technique, et à l'efficacité de l'une ou de l'autre : celle de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition ou à la soustraction. Ainsi Mar voit une rupture de contrat au moment des quatre derniers calculs.

Elle ne comprend pas pourquoi on change de technique. Elle a pourtant trouvé le bon résultat avec l'utilisation de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. Elle n'explicitera pas publiquement sa technique pourtant :

> Mar : 2231
> P : 2231
> Classe : comment on fait ?
> P : Alors comment on procède ?
> […]
> Elv : heu / moi j'ai fait / j'ai arrondi 97 à 100 / j'ai fait 100 fois 23/ ça fait 2300 / et après j'ai fait / j'ai enlevé 2300 heu 3 fois 23
> P : 3 fois 23 ça fait ? (*note au tableau les résultats intermédiaires*)
> Elv : heu 69 / et après ça fait 2231
> P : Mar ?
> Mar : Pourquoi 3 fois 23 ?
> P : Ah pourquoi 3 fois 23 ? / Cla ?
> Cla : Parce que pour aller de 97 à 100 y'a 3 fin y'a 3 fois // 23 / ben on multiplie 23 / 3 fois 23 en fait / donc du coup on les enlève
> P [en aparté : arrête] : Ca te convient comme explication ? // qui peut encore expliquer ? Chut
> Mar : mais je comprends pas
> P : Elv ?
> Elv : tu dois multiplier 23 par 100 donc il y est trois fois de trop parce qu'on doit obt / normalement tu devrais multiplier par 97 donc après on enlève heu on enlève au résultat les 3 fois de trop donc 3 fois 23 de trop.
> Mar : mais alors pourquoi on le fait
> Mar : pourquoi on enlève pas depuis le début ?
> Elo : parce que c'est plus rapide
> Elv : c'est plus rapide de faire 100 fois 23 que 90 fois 23

C'est à la fin de l'épisode qu'on comprend à demi-mot ce qu'a fait Mar.

En ce qui concerne le calcul posé, nous n'avons pas véritablement d'éléments étant donné que la caméra est installée en fond de classe et ne permet pas d'observer comment les élèves utilisent leur calculatrice. Les enregistrements ne permettent pas non plus de retranscrire les échanges entre professeur et élèves. Ainsi n'avons-nous que les traces écrites des produits posés qui sont retranscrits en annexe. Les usages des ostensifs que l'on y trouve correspondent à l'analyse *a priori*, de sorte que nous n'en proposons pas d'étude supplémentaire ici.

Conclusion

A l'issue de ces analyses, l'on peut conclure que les observations sont globalement conformes à ce que prévoyait l'analyse *a priori*. Les choix des variables font émerger un certain nombre d'appuis pour favoriser une certaine diversité des techniques (apparaissent bien des décompositions d'un facteur ou de l'autre, le cas de l'addition comme de la soustraction, et des décompositions implicites dans le cas de calcul posé sous la forme de sommes de plus de deux termes). Des éléments justificatifs issus des propriétés de l'écriture décimale de position apparaissent, avec des descriptions syntaxiques que les élèves associent à une technique posée. Comme l'anticipait l'analyse *a priori*, les interventions didactiques du professeur sont importantes pour lever les implicites quant aux nombres ou aux opérations en jeu. Les descriptions de techniques se modifient et émergent sous la forme de programmes de calcul. Toutefois, les obstacles de la numération apparaissent importants pour certains élèves, comme nous l'avions envisagé. Un élève par exemple dissocie à ce point les techniques posées et mentales, et les dimensions sémio-linguistique et mathématique qu'il refuse d'interpréter le fait de « mettre à côté » des chiffres comme une addition. Le passage entre cette pratique et le programme de calcul associé s'avère difficile, et l'on peut penser que les interventions du professeur ne permettent pas entièrement de lever l'obstacle, couplé à celui des retenues, pour tous. La classe semble toutefois y parvenir globalement, puisque l'on voit les discours se modifier, et les techniques se réinterpréter sous la forme attendue. Notons que, conformément à nos analyses des pratiques du primaire du chapitre précédent, le cas de la soustraction paraît nouveau pour certains élèves comme Mar. De la même manière, l'addition itérée apparaît comme substitut à la distributivité dans le cas où l'un des termes de la somme correspondant à la décomposition d'un facteur est égal à 1. Certains élèves comme Sop le recomposent néanmoins du côté de la distributivité en identifiant le produit. Cette situation semble donc jouer le rôle attendu, dans la recomposition des connaissances anciennes, au moins pour une partie des élèves, même si certaines difficultés peuvent ne pas être levées pour tous. Elles seront de nouveau au cœur du travail des élèves lors de la situation suivante. C'est ce que nous allons voir maintenant.

3.2.2 *Analyse a posteriori de la situation de production d'égalités*

Les élèves travaillent en groupes de quatre. Chaque groupe reçoit une photocopie comportant un tableau dont la première colonne montre 4 calculs effectués lors de la séance précédente, tandis que la deuxième colonne correspond aux ostensifs produits pour expliciter les techniques de calcul : ostensifs oraux/ langagiers (les phrases ont été retranscrites), et ostensifs scripturaux associés aux opérations posées. Après que la consigne a été donnée, la séance se déroulera essentiellement en trois phases. Une première phase de recherche en groupe sera suivie d'une première correction collective sous la direction de l'enseignant, avant une deuxième phase de recherche en groupe. La retranscription est celle des échanges entre les élèves du groupe 3 qui se voient distribuer la feuille suivante :

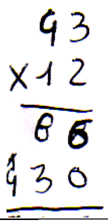
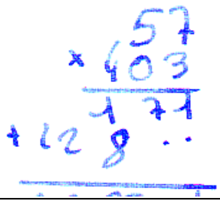
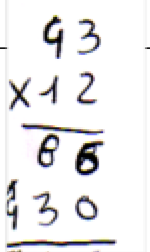
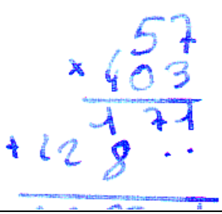
512 × 3	*2 fois 3, 6, 10 fois 3, 30, et 500 fois 3, 1 500 et on additionne les résultats.*
25 × 19	*J'ai fait 25 fois 20 ça fait 500, moins 25.*
43 × 12	
57 × 403	

Figure 3.2 – Photocopie distribuée au groupe 3

Tableau synoptique du déroulement (groupe 3)

Temps	Tâches / Supports	Organisation / Phase	Sous-types de tâches et techniques
1		Consigne / Dévolution	
2	*2 fois 3, 6, 10 fois 3, 30, et 500 fois 3, 1 500 et on additionne les résultats.*	Recherche en groupes	t_1 : Passer de la formulation « rhétorique » d'un programme de calcul numérique à sa formulation symbolique
3			
4			
5			t_1' : Passer de l'écriture posée des résultats des produits partiels à la formulation symbolique du programme de calcul sous-jacent.
6			τ : Identifier les produits partiels avant d'en écrire la somme.
7			
8			
9			t_2 : Trouver puis écrire sous forme symbolique d'expression numérique un programme de calcul équivalent « intermédiaire »

10			t'_1/τ : Identifier les produits partiels avant d'en écrire la somme.
11			
12			
13			
14			
15			
16			Ecriture d'un second membre : le produit initial
17	*J'ai fait 25 fois 20 ça fait 500, moins 25.*		
18		Passage au tableau	
19		Correction collective	
20	Egalités écrites au tableau	Travail individuel	Vérifier que les égalités écrites au tableau sont des égalités justes : effectuer les programmes de calculs tels qu'écrits dans chaque membre de l'égalité puis les comparer. L'égalité est juste si les résultats sont égaux.
21			
22			
23			
24			
25			
26			
27			
28			
29			
30		Institutionnalisation	
31	134x22=134x20+134x2	Construction collective d'une égalité	t'_2
32			
33			
34			
35		Recherche en groupes puis mise au propre	t_2' : Trouver une autre écriture de l'un des nombres qu'on multiplie sous la forme d'une somme
36			
37			
38			
39			
40			
41			
42			
43			
44			
45			
46			
47			
48			
49			
50			

Dévolution et rupture de contrat

Une fois le support écrit distribué, le professeur donne la consigne correspondant au genre de tâche d'écriture d'une égalité, et montrant les « procédés » de calcul employés lors de la séance précédente. Il signale d'emblée l'enjeu de l'étude, (méta-mathématique ?) autour des techniques calculatoires :

> P : on va travailler sur les procédés de calculs que vous avez utilisés la dernière fois / j'ai donc photocopié les calculs que vous aviez posés / et j'ai recopié les phrases que vous avez dites pour expliquer comment vous trouviez les résultats de vos calculs.

C'est un premier moment technologique qui est annoncé, dans le sens où il s'agit d'étudier les techniques et en tout premier lieu de construire des ostensifs assurant la fonction de description de la technique, c'est ce que souligne l'emploi par le professeur, des verbes 'regarder' et, de façon plus insistante, 'montrer' :

> Il s'agit / je répète de regarder ce qu'on fait comme calcul intermédiaire / que vous employez / pour trouver le résultat // le but / c'est pas du tout de retrouver les résultats /// c'est pour ça que j'ai effacé les résultats // mais il s'agit pas du tout de les retrouver / mais de montrer les calculs que vous faites réellement pour trouver les résultats // et pour ça / je vais vous demander d'écrire des égalités en lignes qui montrent ces procédés de calcul
> […]
> P : je vais vous dicter / pour chaque calcul // écrire // une égalité // en ligne // qui montre le procédé permettant de trouver le résultat. Attention j'insiste / on veut pas du tout montrer / que vous retrouviez / les résultats / mais uniquement les calculs que vous faites après

En même temps, le professeur écarte l'enjeu calculatoire du type de tâche de la séance précédente, et induit clairement une rupture de contrat quant à l'usage de l'égalité :

> P : il faut écrire une égalité en ligne qui montre le procédé de calcul en fait / pas le résultat

Cet usage du signe =, déconnecté de l'écriture d'un résultat, semble difficile à interpréter, d'autant que, comme nous l'avons signalé dans l'analyse *a priori*, le singulier employé pour « le procédé » amène peut être à penser à un seul programme de calcul décrivant la technique et non une équivalence de deux programmes de calculs. Le groupe demande aussitôt au professeur de valider l'écriture suivante : 2×3+10×3×500×3 =

> Flo : Madame comme ça ? (*montre son cahier*)
> P : oui / une écriture mathématique

La réponse du professeur laisse un doute quant à un possible malentendu. Il semble que le professeur valide le formalisme, c'est-à-dire le type d'ostensifs attendus, ou le langage dans lequel se situer (L_{math}). L'écriture de l'égalité n'est pas terminée, il manque le membre de droite. Il semble donc que le professeur suppose que Flo lui montre un travail en cours et en valide donc la première étape. Mais il n'est pas certain que l'élève l'entende ainsi. Il a bien produit une écriture avec un « procédé de calcul », ou « les calculs intermédiaires », « en ligne », qui ne montre pas de résultat, et qui, comportant un signe = répond probablement à ses yeux à la consigne d'écriture d'une égalité. Aurait-il donc interprété la consigne comme une égalité dont on a caché le résultat –comme le professeur a pu effacer les résultats des opérations posées- ? Ceci expliquerait qu'il puisse se méprendre sur la réponse du professeur, et l'interprète comme un assentiment (assorti d'un malentendu) quant à ce qu'il a produit.

Le premier sous-type de tâche dont s'emparent néanmoins les élèves, est bien t_1, comme l'analyse *a priori* a pu le montrer pour le calcul 512×3. Puis, curieusement, le groupe s'intéresse tout de suite à la première opération posée, sans apparemment avoir examiné le second calcul mental, et ne considère donc pas les calculs dans l'ordre :

> Seb : mais c'est quoi le calcul
> Wil : c'est 3 fois 2 + // tiens / c'est 4 fois
> Seb : c'est bon c'est fort
> Gre : On peut faire 43 × 2 / 86 / 43 fois 2 / 86 / c'est pas compliqué

Obstacle de la numération : identification des produits partiels et rôle des variables didactiques

On voit une première difficulté liée à la numération et à l'algorithme de la multiplication identifiée lors de l'analyse *a priori* ici. Wil ne prend pas en compte la valeur du chiffre 4 lorsqu'il essaye de décrire le programme de calcul pour la première ligne du calcul posé qui correspond à 43×2. Il a pourtant levé un premier obstacle : il a bien identifié une somme : « c'est 3 fois 2 plus » dit-il (et réinterprète donc bien la juxtaposition) mais il continue par « c'est 4 fois » au lieu de 40 fois. Il aurait pu aboutir à une double distributivité en réinterprétant correctement la valeur du chiffre pour l'écriture du programme de calcul. Mais l'intervention de Gre amènera le groupe à passer au produit partiel visé, et il semble argumenter à l'aide du résultat : le calcul qu'il propose correspond de façon évidente (« c'est pas compliqué ») à la première ligne. On peut supposer ici que le rôle des variables V_3 et V_4 fonctionne comme l'avait prévu l'analyse *a priori*, c'est-à-dire facilite la reconnaissance et le passage à une description fondée sur les nombres. Gre remportera visiblement l'adhésion car la question du chiffre 4 au lieu de 40 (ou plus globalement de 43) ne se posera plus au sein du groupe.

En revanche l'épisode suivant relève de la contingence de l'expérimentation.

Une tentative d'unification prématurée et une analogie scripturale évitée : rôle des variables et force de la consigne

On y voit Seb et Flo se disputer quant à l'identification du produit partiel. Seb semble interpréter un contrat implicite d'unification lié au support écrit (les calculs sont donnés ensemble et dans un même tableau) et à la consigne d'écrire une égalité pour chaque calcul donné. Seb semble donc chercher une égalité d'un même type, et un pattern commun de production (ce qui renvoie aussi au fait souligné par l'analyse *a priori* que les élèves ne disposent pas véritablement de technique pour t_1). Il propose de construire un produit partiel non pas en référence à l'ostensif du calcul posé, mais en référence aux produits partiels du calcul mental qu'ils ont traité c'est-à-dire de 512×3 :

> Flo: si mais en ligne / alors il faut écrire en ligne 43 × 2
> Seb : mais non ça il faut pas le marquer
> Flo : mais si faut l'écrire
> Seb: mais tu regardes / *là au début* ils marquent pas 512 × 3 ils marquent directement 2 (inaudible) alors là on marque 3 fois 12

Il semble que Seb s'appuie sur le calcul écrit dans la colonne de gauche du tableau donné 43×12. Pour le premier calcul 512×3, la décomposition du facteur en somme est celle de 512, donc du facteur écrit à gauche. Le premier produit partiel du calcul mental, 3×2, a pour facteur le nombre écrit à droite du signe × dans le calcul donné 512×3. Seb semble donc proposer d'écrire un produit partiel avec le facteur 12 de droite dans l'écriture 43×12, avec une décomposition implicite du facteur de gauche : « là on marque 3 fois 12 » dit-il. Bien sûr, ce mode de production d'une égalité par analogie, donnerait une égalité juste, mais elle ne correspondrait pas au programme de calcul de la multiplication posée. C'est cette consigne qui amènera le groupe à ne pas utiliser cette technique d'analogie, et à se fonder sur les ostensifs donnés (là encore le rôle des variables et le fait que le produit partiel soit reconnaissable par calcul mental n'est certainement pas négligeable) :

> Flo : pourquoi fois 12 / non c'est pas 3 fois 12 c'est 43 fois 2 ..//.. Faut marquer / en fait faut détailler les calculs que tu fais
> Seb : ah oui d'accord, 43 fois 2

Une autre variable joue un rôle inattendu : le nombre de chiffres de chaque facteur (V_1), qui induit une décomposition nécessaire du facteur de gauche, puisque pour 512×3, le facteur de droite ne s'écrit qu'à l'aide d'un seul chiffre. Puisque les décompositions ne sont pas toujours celles du facteur écrit à droite, ou à gauche, cette variable, couplée à la consigne, interdit ici l'analogie scripturale. On voit ici aussi les difficultés à s'approprier la consigne pour l'ensemble des élèves que le groupe régule. La dévolution a néanmoins bien lieu : les élèves s'emparent de la tâche, et plus encore assument très vite la rupture de contrat liée à l'utilisation du signe =.

Un type de tâche résistant : rupture de contrat et signe =

Cette rupture de contrat liée à l'utilisation du signe = comme annonce de résultat était prévue par l'analyse *a priori*, compte tenu des pratiques anciennes du primaire, et du caractère nouveau du type de tâche. De fait, non seulement elle est bel et bien un enjeu fort des discussions, mais elle occasionne même des disputes au sein du groupe. Un premier épisode témoigne ainsi de la façon dont les élèves assument cette rupture :

> Flo : On écrit 43 fois 2
> Gre : Est égal à 86
> Flo : On fait 43 fois 2, égal 86, en ligne
> Seb : 43 fois 2 ça fait combien ?
> Gre : 86
> Seb : Mais non mais on n'a pas marqué
> Flo : Mais faut pas marquer les résultats / tu mets 43 fois 2 // plus
> Gre : Pourquoi tu mets plus
> Seb : Faut marquer le résultat
> Flo : Mais non,
> Gre : Mais si
> Flo : Ecoutez 43 fois 2 plus // […] // 43 fois 2 plus 43 fois 10 est égal et tu mets le résultat
> Wil : Non, non

On voit combien les résistances sont fortes, Flo par exemple refuse d'écrire les résultats intermédiaires, mais veut inscrire le résultat après le signe = quand même. L'appel au professeur qui suivra n'amoindrira pas pour autant la querelle.

> Flo : Madame / on écrit bien en formule mathématique ?
> P : oui
> Flo : et on marque le résultat là ? (*il montre 43 × 2 + 43 × 10 =*)
> P : non / on marque pas le résultat / juste le procédé qui montre (*inaudible*)

Seb : allez on réfléchit
Wil : pourquoi tu marques ça / faut mettre le égal aussi / moi je suis contre
Seb : alors 43 fois 2 virgule
Flo : non pas virgule / plus / on fait plus Wil regarde / 43 fois 10
Wil: 430
Seb : 43 fois 10 qui fait ?
Wil : 430 mais il faut pas le marquer
Flo : et voilà et tu mets un égal et tu mets ../.. et tu marques quoi ? Tu marques rien ..//.. bon viens on fait celle d'en dessous

Le type de tâche est difficile : l'écriture en ligne de l'enchaînement des opérations est bien le premier enjeu des discussions, et la question de la formalisation est vive. En témoigne la proposition étonnante de Seb (et Wil semble-t-il) d'écrire une virgule à la place de +, ce qui peut aussi s'interpréter, non pas comme une identification non évidente de la somme, même si on ne saurait avoir de certitude pour cet élève, mais plutôt comme l'identification plus globale d'un programme de calcul, c'est-à-dire d'une réinterprétation des étapes de l'algorithme ancien comme un enchaînement de calculs. On retrouve là peut-être l'un des obstacles soulevés lors de l'analyse *a priori* quant à l'algorithme ancien de la multiplication posée. Il semble néanmoins que l'addition puisse se retrouver aisément et ne fasse rapidement plus débat.

La question insistante des résultats, intermédiaires ou non, et d'égalités éventuelles intermédiaires, même après l'intervention du professeur, montre à quel point le type de tâche est difficile. Mais on voit combien la consigne résiste, et joue bien son rôle : elle pousse les élèves à essayer d'envisager autre chose pour le membre de droite. Le groupe ne parviendra néanmoins pas à ce moment là à en produire une écriture, et abandonnera momentanément cette égalité.

Un nouvel obstacle de la numération pour l'opération posée
Après l'abandon, le groupe se centrera donc sur le deuxième calcul posé :

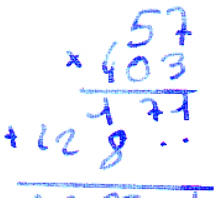


Figure 3.3 – Extrait de la fiche servant de support au groupe

Les obstacles levés précédemment (pour l'autre produit posé) grâce aux variables didactiques V_3 et V_4, ne pourront pas l'être ici de la même manière puisque les variables ne prennent pas les mêmes valeurs.

Le premier enjeu des débats est bien l'identification des produits partiels. Elle ne se fera pourtant pas en référence aux résultats intermédiaires comme pour le précédent calcul, certainement parce qu'ils ne sont pas accessibles mentalement aussi rapidement.

Seb : allez c'est trop simple / sauf qu'on
Flo : là on met 3 fois
Wil: [inaudible] 57 fois zéro ?
Flo : non mais là pour une fois il a raison :

Seb : ah mais 3 fois 57

On peut s’interroger sur la raison pour laquelle les élèves ne décident pas d’utiliser à ce moment là la calculatrice pour vérifier. On peut supposer qu’ils n’en éprouvent pas le besoin et que ce qui les guide est leur connaissance ancienne de l’algorithme de calcul posé qu’ils recomposent comme produit de nombres. Un nouveau malentendu lors de l’intervention du professeur va bousculer leur interprétation et aboutir à une remise en question de cette identification.

La question qui les anime est implicitement celle du facteur à décomposer en quelque sorte : cela n’est jamais mentionné, mais ils proposent tantôt des produits partiels par 403 et tantôt par 57 à la suite :

P : il faut faire pour le calcul mental aussi hein //
Flo : ah mais / madame ça on peut faire l’inverse / mettre le 400 d’abord
P : non / c’est bien écrit comme ça
Wil : faut faire 57 fois 3

On peut supposer que l’écrit montre comme premier terme 57×3 (ou 3×57) et soit que le second produit par 400 soit écrit ou non, le professeur valide l’écriture. Mais Flo estimerait-il, en lien avec les habitudes d’écritures de décomposition de la numération que le 400 doit être écrit à gauche, « d’abord », dit-il car il semble identifier implicitement une décomposition ? Rien ne permet de le savoir véritablement, néanmoins, il interprète visiblement mal la réponse du professeur :

Flo : faut faire 7 fois 403 plus 5 fois
..//.. mais non faut pas faire 403 parce que c’est la prof qui l’a dit plus 50

Les difficultés liées à la numération et à la prise en compte des valeurs des chiffres ressurgissent mais Flo se corrige aussitôt, pourtant elles résistent comme le montre Seb à la suite :

Flo : non 50
Seb : 5 fois 403 plus 7 fois 403
Flo : mais non attends / parce que moi je me suis trompé
Seb : 5 fois
Flo : non / mais non / non c’est pas ça
Seb : plus 50 fois
Flo : 57 fois 3 plus 57 fois 400

Seb surmonte aussi rapidement la difficulté et recompose le nombre 50, et il semble que Flo finisse par se corriger, probablement en référence à l’algorithme qu’il connaît.

Ce faisant, il s’écoulera près de 8 minutes sans retour à la question de l’écriture de membres de gauche. C’est l’intervention du professeur qui les y amènera dans un premier temps.

Premières écritures

On observe dès lors combien la consigne de formalisation est difficile :

Flo : et les procédés / on doit les mettre sous cette forme
P : Oui
Flo : Ah beh voilà
Seb : on doit faire quoi ?
Flo : Ben comme on a fait pour ça (*montre* 43 × 2 + 43 × 10 =)

Seb n'est toujours par sûr de ce qu'il y a à faire maintenant qu'ils ont accompli les premiers sous-types de tâche t_1 et t'_1 d'écriture des programmes de calcul.

On voit combien les élèves manquent de mots, à la fois pour désigner ce sur quoi doit porter la validation demandée au professeur : « sous cette forme », que le professeur interprète encore une fois du côté du langage. Néanmoins, il se repositionne tout aussitôt dans la dimension mathématique pour éclairer la consigne :

> P : ton égalité est pas complète là il faut quelque chose à droite

Il induit l'idée qu'une égalité est une relation entre deux objets. Et tout aussitôt, on voit ressurgir les difficultés liées à la rupture de contrat dans le groupe, qui ne parvient pas à envisager autre chose qu'un résultat à écrire à droite. Ils ne disposent pas de technique :

> Flo : mais comment on fait / on a pas de calculatrice
> P : si vous avez droit à la calculatrice
> Flo : ha
> Gre : si
> Flo: beh calcule
> Seb : on doit faire quoi ?
> P : attention / vous devez pas montrer des calculs qui montrent le résultat
> Flo : ah bon ?
> P : des calculs qui montrent le procédé

L'ambigüité de la consigne fait alors obstacle :

> Flo: le procédé ? mais on montre le procédé là (montre 43 × 2 + 43 × 10 =)
> P : ah oui / mais ton égalité n'est pas complète / tu as un calcul à gauche / il faut un signe égal / et à droite aussi
> Flo : et ben voilà (il montre encore 43 × 2 + 43 × 10 =)
> P : mais c'est pas une égalité ça
> […]
> Seb : ouh il a fait la gaffe qu'il fallait pas faire
> Flo : mais là faut marquer là / faut marquer le truc là / et égal
> Gre : 473
> Flo : mais faut pas marquer le résultat / mais il est con / elle vient de me dire fallait pas marquer le résultat / alors faut pas le marquer
> Wil : attends / moi je vais le dire
> Flo : Wil / faut pas marquer le résultat

L'initiative viendra de Flo pour compléter l'égalité juste avant de passer au tableau :

> Flo : tiens regarde ce que j'ai écrit
> Seb : Faut marquer les résultats ?
> Flo : non / faut marquer égal et regarde ce que j'ai écrit / 43 fois 12 / Wil marque ce que j'ai marqué

Le groupe n'aura pas le temps de travailler sur le second calcul mental ni de vérifier bien que Seb en ait eu l'intention, sans que l'on sache comment :

> Flo : Maintenant faut faire le deux
> Seb : maintenant, on doit faire quoi ?
> […]
> Flo : on continue (17 : 40)
> Seb : moi je vais vérifier ..//..

Le passage au tableau se fera à ce moment là. Voici les écritures des groupes présentées au tableau :

(100×38) – 3×38 = 3686
534×22 =534×2 + (534×20) = 11748
62×1 000 + 62×1 = 62 000 + 62
7×30 + (7×2) = 7×32
(43×2) + (43×10) = 43×12
6×3 + 18 = 40×3 = 120
67×10+67×4 = 938

On observe les trois choix envisagés par l'analyse *a priori* pour les membres ne correspondant pas à une somme ou à une différence de deux produits : les groupes ont choisi soit d'écrire des sommes de produits partiels, soit d'écrire le résultat, malgré la consigne, soit encore d'écrire le produit initial. Pour aller plus avant dans l'analyse, comparons ces écritures produites et les supports correspondants donnés à chaque groupe :

Calculs	Ostensifs	Egalités produites
62 × 1 001	*62 fois 1 000 et 62 fois 1 et on ajoute*	62×1 000 + 62×1 = 62 000 + 62
7 × 32	*J'ai fait 7 fois 3 ça fait 21 fois 10, 210 et après j'ai fait 7 fois 2 ça fait 14 et j'ai additionné 210 et 14.*	7×30 + (7×2) = 7×32
43 × 12	43 ×12 86 430	(43×2) + (43×10) = 43×12
67 × 14	67 ×14 268 + 670	67×10+67×4 = 938
534 ×22	534 × 22 1068 + 10680	534×22 = 534×2 + (534×20) = 11748

On observe ainsi que le groupe qui a travaillé sur 7× 32 a recomposé la description du côté de la numération (« 7 fois 3 » n'explicite pas la valeur de 3) en réinterprétant la technique décrite avec amplification (21 fois 10) comme un produit de 7 par 30. Sans que l'on sache comment, l'obstacle a été néanmoins levé. Les autres groupes ont également identifié les produits partiels et ont réussi à effectuer les tâches relevant de t_1 ou t'_1. Ce n'est pourtant pas le cas de tous les groupes. Deux écritures au tableau sont inattendues.

Une égalité sans lien avec la technique de calcul : une analogie scripturale qui ne sera pas démasquée

La première de ces écritures inattendues correspond au calcul et à l'extrait de fiche suivant :

Calcul	Ostensif	Egalité produite
38 × 309	38 x309 342 0 0 . 1 1 4 . .	(100×38) – 3×38 = 3686

La première égalité produite par le groupe travaillant sur 38 × 309 est en effet sans rapport ni avec le calcul, ni avec les produits intermédiaires. Ce calcul suit néanmoins le calcul ci-après dans la fiche qui leur a été distribuée :

23 × 97	*J'ai fait 100 fois 23 ça fait 2 300 après j'ai enlevé à 2 300, 3 fois 23.*

On peut donc supposer que ce groupe a produit une égalité à partir de la précédente en ne modifiant que le facteur écrit à gauche, ce qui correspond en réalité au produit de 38 par 97. Mais comme n'apparaissent pas au tableau les supports écrits de chaque groupe, cela passera inaperçu, pour le professeur comme pour les élèves, la question de l'idonéité de l'écriture avec les ostensifs et donc les techniques calculatoires ne pourra être posée à ce moment de l'étude. Elle le sera néanmoins à l'occasion de la séance 5, nous y reviendrons.

L'égalité de ce groupe sera de plus très rapidement écartée par le professeur car elle montre un résultat, ce qui ne correspond pas à la consigne donnée.

Des obstacles de formalisme qui n'ont pas été surmontés par l'un des groupes

La deuxième écriture inattendue est la suivante, dont le tableau indique les extraits de la photocopie dont disposait le groupe :

Calculs	Ostensifs	Egalités produites
46 × 3	*J'ai fait 6 fois 3, 18 et 4 fois 3 ça fait 12 c'est 120 et 18.*	6×3 + 18 = 40×3 = 120

L'enchaînement d'égalités montre à quel point l'écriture en ligne et la maîtrise des ostensifs en lien avec l'égalité peuvent être une source de difficulté. On voit pourtant ce groupe avoir surmonté comme les autres l'obstacle de la numération : il a recomposé le produit du côté des nombres en écrivant 40×3 en réinterprétant le texte qui mentionne « 4 fois 3 ça fait 12 c'est 120 ». Il semble que la difficulté tienne à l'enchaînement des opérations, à identifier et à écrire, et donc au lien entre les produits partiels, c'est-à-dire à la somme qui n'est décrite que par «120 et 18 ». Néanmoins, là encore, le support écrit faisant défaut, il ne sera pas possible de mettre le sous-type de tâche sur lequel ont travaillé les élèves au cœur de la correction, et donc en débat. Mais ce sous-type de tâche n'étant pas l'enjeu de l'apprentissage, il est écarté de la place publique, il devra donc être surmonté au sein des groupes, avec l'aide éventuelle de l'enseignant. Le professeur, au tableau, demandera néanmoins rapidement au groupe d'exclure l'une des égalités (l'un des membres de fait) puisque la consigne ne demande qu'une égalité. Ainsi restera au tableau l'égalité 40×3 = 120 qui n'a plus beaucoup de sens quant à la connaissance visée ou aux calculs donnés.

Vérification et construction collective d'une égalité

Si le groupe de Flo, Wil, Gre et Seb n'a pas eu le temps de vérifier, d'autres groupes ont visiblement mis en place des techniques de vérification, c'est ce que montre la vidéo de la classe au moment où Ame passée au tableau s'interroge sur la validité de ce qu'elle a écrit : on la voit prendre sa calculatrice puis taper 17×22 = puis sur la touche AC, et enfin 17×2+17×20, avant de déclarer « c'est juste ». Néanmoins, c'est bien sous l'impulsion du professeur que l'ensemble de la classe aura l'occasion de contrôler la validité des égalités qui restent au tableau. Les élèves ne semblent pas éprouver de difficulté et se mettent rapidement d'accord sur la technique à mettre en œuvre :

> P : maintenant / comment vérifier que / les égalités qui sont écrites au tableau sont justes ? c'est-à-dire comment vérifier que les égalités sont bien des égalités ?
> Cla : beh on fait les calculs à la calculatrice
> Ili : ben on fait tout
> Flo : on fait le calcul
> P : on fait les calculs quel calculs ?
> Mar : beh les calculs qui sont écrits
> P : Chh comment ?
> Cla : les calculs qui sont écrits
> Flo : ben 43 fois 2 plus 43 fois 10
> Chr : ben on fait par heu ce qu'il y a avant le premier égal
> P : alors ce qu'il y a avant le signe égal et après ?
> Cla : et après beh heu ah oui non // ben si sur celle du groupe d' Ili je crois comme c'est marqué 120 comme c'est le résultat ben la calculatrice affichera le résultat mais bon
> P : oui bon d'accord / ici de toute façon c'est marqué le résultat / sauf que c'était pas ça qu'on vous demandait c'était pas ce genre d'égalité / on veut pas une égalité qui montre le résultat / Dav //mais par contre sur une égalité comme ça (*montre celle de Clo 7×30+7×2=7×32*) comment on peut vérifier que l'égalité est juste ?
> You : ben / on fait // heu on fait l'opération

You sous-entend qu'on effectue le produit, c'est-à-dire l'opération initiale 7×32 qui est écrite à droite du signe =, et les élèves semblent se mettre au travail sans tarder pour vérifier les égalités écrites au tableau. Le professeur insistera lors de la correction sur le fait qu'on effectue les calculs pour le membre de droite et le membre de gauche, en demandant lors de l'annonce de résultat, à quel membre il correspond afin de lever toute ambigüité.

> P : Pour celle-là (*montre 7×30+7×2=7×32*)
> You : c'est bon
> P : quoi c'est bon ?
> You : 224
> Mau : moi aussi
> P : 224 vous trouvez là ? (*écrit 224 sous 7×30+7×2*) Et alors comment on fait pour dire que c'est bon ?
> You : ben on fait 7 fois 32
> P : Ah oui on fait 7 fois 32
> Dav : ça fait 224
> Classe : ben oui

Ou encore :

Ame : ben moi sur ma calculatrice / ça m'a fait juste
P : c'est à-dire ?
Ame : ben si je mets entre parenthèses 534 fois 2 et etcetera je trouve heu 11748
P : le calcul à droite donne 11748 c'est ça ? et le calcul à gauche ?
Ame : 11748

La technique est aussitôt institutionnalisée pour ce type de tâche de vérification :

P : sur le cahier vous écrivez // pour vérifier / chut / Chr / je dicte / pour vérifier une égalité// qu'est-ce qu'on fait alors ?
E : on calcule
P : on calcule // on calcule quoi ?
Seb : beh les égalités
Flo : la première partie et la deuxième
P : Ma ?
Mat : on calcule les deux opérations
Flo : la première partie et la deuxième partie
P : la première partie c'est / chut / la première partie / en mathématiques ça s'appelle le membre de gauche de l'égalité / puis le membre de droite / chut / puis le membre de droite
E : et après on regarde si c'est les mêmes résultats
P : et on regarde si c'est les mêmes résultats
Classe : et si c'est pas les mêmes ?
Classe : c'est que c'est faux.

On retrouve néanmoins ce que nous mentionnions lors de l'analyse *a priori*, si les résultats ne sont pas les mêmes, l'égalité est bien entendu fausse, mais la vérification ne donnera aucune indication quant à ce qui est faux, et ce qu'il convient d'écrire.

Pourtant, la construction collective d'une égalité du type attendu se fera apparemment sans difficulté. Une fois la vérification dans la dimension mathématique produite par les élèves, le professeur prendra à sa charge d'invalider les écritures, en référence à la consigne :

P : Maintenant, regardez les égalités / j'efface celles qui donnent les résultats // vous regardez celles-là / c'est pas ça qu'on veut / c'est une égalité je vous rappelle qui doit montrer le procédé de calcul / mais regardez celle là (*montre 62×1000+62×1=62000+62*) là / ici / il y a des résultats intermédiaires mais c'est pas ça qu'on veut / c'est une égalité qui je vous le rappelle ne doit pas montrer les résultats / y compris les résultats intermédiaires / on veut pas de résultat intermédiaire / c'est pas ça qu'on veut l'égalité que vous cherchez à faire qui doit montrer le procédé You / c'est une égalité d'un nouveau genre / c'est même une égalité qui ne montre pas le calcul qu'il y a à faire / parce que regardez là / à droite il y a le calcul qu'il y à faire / ici à droite il y a le calcul qu'il y a à faire / et ici aussi à gauche il y a le calcul qu'il y a à faire (*P montre chacune des trois égalités restantes)* mais c'est pas ça que je vous ai demandé / c'est pas une égalité qui montre le calcul et le résultat c'est une égalité qui montre le procédé de calcul / parce que il manque des explications là / regardez là dans celle là il manque une explication

Et c'est bien un travail sur les écritures qu'il guidera aussitôt :

You : laquelle ?
P : beh le 20 là et ce 2 ils viennent d'où ?
You : ils viennent de 22
E : de 22
P : mais quel est le lien ? c'est ça que vous montrez pas
Mar : ben 20 plus 2 c'est égal à 22
P : et oui c'est 20 + 2
E : mais comment on peut le montrer
P : ben oui comment on peut le montrer parce que à droite il y a bien le processus (recopie *le signe = et le membre de droite sous l'égalité 534×22=534×2+534×20 au tableau*) mais à gauche on veut pas le calcul / alors qu'est-ce qu'on peut écrire à gauche qui montre le lien entre 20 et 2 ?

E : ben on écrit 20 + 2
P : si on écrit 20 + 2, ça va pas, qu'est-ce qu'il faut écrire à gauche
E : 534 fois 20 + 2
P : 534 fois 20 + 2 ? (*écrit sans parenthèses*)
Cla : moi je mettrais des parenthèses à 20 + 2
P : oui il faut des parenthèses / pourquoi
Cla : ben parce que la multiplication est prioritaire
P : Sop ?
Sop : ben parce que 534 fois 20 c'est pas le bon calcul et on n'aura pas le bon résultat

Le professeur renvoie alors les élèves à leur tâche de production d'égalité, en leur demandant de les corriger. Relevons néanmoins un élément contingent ici : aucune des égalités écrites au tableau ne montre un manque d'identification des produits partiels, c'est-à-dire que chaque groupe a surmonté les difficultés liées au sous-type de tâche t_1 ou t'_1 . Il ne leur reste qu'à affronter t_2. Ce faisant, on voit le glissement anticipé lors de l'analyse *a priori* vers t'_2 pour le groupe de Wil, Flo, Seb et Gre :

Flo : Madame, mais là on peut pas 512 fois 3 on peut pas décomposer
P : ben //
Seb : ben si on peut 512 fois 3 le décomposer,
Gre : ben si / tu // tu écris le 3 devant
Seb : moi je regarde des chiffres et des lettres, ils te donnent des chiffres et tu dois trouver un résultat
Wil : 500 + 10 + 2

On voit ici comment l'analogie scripturale qui semble gêner Flo est annihilée par les variables et le fait que chaque groupe ait des calculs différents. Nous pouvons en effet interpréter l'impossibilité que Flo voit parce qu'il cherche à décomposer 3 et non à chercher un lien avec le programme de calcul écrit à droite. Ce que semble confirmer Gre qui propose d'inverser les facteurs pour avoir une égalité du même type que celle qui a été construite au tableau. Elle a pourtant été effacée. Néanmoins une stricte analogie scripturale aurait dû les pousser à écrire une somme de deux facteurs plutôt que trois. A moins qu'ils ne soient guidés par une décomposition de numération en centaines, dizaines et unités. Il semble cependant que l'on puisse supposer que se construise autre chose qu'une simple analogie, d'autant que le professeur les invite rapidement à vérifier, et le groupe s'exécute :

P : ben là faut les vérifier aussi / et il faut faire les deux du calcul mental aussi
Flo : oui / et l'autre il est là
P : d'accord / vérifiez
Flo : Wil tu peux me passer ta calculatrice
[…]
Seb : Attends je vérifie / retiens / ça fait 475
Gre : attends j'écris
Flo : après 100 fois … (*inaudible*) c'est bon / tu peux effacer / bon / lui il est juste / après
[…]
Flo: ils sont tous bons
P : vous recopiez au propre vos égalités

Au moment de recopier cependant, se produira une étonnante modification de signe sous l'impulsion de Flo et au moment de la sonnerie : ils échangeront les signes + et × :

Flo : eh les gens il faut marquer les égalités sur la feuille blanche
[…]
Flo : et là c'est pas un fois les gens / c'est un plus
P : il vous reste 5 minutes pour recopier sur la feuille pour chacun des 4 calculs / les égalités

sonnerie
Flo : c'est pas fois c'est plus / là non plus c'est pas un fois
(*Wil les laisse, les autres élèves du groupe corrigent tous*)
Flo : après le égal c'est un plus c'est pas un fois / oui c'est moi qui me suis trompé

Seul Wil reproduira les égalités élaborées sans ce changement :

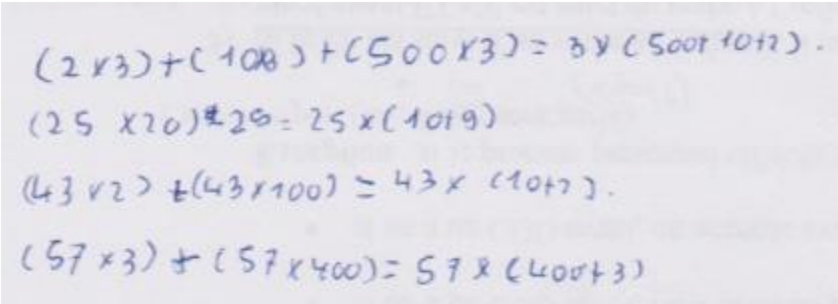

(2×3)+(108)+(500×3) = 3×(500+10+2).
(25×20)+20 = 25×(10+9)
(43×2)+(43×100) = 43×(10+2).
(57×3)+(57×400) = 57×(400+3)

Figure 3.4 - Feuille d'égalités rendue par Wil

On voit une erreur, probablement de recopie, pour le membre de droite à la troisième égalité, tandis que la seconde égalité montre une difficulté liée à une analogie c'est-à-dire à une recherche de lien additif, au lieu d'une soustraction. Mais peut-être est-ce là par manque d'identification d'un facteur égal à 1 qui n'apparaît pas dans l'écriture du membre de gauche. Le groupe a donc peut-être utilisé le calcul donné 25×19 pour produire le membre de droite sans chercher de lien avec le membre de gauche, ou sans y parvenir. Néanmoins, si les autres écritures conviennent, la question de l'analogie scripturale comme seule technique peut se poser.

Place de l'analogie scripturale dans la production des écritures

Les égalités de chaque groupe sont différentes, et l'égalité construite collectivement au tableau a été effacée, mais la forme parenthésée avec une décomposition additive –et de numération- du facteur écrit à droite du signe = est peut-être ce qui guide les élèves. Il semble toutefois que cette interprétation soit réductrice à l'observation de l'ensemble des productions de la classe.

Ainsi les écrits d'un autre groupe montrent l'évolution des écritures pour lesquelles le facteur décomposé n'est pas systématiquement écrit à droite du signe ×, mais plutôt à gauche, contrairement à l'écriture produite lors de la phase collective au tableau :

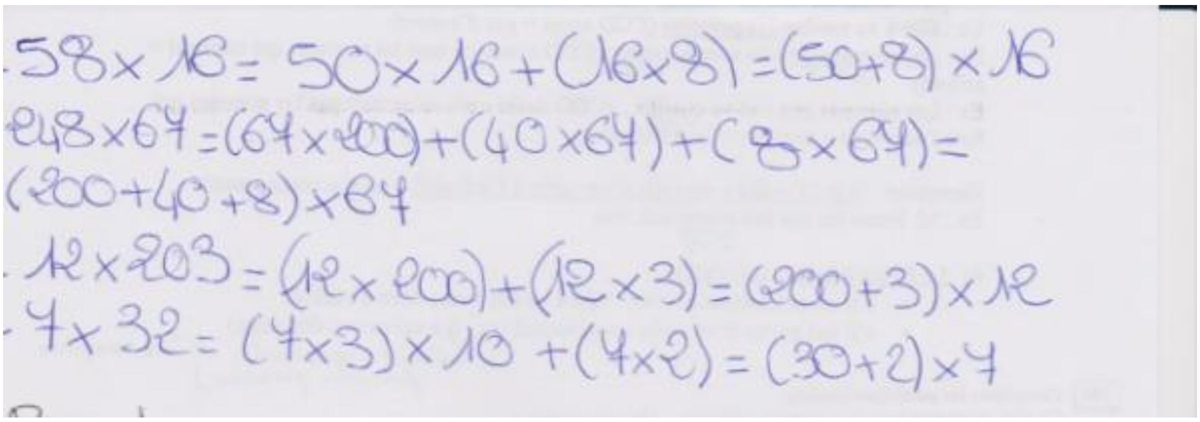
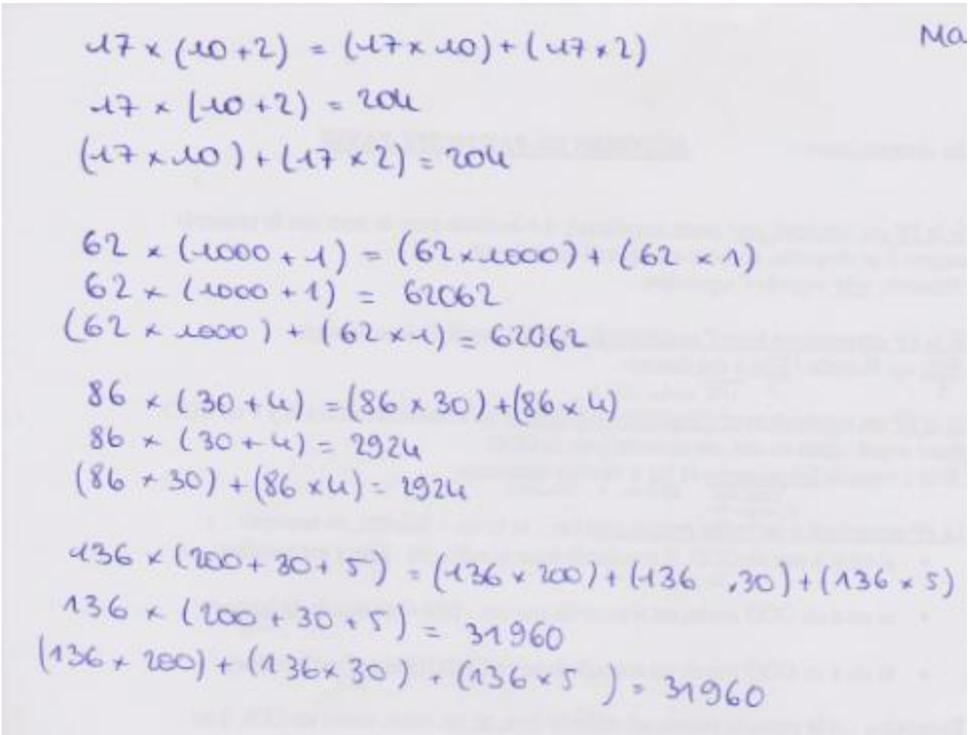

58×16 = 50×16+(16×8) = (50+8)×16
248×64 = (64×200)+(40×64)+(8×64) =
(200+40+8)×64
12×203 = (12×200)+(12×3) = (200+3)×12
4×32 = (4×3)×10 +(4×2) = (30+2)×4

Figure 3.5 – Feuille d'égalités rendues par le groupe 1

On retrouve aussi des écritures avec trois termes et non seulement deux. Par ailleurs apparaît l'égalité que nous avons étudiée lors de l'analyse *a priori* pour le produit 7×32. Cette écriture correspond à la description rhétorique, et s'éloigne quelque peu de la distributivité dans le sens où elle se conjugue à l'associativité. Ceci est en lien avec les obstacles de la numération comme nous l'avons vu, mais nous assure ici que le groupe a bel et bien tenu compte pour ce calcul, de la description, et n'agit pas par simple analogie scripturale.

Ces indices, couplés aux variables didactiques, permettent de conclure globalement que les élèves ne travaillent pas uniquement par analogie, même si elles peuvent exister. Un lien véritable se tisse entre les calculs, les écritures produites, et les techniques opératoires. Les produits initiaux continuent ainsi de servir de référence, ou de milieu, pour les formalismes.

Le dernier lien entre les dimensions sémio-linguistiques et mathématiques pour les réécritures des produits initiaux, c'est-à-dire pour la réinterprétation de ces écritures comme celles de programmes de calculs (et non celles de nombres uniquement), se fera à l'occasion des vérifications comme nous l'avons vu lors de l'analyse *a priori*.


Ma

17 × (10 + 2) = (17 × 10) + (17 × 2)

17 × (10 + 2) = 204

(17 × 10) + (17 × 2) = 204

62 × (1000 + 1) = (62 × 1000) + (62 × 1)

62 × (1000 + 1) = 62062

(62 × 1000) + (62 × 1) = 62062

86 × (30 + 4) = (86 × 30) + (86 × 4)

86 × (30 + 4) = 2924

(86 × 30) + (86 × 4) = 2924

136 × (200 + 30 + 5) = (136 × 200) + (136 ,30) + (136 × 5)

136 × (200 + 30 + 5) = 31960

(136 × 200) + (136 × 30) + (136 × 5) = 31960

Figure 3.6 – Feuille d'égalités rendue par le groupe 5 où apparaissent les vérifications

Notons que deux groupes parmi les sept de la classe, ne parviendront pas aux écritures visées. Le premier conservera les écritures des produits initiaux comme premier membre de l'égalité, et le second, celui d'Il, ne parviendra pas à surmonter les difficultés rencontrées pour écrire un enchaînement de calcul, afin de produire au moins l'un des membres de l'égalité, et ce, malgré les interventions du professeur.

Notons par ailleurs qu'un élève tombe dans le piège de l'analogie scripturale où le lien entre les membres de gauche et de droite n'est pas établi puisqu'il décompose le mauvais facteur pour les produits posés comme le montre l'extrait de son cahier suivant :

248 × 67	$\begin{array}{r} 248 \\ \times\ 67 \\ \hline 1736 \\ 14880 \end{array}$ $(7 \times 248) + (60 \times 248) = (240 + 8) \times 67$

Figure 3.7 – Extrait du cahier d'un élève du groupe 1

Diversité des écritures

A l'issue de cette séance, les égalités produites par l'ensemble de la classe montrent une importante diversité ainsi que l'analyse *a priori* le prévoyait.

On observe toutefois une certaine censure, probablement par analogie, des écritures qui relèvent d'une distributivité 'multiple'. Celles-ci apparaissent pourtant comme premières productions dans les brouillons de El qui est dans le même groupe que Ma :

4) $(5 \times 6 + 5 \times 30 + 5 \times 100) + (30 \times 6 + 30 \times 30 \times 10) + (200 \times 6 + 200 \times 30 + 200 \times 100) = (5 \times 136) + (30 \times 136) + (200 \times 136)$

Figure 3.8 – Extrait du cahier de El montrant ses égalités avant la phase collective

Cependant, les écritures définitives des cinq groupes ayant abouti montrent des distributivités par rapport à l'addition, à gauche comme à droite, des écritures dans le sens de la factorisation comme du développement, avec deux ou trois termes, et des positions géographiques flexibles au sein d'une même égalité pour un même facteur. Les extraits suivants en témoignent.

$$(2 \times 7) + (7 \times 30) = (30 + 2) \times 7$$

Figure 3.9 – Egalité produite par le groupe 1

Les facteurs 2 et 30 ne sont pas écrits dans le même ordre (2 à gauche et 30 à droite) pour chacune des sommes de chacun des membres de l'égalité. De même en est-il pour l'égalité suivante qui de plus met en scène des sommes de trois termes :

$$(2 \times 3) + (10 \times 3) + (500 \times 3) = 3 \times (500 + 10 + 2).$$

Figure 3.10 – Egalité produite par le groupe 3

On remarquera aussi que pour les égalités précédentes, le facteur commun aux produits partiels n'est pas systématiquement écrit à gauche ou à droite du signe ×.

Elles relèvent en outre d'une écriture dans le sens de la factorisation, alors qu'on trouvera aussi comme nous l'avons vu plus haut des écritures dans le sens du développement à l'instar de la suivante :

Figure 3.11 – Egalité produite par le groupe 5

Notons toutefois qu'aucune égalité concernant la distributivité de la multiplication par rapport à la soustraction n'est réussie par les groupes ayant à étudier les calculs afférents. Pour ces égalités, les écritures ne sont pas abouties. Pour l'une d'entre-elles, par exemple, il s'agit d'un effet d'analogie : $25 \times 20 - 25 = 25 \times (10 + 9)$. Pour une autre, le groupe n'est pas parvenu à modifier le membre de gauche de l'égalité dans le temps imparti, qui est resté sous la forme du calcul à effectuer : $35 \times 98 = 35 \times 100 - 35 \times 2$. Les égalités seront donc reprises lors de la dernière phase de l'institutionnalisation pour être collectivement corrigées comme nous le verrons lors de l'analyse de la séance correspondante.

Conclusion

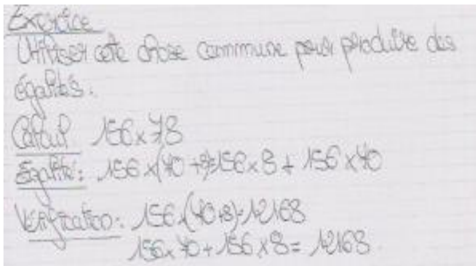
Au terme de cette analyse *a posteriori*, nous pouvons conclure que les observations sont globalement conformes à notre analyse *a priori*. Tout d'abord, la rupture de contrat essentielle concernant le statut de l'égalité, s'avère patente. Les élèves s'en emparent, avec toutes les résistances et les difficultés prévues, et parviennent à produire, pour la majorité d'entre eux, les égalités attendues. En outre, les obstacles de la numération, ainsi que l'analyse *a priori* le laissait supposer, sont loin d'être négligeables, et s'avèrent, pour un groupe, infranchissables. Les interventions du professeur n'auront certainement pas été suffisantes pour les lever pour ces derniers. Par ailleurs, la phase de correction collective joue, comme le prévoyait l'analyse *a priori*, un rôle essentiel. Les premières égalités ne montrent pas les décompositions correspondant à la propriété de distributivité visée. Dès lors, les analogies scripturales, même si elles existent, apparaissent réduites par la gestion prévue par le scenario, mais aussi par les valeurs des variables didactiques correspondantes (les décompositions à gauche ou à droite, le nombre de termes par exemple). Ces valeurs jouent un rôle déterminant : elles permettent une variété d'expressions (prévues par notre analyse *a priori*), support essentiel de la généralisation à venir. Les écritures produites au final relèvent à la fois de la distributivité à gauche, à droite, dans le sens du développement, ou de la factorisation, et peuvent montrer des sommes de trois termes.

3.2.3 Analyse a posteriori de la situation de formulation

Rappelons que cette situation de formulation s'appuie sur une photocopie de certaines égalités produites par les groupes lors de la situation précédente. Elle se déroule en trois temps. Les élèves sont tout d'abord invités à déterminer une chose commune que montrent les égalités données ensemble. Dans un second temps, le professeur demande de produire de nouvelles égalités en s'appuyant sur le discours élaboré, dont on éprouve alors une certaine fonction technologique. Les élèves doivent ensuite les vérifier, à la calculatrice. Dans un dernier temps, le professeur décontextualise les égalités en en proposant une preuve pour les entiers naturels sur un exemple générique en utilisant l'addition itérée. La situation amorce donc une situation d'institutionnalisation. Nous allons analyser la manière dont les discours émergent, et comment ils peuvent soutenir le travail mathématique demandé.

Tableau synoptique du déroulement

<table>
<tr><th>Temps</th><th>Tâches et supports</th><th>Organisation / Phase</th><th>Descriptions / Eléments technoloco-théoriques</th></tr>
<tr><td>1</td><td rowspan="5">17 × (10 + 2) = 17 × 10 + 17 × 2
62 × (1 000 + 1) = 62 × 1 000 + 62 × 1
86 × (30 + 4) = 86 × 4 + 86 × 30
68 × (10 + 1) = (68 × 10) + 68 × 1
(500 + 34) × 22 = (500 × 22) + 34 × 22
$T_{Description}$</td><td rowspan="22">Collective</td><td rowspan="5">Lecture syntaxique brute
Wil : Ben à chaque fois y'a un fois et un plus / y'a un signe égal et après y'a deux fois et un plus</td></tr>
<tr><td>2</td></tr>
<tr><td>3</td></tr>
<tr><td>4</td></tr>
<tr><td>5</td></tr>
<tr><td>6</td><td rowspan="2">17 × (10 + 2) = 17 × 10 + 17 × 2</td><td rowspan="2">Lecture horizontale : Transformation de mouvement
Elo : ben par exemple heu 10 plus 2 c'est heu c'est un peu la décomposition de 17 fois 10 et de 17 fois 2</td></tr>
<tr><td>7</td></tr>
<tr><td>8</td><td>Toutes les égalités</td><td>Généralisation</td></tr>
<tr><td>9</td><td rowspan="2">17 × (10 + 2) = 17 × 10 + 17 × 2</td><td rowspan="2">Dialectique fonction syntaxique et écriture de nombre : la question des facteurs
Clo : le 17 revient deux fois</td></tr>
<tr><td>10</td></tr>
<tr><td>11</td><td rowspan="4">Toutes les égalités</td><td rowspan="3">Généralisation
Wil : Ce qui est entre parenthèses est repris dans le calcul suivant
Dav : Oui puisque celle d'après c'est 62 qui est heu, c'est 62 qu'on reprend deux fois […] après y'a le 86, le 68</td></tr>
<tr><td>12</td></tr>
<tr><td>13</td></tr>
<tr><td>14</td><td>"le facteur qui est pas additionné"</td></tr>
<tr><td>15</td><td>(500 + 34) × 22 = (500 × 22) + 34 × 22</td><td>Parenthèses inutiles</td></tr>
<tr><td>16</td><td rowspan="7">• à chaque fois il y a un signe plus et un fois et à droite, deux fois et un plus
• il y a un seul signe égal
• à chaque fois ça reprend les facteurs entre parenthèses dans le membre de droite
• on reprend deux fois le facteur qui est pas additionné entre parenthèses, et à droite on multiplie les termes par le facteur qui est dans l'opération.</td><td rowspan="7">Reformulation</td></tr>
<tr><td>17</td></tr>
<tr><td>18</td></tr>
<tr><td>19</td></tr>
<tr><td>20</td></tr>
<tr><td>21</td></tr>
<tr><td>22</td></tr>
</table>

23	156 × 78 15 × 103 9 × 305 387 × 13 435 × 86 25 × 99 $T_{écrire} =$ $T_{vérification}$ (mathématique)	Recherche individuelle	 Exercice Utiliser cette chose commune pour produire des égalités. Calcul 156 × 78 Égalité : 156 × (40 + 8) = 156 × 8 + 156 × 40 Vérification : 156 × (40 + 8) = 12168 156 × 40 + 156 × 8 = 12168
24			
25			
26			
27			
28			
29			
30			
31			
32			
33			
34			
35			
36		Correction collective	Dialectique écriture de nombre, programme de calcul : transformation de mouvement et dénotation *"c'est juste car dans les deux calculs je trouve le même résultat "*
37			
38			
39			
40			
41			
42	$T_{vérification}$(sémio-linguistique)		Fonction syntaxique et transformation de mouvement : vérification dans la dimension sémio-linguistique
43			
44	Théorie	Dévolution	
45	Exemple générique 387 × 13 = 387 + 387 + 387 + 387 + 387 + 387 + 387 + 387 + 387 + 387 + 387 + 387 + 387 = (387 + 387 + 387 + 387 + 387 + 387 + 387 + 387 + 387 + 387) + (387 + 387 + 387) = 387 × 10 + 387 × 3	Sous la responsabilité de P / dialoguée	Dialectique sémio-linguistique / mathématique Addition itérée, associativité de l'addition sur les entiers. Généralisation
46			
47			
48			
49			
50			
51			
52			
53			
54			

Lecture syntaxique initiale

Les élèves se voient tout d'abord distribuer une photocopie des cinq égalités suivantes :

$$17 \times (10 + 2) = 17 \times 10 + 17 \times 2$$
$$62 \times (1\,000 + 1) = 62 \times 1\,000 + 62 \times 1$$
$$86 \times (30 + 4) = 86 \times 4 + 86 \times 30$$
$$68 \times (10 + 1) = (68 \times 10) + 68 \times 1$$
$$(500 + 34) \times 22 = (500 \times 22) + 34 \times 22$$

La consigne donnée d'emblée par le professeur est conforme au scénario prévu, elle met en avant l'enjeu d'unification tout en en taisant l'objet :

> P : Donc / aujourd'hui / stop / chut / l'objectif de cette séance c'est de regarder les égalités que vous avez produites / et j'en ai rassemblé / recopié un certain nombre qui montre quelque chose de commun / et l'objectif donc de cette séance c'est d'identifier cette chose commune / qu'on voit sur ces égalités / et de les rédiger / et de l'utiliser. Donc pour l'instant vous collez ce que je vous distribue / vous regardez les égalités en essayent de trouver une certaine ressemblance.

Le professeur demande bien d'identifier, et de décrire, « rédiger » dit-elle, une « chose commune » que « montrent » les égalités. Le vocabulaire employé engage donc un travail sur les ostensifs, qui comme le prévoyait l'analyse *a priori* se traduit d'emblée par des reconnaissances brutes d'ostensifs communs c'est-à-dire superposables :

> P : alors qu'est-ce que vous voyez comme chose commune ? Lis ?
> Lis : beh / les parenthèses
> P : y'a des parenthèses / est-ce que tu peux être un peu plus précise
> Dav : c'est tous des fois
> P : toi tu dis c'est tous des fois ?
> Clo : des multiplications
> Dav : c'est tous les pl / les premiers chiffres
> P : tous les premiers ?
> Dav : tous les premiers chiffres après y'a des fois
> [Chr : par contre pour le dernier c'est un moins]
> E : non pas tous
> P : Alors pas tous / mais est-ce que y'a un fois au dernier ?
> You : oui au dernier y'a un fois
> Ili : y'a qu'un signe =
> Dav : y'a qu'un chiffre
> P : Ili / y'a qu'un signe = et toi tu dis y'a des fois ? // Qu'est-ce qu'on peut dire sur ces fois Wil ?
> Wil : Ben à chaque fois y'a un fois et un plus / y'a un signe égal et après y'a deux fois et un plus

On peut noter les maladresses des interventions du professeur qui, dès la première réponse de Lis demande des « précisions » à ce qu'il est difficile de préciser : les parenthèses sont bien un ostensif commun à chaque écriture donnée. Nous y reviendrons. Cette intervention n'a cependant aucun effet immédiat, Lis n'aura pas le temps de répondre : plusieurs voix se font entendre, avec de nouvelles identifications de signes identiques ou de même nature : des chiffres, des fois, des plus, des signes =.

Ostensifs opératoires et propositionnels : des reconnaissances minimales nécessaires

Toute activité d'identification syntaxique repose bien sur une reconnaissance de signes, de symboles, préalable nécessaire à toute interprétation. Ainsi le signe = est-il bien un ostensif nécessaire à l'identification d'une proposition, de même que le signe × est nécessaire, dans le domaine numérique, pour identifier, à la fois un produit, une multiplication ou des facteurs. C'est-à-dire que toute sémantique des expressions ne saurait se construire sans examen premier de la syntaxe des écritures. Les ostensifs, +, × , = , ( ), pris isolément ne sauraient concourir à une construction sémantique unificatrice de l'ensemble de l'écriture. L'intermédiaire des fonctions syntaxiques devra jouer un rôle essentiel, qu'amènera notamment le jeu sur les variables didactiques d'écritures dans le corpus présenté.

Ostensifs des nombres et organisation spatiale dans l'écriture : obstacles et leviers

Ainsi Da montre-t-il une certaine recherche d'organisation spatiale : il repère la nature des signes écrits dans l'ordre de gauche à droite : « tous les premiers chiffres après y'a des fois » dit-il. De ce point de vue, la dernière égalité $(500 + 34) \times 22 = (500 \times 22) + 34 \times 22$, et la variable didactique correspondante jouent là un rôle important :celui de permettre aux élèves d'invalider l'écriture à gauche de chiffres, comme unificatrice, ce qui ne serait pas pertinent au regard de la connaissance visée. L'intervention du professeur permet néanmoins de valider la présence du signe fois comme chose commune (*il écrit d'ailleurs au tableau*), qui sera pertinente pour l'unification : elle prépare la reconnaissance d'un produit indépendamment de l'ordre de l'écriture (gauche ou droite) des facteurs, et par suite celle du facteur qui sera facteur commun dans le membre de droite. Mais demandant davantage : « qu'est-ce qu'on peut dire sur ces fois », le professeur obtient un dénombrement des signes : « Ben à chaque fois y'a un fois et un plus / y'a un signe égal et après y'a deux fois et un plus » répond Wil. On peut y voir la complexité de l'unification syntaxique et combien il est difficile de rentrer dans lecture sémantique signifiante, pour le professeur comme pour les élèves.

Par ailleurs, ces dénombrements de signes sont de nature à faire obstacle à une généralisation à des écritures montrant des sommes de plus de deux termes, tout comme le positionnement géographique comme indice visuel serait de nature à faire obstacle à une certaine souplesse dans les manipulations des écritures. Pourtant, ils sont à la fois des leviers pour rentrer dans une description de transformation de mouvement, c'est-à-dire d'opération portant sur les écritures. Ainsi en témoigne l'épisode suivant où Clo parle de nombre qui « revient deux fois » :

> Clo : le 17 revient deux fois
> P : Ha le 17 revient / qu'est-ce que c'est ce 17 ?
> Flo : le multiplicateur
> P : est-ce que à chaque fois ça revient deux fois ?
> *Classe* : oui
> P : non c'est pas le multiplicateur
> *Classe* : le facteur
> P : le facteur / et alors est-ce que ça ça se voit sur toutes les égalités En ?

Le professeur intervient pour généraliser *via* une identification de la fonction syntaxique de 17 (un facteur), et poser la question de l'unification. Ce faisant il écarte implicitement le nombre d'occurrences des écritures que l'élève mentionne : il « revient deux fois ». Le professeur oriente la reconnaissance sur la fonction, ou écarte (par contrat) les indices visuels non pertinents : les nombres d'apparition de signes ou de nombres. On voit là une occasion manquée dans le corpus proposé aux élèves : aucune égalité ne montre d'écritures à trois termes, alors que les élèves en ont produit lors de la situation précédente. Cela aurait pu permettre d'écarter ces reconnaissances non pertinentes mathématiquement sans le faire par contrat, mais bien dans un enjeu d'unification.

De façon concomitante pourtant, le dénombrement de signes se montrera essentiel au moment de la reconnaissance du facteur commun pour la somme écrite à droite de l'égalité :

$(500 + 34) \times 22 = (500 \times 22) + 34 \times 22$

face à la difficulté de l'identification unificatrice de sa fonction syntaxique à gauche. So par exemple identifie le facteur commun comme étant « celui qui est devant la parenthèse ». Le professeur ne relèvera pas. La dernière égalité permettra au professeur de dévoluer cette rupture de la description en termes de localisation géographique pour le membre de gauche, tout en s'appuyant, *via* une recontextualisation, sur un dénombrement :

> E : 500 est pas repris deux fois
> P : 500 n'est pas repris deux fois
> *Brouhaha* : 22
> P : mais est-ce qu'il y en a un qui est repris deux fois ?
> Classe en cœur : 22
> P : c'est 22 / alors / y'a quand même une chose commune ?
> You : 22 est repris deux fois
> P : 22 est repris deux fois Cla ?
> Cla : oui mais en fait c'est le chiffre qui est pas entre parenthèses qui est repris deux fois

Dans un mouvement d'unification, le facteur que l'on cherche à désigner est identifié comme celui qui est écrit deux fois à droite, avant de retourner après coup sur sa description à gauche. On voit la classe s'emparer de la question du facteur commun qui ne peut être désigné comme précédant la parenthèse dans ce cas. Cette description aboutirait à désigner 500 au lieu du facteur commun qui est 22. Or « 500 est pas repris deux fois ». Nous verrons par la suite à de nombreuses reprises comment les indices ostensifs pourront servir de levier à l'instar de cet épisode pour, d'une part construire une transformation de mouvement et d'autre part, en recontextualisant et décontextualisant les descriptions, permettre à la classe de se saisir de ce que l'on regarde, avant d'en extraire les fonctions syntaxiques pertinentes pour l'unification. Les écritures peuvent revêtir de multiples interprétations, et on ne sait pas toujours de façon certaine dans quelle dimension les élèves placent leur discours. La dialectique qui s'installe est complexe, et les indices ostensifs non pertinents joueront un rôle non négligeable permettant de désigner clairement ce dont on parle, ce dont témoigne l'extrait précédent dans lequel Cla fait un retour à l'indice des parenthèses. Ce retour permettra une première identification syntaxique. Nous verrons par la suite, le rôle de clarification et de support à des doubles interprétations des écritures de cet ostensif des parenthèses.

Lectures à double sens et émergence d'une transformation de mouvement dans une dialectique permanente

Lecture horizontale et mémoire didactique

C'est l'intervention d'Elo qui va modifier l'objet de l'unification, véhiculée par une nouvelle interprétation des écritures. Elle propose une lecture horizontale de la première égalité $17 \times (10 + 2) = 17 \times 10 + 17 \times 2$:

> P : Deux fois // et un plus. Quoi d'autre ? qu'est-ce qu'il y a d'autre de commun ? // Elo ?
> Elo : A la première égalité en fait / c'est pour avoir le chiffre / heu qui multiplie et ben en fait c'est entre parenthèses le chiffre qui multiplie / que à la deuxième en fait il est décomposé en deux fois ou heu en dix fois ..//..
> P : vous voyez ce dont parle Elo ?
> Classe : non

Ce glissement dans une interprétation de l'écriture du second membre de l'égalité en relation avec le premier membre apparaît comme une première étape de formulation d'une transformation de mouvement fondée, comme l'analyse *a priori* le prévoyait, sur la mémoire de $T_{écrire=}$ de la séance en groupes.

Elo essaye d'articuler du point de vue sémio-linguistique les nombres de chaque membre de l'égalité (elle parle de « la deuxième » pour désigner le membre de droite de l'égalité) et leur fonction syntaxique: « le chiffre qui multiplie » répète-t-elle. Cette expression fait visiblement référence au nombre 12 car elle mentionne le fait qu'on puisse l'obtenir par quelque chose entre parenthèses ou du moins que ce qu'il y a entre parenthèses donne le nombre : « c'est *pour avoir* le chiffre / heu qui multiplie et ben en fait *c'est entre parenthèses* » précise-t-elle par la suite. Ce faisant, c'est bien les situations précédentes de calcul et d'écriture d'égalité et donc la mémoire de l'action qui soutiennent son discours. Elle se place donc très clairement dans la dimension sémio-linguistique, tout en interprétant doublement l'écriture entre parenthèses comme écriture de nombre, et comme facteur. On voit combien il est difficile d'exprimer une certaine généralité : elle parle d'une décomposition toujours en référence au « nombre qui multiplie », donc à 12 en mêlant des opérations à une écriture de nombre : « que à la deuxième en fait il est décomposé en deux *fois* ou heu en dix *fois* ». La difficulté tient en partie à ce que les fonctions des nombres 10 et 2 sont différentes dans chaque membre : à gauche ce sont des termes d'une somme, et à droite, des facteurs de produits. La somme n'étant pas au départ identifiée comme programme de calcul mais comme changement d'écriture, il n'est pas étonnant qu'Elo la désigne comme nombre (comme 12 que l'on voit écrit d'une certaine manière entre parenthèses) et ne désigne pas 10 et 2 comme termes, mais comme décomposition. Cette complexité s'exprime aussi dans l'incompréhension manifeste du professeur comme des élèves. Elo passe donc au tableau ce qui permettra à d'autres élèves de reformuler, mais aussi d'engager une véritable dialectique avec la dimension mathématique des programmes de calcul :

> Elo : ben par exemple heu 10 plus 2 c'est heu c'est un peu la décomposition de 17 fois 10 et de 17 fois 2 //
> Da : hè ?
> *Brouhaha, chuchotements*
> Elo : c'est un peu [inaudible] et après on fait les calculs
> P : Quelqu'un peut aider Elo pour terminer sa pensée ? Chr ?
> Chr : ben 10 plus 2 ça fait 12 alors on a décomposé [inaudible]
> P : Heu je crois qu'Elo veut essayer d'expliquer le 10 et le 2 non ?
> Elo : oui voilà
> P : c'est ça ?
> Elo : voilà en fait c'est les multiplicateurs enfin c'est

Ch a visiblement perçu la référence au nombre 12 et le réinterprète du côté du programme de calcul « 10 plus 2 ça fait 12 » et mêle aussi toujours en référence à la situation de production des égalités, le travail sur les écritures : « 12 alors on a décomposé ». L'écriture 10+2 est à la fois interprétée comme nombre, comme programme de calcul, et comme écriture d'une décomposition (écriture de nombre sous la forme d'une somme). On voit ainsi comment dialoguent, de façon essentielle à la construction de la transformation de mouvement, les dimensions sémio-linguistiques et mathématiques, en dépit des difficultés de formulation. La complexité de la dialectique qui se construit se traduit par des retours à des lectures ostensives brutes, dans une recherche collective d'interprétation articulant écriture et fonction syntaxique. C'est ce dont témoigne l'extrait suivant à propos de l'autre facteur 17 :

> Elo : 17 c'est le facteur / ben en fait c'est là en fait les deux ils sont par un / et là en fait y'a deux fin

Elle identifie visiblement le fait que l'écriture 17 apparaît une fois à gauche et deux fois à droite, avec une difficulté certaine pour exprimer les produits : « ils sont par un » dit-elle, c'est-à-dire un « 17», et « les deux, ils » fait référence à la fois à l'écriture les agrégeant 10+2 puisqu' « ils sont par un » et aux nombres (puisqu'elle utilise le pluriel) 10 et 2. La difficulté tient à une intrication des dimensions, et à une dialectique entre écriture, fonctions syntaxiques et nombre. Comme elle cherche une formulation très générale répondant aussi à la consigne d'unification, le professeur comme les élèves semblent bien en peine pour comprendre ce que l'élève essaye d'identifier (un facteur commun sans doute). Ce sera l'intervention d'une autre élève qui ramènera à ce qu'Elo essayait d'exprimer en premier lieu :

> Mar : ha j'ai compris
> P : Tu as compris Mar ? Tu peux le dire autrement ?
> Mar : En fait elle dit que 10 plus 2 / ça reprend le fois 10 et le fois 2

C'est cette recontextualisation qui permettra au professeur comme à la classe de saisir quelque peu ce lien entre des nombres sans parvenir à mentionner leur fonction autrement que par les signes opératoires plus ou fois. Ce retour aux ostensifs est néanmoins essentiel pour surmonter les difficultés langagières, et permet à la classe de comprendre ce dont on parle, et avant de revenir à la formulation, d'en valider une possible unification. Bien qu'imparfaitement exprimé, et décontextualisé, cela réalise bel et bien une première étape d'identification d'une transformation de mouvement en référence aux manipulations ostensives antérieures lors des productions d'égalités (en témoignent les verbes d'action employés par les élèves) :

> P : alors est-ce que ça c'est une chose commune à toutes les égalités ?
> Classe : beh oui
> Seb : A chaque fois ça reprend
> Art : Ca fait pareil
> P : A chaque fois ça fait pareil / ça reprend Cla ?
> Cla : A chaque fois ça reprend le facteur entre parenthèses
> P : Alors ça reprend le facteur entre parenthèses
> Cla : Dans la multiplication qui suit / enfin heu / le membre de droite

Ce nouveau retour à l'ostensif des parenthèses permet de donner un nom à la dialectique entre nombre et écriture, à un moment où les élèves ne parviennent pas à interpréter de façon générale les statuts différents du signe + (comme signe de structure, ou addition). L'identification de la fonction syntaxique néanmoins va de soi, comme le prévoyait l'analyse *a priori*. On observera de nouveaux recours aux identifications ostensives brutes et à des recontextualisations avant d'aboutir à une formulation qui articule véritablement fonction syntaxique et écriture :

> P : A chaque fois ça reprend les facteurs qui sont entre parenthèses, dans le membre de droite. Clo ?
> Clo : le 17 revient deux fois
> P : Ha le 17 revient, qu'est-ce que c'est ce 17 ?
> Flo : le multiplicateur
> P : est-ce que à chaque fois ça revient deux fois ?
> *Classe* : oui
> P : non c'est pas le multiplicateur
> *Classe* : le facteur
> P : le facteur, et alors est-ce que ça ça se voit sur toutes les égalités En ?

Une difficulté de reconnaissance de forme (une étude de structure) évitée par la situation : nature et fonctions syntaxiques

La mémoire didactique joue ici un rôle essentiel dans la reconnaissance des fonctions syntaxiques, et en particulier de celle de facteur. Ainsi en témoignent de nombreuses interventions de plusieurs élèves. L'écriture parenthésée est interprétée comme facteur par Cla précédemment « le facteur entre parenthèses » dit-elle. La mémoire de production des écritures va également permettre de faire le lien, véhiculé par la décomposition, entre nombre et écriture. Ainsi, de façon cruciale, Mar va nommer la dialectique précédente :

> P : alors qu'est-ce que c'est ? ce // On reprend deux fois oui ?
> Dav : le facteur
> Art : commun
> P : est-ce qu'on peut améliorer cette phrase ? On reprend deux fois le facteur // Mar ?
> Mar : ben qui est pas additionné […]

Cette formulation « le facteur qui est pas additionné » va permettre à tous de se comprendre, de faire le lien, et de lever toute ambigüité, en dépassant la lecture syntaxique brute des signes, entre dimension mathématique et sémio-linguistique, tout en faisant encore référence au nombre *via* la situation initiale : « le chiffre qui est pas entre parenthèses » sous-entend par opposition que ce qui est entre parenthèses est aussi l'écriture d'un nombre, pour cette élève visiblement, il y a un 'chiffre' qui est entre parenthèses et l'autre qui ne l'est pas. Plus tard, la référence permettra d'identifier 17 comme « le facteur qui est dans l'opération ». Cela fait référence aux situations de calcul et à l'écriture des opérations, c'est-à-dire des produits à calculer comme 17×12, donnant par lecture directe, accès aux nombres. Or 17 ne change pas de forme d'écriture, il est donc identifié comme tel. De même il y a-t-il un « facteur qui est pas additionné » et par opposition, un facteur qui l'est. Il y a bien identification de la fonction et de l'écriture : l'un des facteurs est écrit sous la forme d'une somme et l'autre non. On voit combien cette référence forte aux produits initiaux permet aussi de rentrer dans la dimension sémio-linguistique et de dépasser les reconnaissances primaires d'ostensifs superposables pour amorcer des descriptions de transformations de mouvement, c'est-à-dire des opérations portant sur les écritures, considérées comme objet transformables : « on reprend deux fois le facteur ».

Lecture en termes de programmes de calcul en construction

On a vu plus haut Chr mentionner que 10+2 ça fait 12. La notion de terme de la somme n'aura pas émergé spontanément pour désigner 10 et 2. Les élèves seront donc poussés à une interprétation en termes de programme de calcul par le professeur pour y parvenir, mais les interventions maladroites engendreront des effets de contrat malentendu et P finira par livrer le vocabulaire après avoir demandé de reconnaître l'opération puis le nom « des nombres qu'on ajoute », sans parvenir à une réponse. Cependant, cet épisode aura pour effet de détourner la dynamique des descriptions tournées vers les programmes de calcul. Et l'intervention de P pour y retourner mêlera malencontreusement les dimensions mathématique et sémio-linguistique :

> P : Alors / comment on peut le dire du coup ? les termes ? ..//..
> *Silence*
> P : qu'est-ce qu'on fait des termes ? qui sont écrits à gauche à chaque fois ?

L'effet d'intrication sera immédiat et refera surgir les difficultés et les indices non pertinents des parenthèses :

> Wil : ils sont tous placés entre parenthèses
> P : oui ils sont tous placés entre parenthèses / et qu'est-ce qu'on fait à chaque fois à gauche ?
> Cla ?
> Cla : on le multiplie par le chiffre devant la parenthèse
> Dav : le facteur
> Mau : faut l'écrire ?
> P : non. Alors on multiplie les termes par / par quoi ?
> Classe : le facteur
> Cla : le facteur qui y'a dans l'opération
> P : le facteur qui y'a ..// qui est ..// oui qui est dans l'opération / et donc ça vous dites que ça va/ c'est ça ?

La classe parvient malgré tout à décrire un embryon de programme de calcul : « on multiplie les termes par le facteur qui est dans l'opération ». La mémoire de la situation des calculs de départ joue un rôle essentiel de levier. Cla fait référence au produit initial, c'est-à-dire à l'opération qui était donnée à effectuer lors de la première séance. On peut supposer qu'à ce moment là, elle évoque l'écriture inchangée d'un facteur, c'est-à-dire l'écriture visible, telle qu'elle apparaissait dans l'opération à effectuer lors de la première situation, l'autre facteur étant dissimulé sous sa forme décomposée. Ce faisant, les dimensions sémio-linguistique et mathématique commencent à dialoguer de façon remarquable tout en s'imbriquant dans la description. Il s'agit toutefois des premières ébauches, si les descriptions dans la dimension linguistique apparaissent partagées dans la classe, la prise en compte des nombres écrits entre parenthèses comme des termes semble l'être moins à ce stade. Ceci paraît conforme à l'analyse *a priori* : le programme de calcul évoqué est celui du membre de droite, et l'écriture à gauche n'est pas tout à fait interprétée dans la dimension mathématique.

- *à chaque fois il y a un signe plus et un fois et à droite, deux fois et un plus*
- *il y a un seul signe égal*
- *à chaque fois ça reprend les facteurs entre parenthèses dans le membre de droite*
- *on reprend deux fois le facteur qui est pas additionné entre parenthèses, et à droite on multiplie les termes par le facteur qui est dans l'opération.*

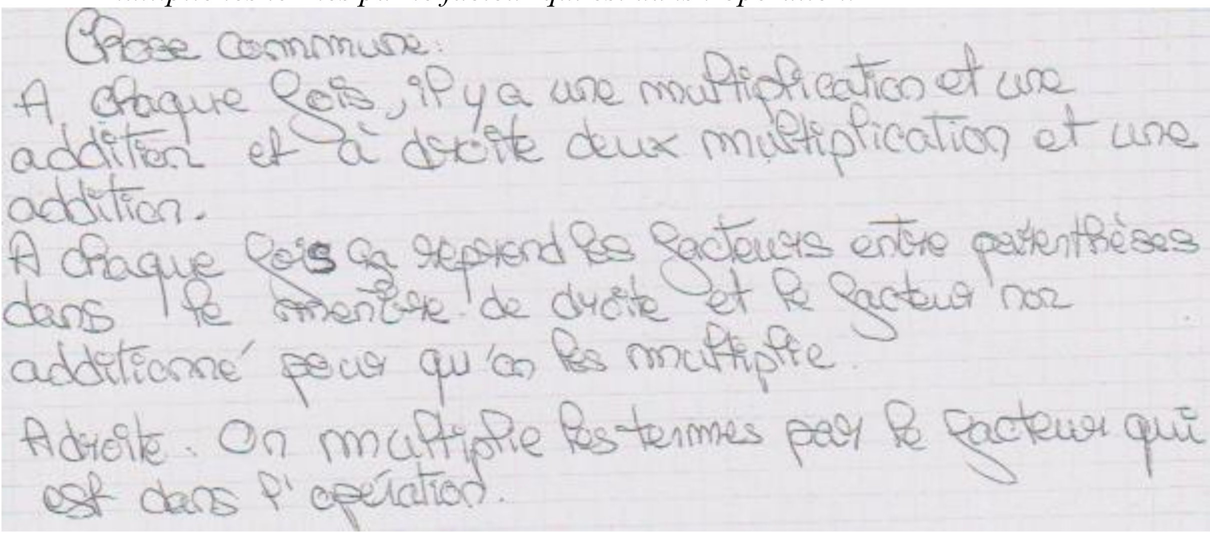

Chose commune :
A chaque fois, il y a une multiplication et une addition et à droite deux multiplication et une addition.
A chaque fois ça reprend les facteurs entre parenthèses dans le membre de droite et le facteur non additionné pour qu'on les multiplie.
A droite. On multiplie les termes par le facteur qui est dans l'opération.

Figure 3.12 – Extrait d'un cahier montrant la première description élaborée collectivement

On voit ici émerger la description d'une transformation de mouvement permettant de produire l'écriture à droite à partir de celle de gauche, même si elle est incomplète, car elle ne mentionne pas la somme des produits partiels. Les ostensifs ne sont plus désignés par leur prononciation, mais par les opérations qu'ils désignent, ce qui amorce là aussi un travail vers l'identification d'une équivalence de programmes de calcul.

Ce sera alors le second type de tâche auquel seront confrontés les élèves qui servira de levier pour modifier et compléter les discours.

Nouveau type de tâche et validation de nature double

Les élèves se voient confrontés au type de tâche $T_{écrire\ =}$ dont on veut modifier la technique : la consigne donnée exprime clairement l'enjeu de modification de la praxéologie vécue lors de la séance précédente pour essayer de se fonder sur ce premier discours construit :

> P : […] maintenant qu'on a identifié une chose commune / l'idée c'est de se demander si on peut l'utiliser pour produire des égalités / cette fois donc on n'a plus de procédure décrite de calcul mental ou de calcul posé / on a juste cette chose commune qu'on a regardée / qu'on a identifiée et est-ce que avec ça vous pouvez écrire directement des égalités ?
> Alors je vais vous proposer des calculs / et vous essayez d'écrire des égalités du même type qui montrent cette chose commune // Alors voilà le premier calcul / 156 multiplié par 78 / j'écris / calcul / et en dessous / je vous demande d'essayer d'écrire une égalité qui utilise ça

Conformément à l'analyse *a priori,* on voit un élève poser la question de la technique et envisager visiblement l'analogie scripturale :

> You : On fait comme sur la feuille l'égalité ?
> P : sur votre feuille
> You : non je veux dire comme ça ?
> P : il faut que ce soit du même type oui / qui utilise cette chose commune oui

Le professeur intervient auprès des élèves dans les deux dimensions, en faisant appel à ce qui est écrit au tableau pour valider ou non les écritures produites, et en demandant comment vérifier pour mettre à jour les programmes de calcul. Ceci correspond à ce qui est dit au moment de la mise en route, même si la conformité avec l'embryon technologique est quelque peu écartée par le professeur, certainement parce que l'enjeu est de l'utiliser comme technique :

> P : ha comment on fait pour vérifier que ce qu'on a écrit est bien une égalité / Flo ?
> Flo : d'abord on utilise heu si y'a la chose commune
> E : on fait les calculs
> P : ha la chose commune c'est pour écrire l'égalité / mais comment on vérifie que vous avez écrit quelque chose qui est bien une égalité ? Wil
> Wil : on effectue les calculs / et ceux-là et on vérifie si ils donnent le même heu…
> P : on vérifie oui que les calculs donnent le même résultat

Peut-être est-ce aussi parce que la validation dans la dimension sémio-linguistique ne pourra se faire, en toute fin, que par le professeur, compte tenu du caractère lacunaire de la description construite par la classe. Au moment de la correction, les validations par exécution des programmes de calcul se font sans accrocs. Un contrôle des écritures sera apporté par les élèves en référence au calcul. Par exemple, Il a proposé une égalité juste mais dont le facteur écrit sous la forme d'une somme n'est pas celui du calcul donné 387 × 13:

> P : d'accord / sauf qu'il y a quelque chose de bizarre dans cette égalité / regardez

X : 13 plus 2
P : 13 plus 2 oui / Mar ?
Mar : ben ça fait 15
P : oui ça fait 15 et alors ?
Mar : et alors ben
Chr : y'a pas de 15 dans la seconde
X : il aurait dû mettre 10 plus 3
(Discussions dans la classe)
P : oui il aurait dû mettre 10 plus 3
Mar : ou 11 plus 2
P : ou 11 plus 2 oui pourquoi ?
Mar : parce qu'il faut que ça fasse 13
P : oui il faut que ça fasse 13
Ch : parce que sinon ça donnerait pas le même résultat

On voit que le lien s'établit au-delà d'une décomposition fondée sur la numération : la décomposition est une autre écriture additive de nombre. Cette lecture de la dénotation est essentielle pour corriger.

Une fois les vérifications dans la dimension mathématique établies, le professeur cherche à faire formuler des vérifications dans la dimension sémio-linguistique en demandant de vérifier la conformité des écritures avec ce qui a été identifié comme chose commune. La tâche est difficile :

P : oui oui / alors maintenant / regardez vos égalités / qu'est-ce qui vous fait dire que chacune des égalités sont bien du même type que ..// ah non c'est juste on a vérifié // mais qu'est-ce qui vous fait dire que c'est bien du même type et que ça utilise la chose commune qu'on a regardée tout à l'heure ?
You : c'est pareil sauf que c'est pas les mêmes chiffres qu'avant
P : c'est pareil saut que c'est pas les même chiffres / qu'est-ce qu'on a dit de la chose commune ? Ili ?
Ili : ..//..
P : ben c'est encore écrit au tableau // Seb ?
Seb : .. //..
P : heu c'est au tableau //
Seb : (*lit le tableau*)
P : à droite on multiplie bien par le facteur qui est pas additionné / est-ce que c'est vrai à chaque fois ?
Classe : ben oui / heu / oui

Ne parvenant pas à s'emparer du discours, le professeur en est réduit à intimer une lecture de ce qui est écrit au tableau. Il y aura pourtant bien une recontextualisation mais surtout un retour aux signes pour certains élèves qui permettra de se sortir de l'impasse :

Flo : y'a une multiplication, une addition avant le signe égal et deux multiplications et une addition après

Avant de parvenir à exprimer la chose :

Mar : et on multiplie les termes par le facteur qui est dans l'opération

S'il est difficile de décrire ce que l'on fait, c'est-à-dire les gestes de production d'écriture, et la dialectique qui s'amorce, cet extrait témoigne des prémisses d'une transformation de mouvement.

Le moment théorique qui suit repose sur la définition de la multiplication par addition itérée, que donne le professeur pour un exemple générique conformément au scénario prévu. Un élève proposera spontanément de faire des regroupements :

> P : et non, non 13 fois 387 / c'est 387 plus 387 plus 387 plus
> Flo : 13 fois
> P : et oui / un deux trois quatre cinq six // (*compte les termes*)
> Art : mais ce serait pas mieux d'écrire par 5
> Wil : mais en fait on fait des regroupements
> *Discussions des élèves :*
> ouais mais c'est logique 387 / 13 fois
> P : et après vous dites ? On fait des regroupements oui / comment on fait des regroupements ? Mar ?
> Mar : on fait ben là on en prend 10 de 387
> P : on en prend 10 (*recopie les 10 premiers termes*) comment je marque que je fais un regroupement ? Comment on le marque en mathématiques qu'on le regroupe ?
> E : égal / heu / non
> P : non on on met des parenthèses pour dire qu'on regroupe / donc on en regroupe 10 et après ? (*répétant un élève*) on en regroupe 3.

Il semble que la classe s'empare sans difficulté de la preuve proposée par le professeur sur cet exemple générique. P fait de plus formuler que le regroupement repose sur une propriété de l'addition dont on sait « qu'on peut l'effectuer dans n'importe quel ordre ». Le professeur évoque ensuite une extension à d'autres nombres entiers des décompositions pour généraliser cette preuve :

> P : 387 multiplié par 3 / 3 fois 387 / et entre les deux c'est une addition donc on ajoute ces deux là mais alors on se retrouve avec 387 multiplié par 13 qui est la même chose que 387 multiplié par 10 plus 3 égal 387 multiplié par 10 plus 387 multiplié par 3. Ce qui explique ça c'est cette décomposition là. C'est la définition de la multiplication. Alors évidemment on imagine bien que si c'était 65 par 13 //
> [Inaudible]
>
> P : oui oui on écrirait 65 plus 65 plus 65 // si c'était 83 multiplié par 28 ?
> Classe : 83 plus 83

La séance se clôture par la recopie.

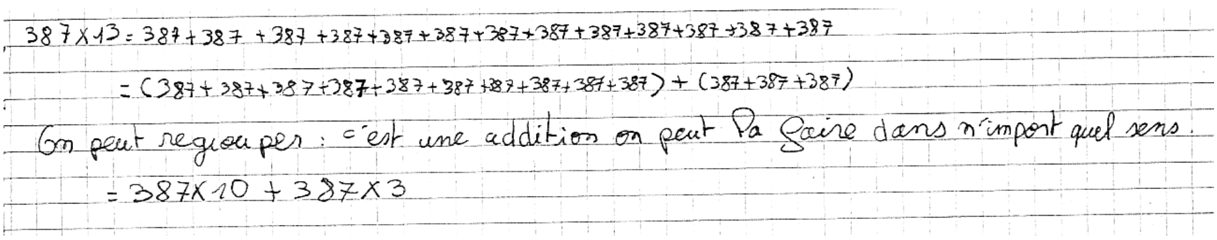


Figure 3.13 – Extrait de cahier, preuve sur un exemple générique

Conclusion

Ainsi que l'analyse *a priori* le prévoyait, les reconnaissances syntaxiques brutes apparaissent premières dans le travail d'unification. Pourtant, elles évoluent grâce au rôle joué par les variables didactiques, et les localisations géographiques de certaines ostensifs. La mémoire des situations précédentes de calcul, et d'écriture d'égalités permet de façon remarquable de faire basculer les discours et d'amorcer une unification autour de fonctions syntaxiques. Les difficultés langagières sont importantes. Les recontextualisations sont alors déterminantes, en appui sur des ostensifs pour permettre à l'ensemble de la classe de se saisir de ce dont on parle. Elles permettent ensuite de reprendre les discours et de faire émerger des dialectiques qui s'esquissent entre transformation de mouvement, programme de calcul, interprétations en termes de fonctions syntaxiques ou d'écritures de nombres des sous-expressions. Les références fortes aux situations antérieures sont essentielles dans ce travail. Les difficultés tiennent à l'intrication des dimensions sémio-linguistique et mathématique pour le professeur comme pour les élèves, mais il n'en demeure pas moins que les descriptions amorcées réalisent une première étape d'identification de transformation de mouvement, et d'unification des égalités.

Enfin, les extraits de cahiers que nous avons pu collecter permettent d'entrevoir une possible souplesse dans les écritures produites pour les nouvelles égalités demandées. Nous n'avons que des extraits de 8 cahiers. Parmi ceux-ci, l'on observe des écritures qui tendent, très normalement, à se normaliser du point de vue syntaxique. Subsistent néanmoins pour deux d'entre eux des écritures souples du point de vue syntaxique. On trouvera en annexe les extraits correspondants montrant que les facteurs ou les termes peuvent être écrits à gauche ou à droite indifféremment à l'instar de l'exemple suivant :

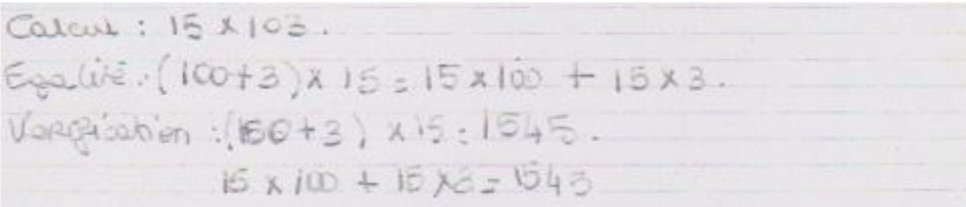


Figure 3.14 – Extrait de cahier, persistance d'une certaine souplesse des écritures

Les décompositions en somme relèvent néanmoins uniquement du membre de droite, pour ces cahiers comme pour ce qui apparaît en classe, ce qui s'explique certainement par les valeurs des variables liées aux nombres choisies, avec la majorité des égalités observées lors de cette séance.

3.2.4 Analyse a posteriori de la situation d'institutionnalisation

Cette situation occupe deux parties de séances. La quatrième séance enregistrée que nous présentons tout d'abord, ne dure que 26 minutes (la première partie de l'heure a été consacrée à de la géométrie et n'a pas été enregistrée). Elle est consacrée à l'élaboration d'un théorème sous trois formes différentes. Elle est complétée par une seconde partie d'une autre séance qui dure 25 minutes, et qui termine la situation d'institutionnalisation en étendant et en généralisation le théorème élaboré.

Tableau synoptique du déroulement

<table>
<tr><th>Temps</th><th>Tâches et supports</th><th>Organisation / Phase</th><th>Descriptions / Eléments technoloco-théoriques</th></tr>
<tr><td>1</td><td rowspan="19">Ecrits de la séance précédente : chose commune et preuve

$T_{description}$</td><td rowspan="5">Collective / Rappels</td><td rowspan="5"></td></tr>
<tr><td>2</td></tr>
<tr><td>3</td></tr>
<tr><td>4</td></tr>
<tr><td>5</td></tr>
<tr><td>6</td><td rowspan="5">Dévolution / Généralisation</td><td rowspan="2">P :et les autres types de nombres ?
You : en fractions ?
P : ha, et en fractions ?
X : décimal ?
P : et les nombres décimaux ?
You : on peut pas le faire</td></tr>
<tr><td>7</td></tr>
<tr><td>8</td><td rowspan="3">P : Alors You dit pour 10,6 on pourrait dire que c'est 10 plus 0,6 vous êtes d'accord ?
Classe : oui
P : oui oui bien sûr mais la question qui se pose c'est que puisqu'on peut pas écrire cette preuve est-ce qu'on peut quand même écrire des égalités du même genre que ce qu'on a écrit depuis le début
[...]donc cette chose commune, <u>on l'admet</u> qu'elle permet aussi d'écrire des égalités avec ces autres types de nombres et en fait avec tous les types de nombres</td></tr>
<tr><td>9</td></tr>
<tr><td>10</td></tr>
<tr><td>11</td><td rowspan="16">Collective</td><td rowspan="7">Généralisation et Formalisation
Programmes de calculs équivalents

Théorème
Additionner puis multiplier est équivalent à multiplier le facteur par les thermes puis additionner les deux produits
Nouveau formalisme /Egalité et transformation de mouvement</td></tr>
<tr><td>12</td></tr>
<tr><td>13</td></tr>
<tr><td>14</td></tr>
<tr><td>15</td></tr>
<tr><td>16</td></tr>
<tr><td>17</td></tr>
<tr><td>18</td><td rowspan="5">Le produit d'un facteur par une somme est égal à la somme des produits de ce facteur par chacuns des thermes.

Nouveau formalisme /Ecriture algébrique</td></tr>
<tr><td>19</td></tr>
<tr><td>20</td><td rowspan="4">Deuxième formalisme du théorème (structural)</td></tr>
<tr><td>21</td></tr>
<tr><td>22</td></tr>
<tr><td>23</td><td rowspan="4">En math on utilise un écriture symbolique pour traduire et résumer ce théorèm. On utilise des lettres pour désigner n'importe quel nombre
$u \times (a+f) = u \times a + u \times f$
Dialectique et lectures multiples</td></tr>
<tr><td>24</td><td rowspan="3">Premier formalisme (PC équivalents) et écriture algébrique</td></tr>
<tr><td>25</td></tr>
<tr><td>26</td></tr>
</table>

1	Cahiers	Collective / Rappels	Théorème / dialectique entre formulation et compléments : *P : ha c'est pas u fois f à la fin tu dis ?* *So : ça donne pareil de toute façon* *[…]M : on sait toujours qu'on commence par la multiplication* *[…]Flo : parce que l'addition n'a pas de sens*
2			
3	Au tableau : $u \times (a + f) = u \times f + u \times a$		
4			
5			
6	Calculer : 34 × 102 et 57 × 6 Compléter les égalités 6 × (a + 4) = 5 × (7 + b) = (3 + a) × 4 = 36 × 235 = T_{calc_m} / $T_{écrire\ =}$	Individuel	
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14		Correction collective	Théorème et recontextualisations / Dialectique écriture / Programmes de calcul *M : parce que c'est la même chose qu'a fait Chr et c'est le théorème* *[…]Flo : oui additionner puis multiplier est équivalent à multiplier le facteur par les termes puis additionner les deux produits*
15			
16			
17			
18			
19			
20			
21			
22			
23	136×235 = 136×230 + 136×5 136×235 = 136×200 + 136×35 136×235=136×200+136×30+136×5		*P : normalement y'en a deux ? qu'est-ce qu'il dit le théorème ?* *X : on est pas obligé de faire deux* *P : ha il dit qu'on est pas obligé de faire deux / qu'est-ce qu'il dit ? Cl ?* *Cl : il dit additionner puis multiplier* *P : additionner puis multiplier / est-ce que on a bien une addition donc à gauche /elle est pas écrite / mais qui correspond à celle là qu'est-ce que c'est l'addition ? qu'est-ce que c'est l'addition qui est pas écrite ? (écrit sous la dictée d'un élève) 200 plus 30 plus 5 et qui serait multiplié par combien ?* *Classe : 136*
24			
25			

Les techniques de vérification comme levier pour construire un discours dans la dimension mathématique

Le travail débute par un rappel de la séance précédente par le professeur et avec les élèves. Comme les types de tâches de vérification sont certainement plus aisés à décrire, c'est ce que choisit de répondre En interrogé :

> P : oui ..//.. devant vous / vous devez avoir la liste des égalités qu'on avait regardées. Qu'est-ce qu'on avait regardé sur ces égalités Enz ?
> Enz : si elles étaient bien égales
> P : comment on fait pour vérifier qu'elles sont bien égales justement ?
> Classe : on calcule
> Enz : [*inaudible*]

P : Sop ?
Sop : on fait le calcul à la calculatrice
P : quel calcul on fait à la calculatrice ? Elo ?
Elo : on fait le membre de droite, on regarde le résultat, et après on compare avec le résultat du membre de gauche
P : on compare avec le résultat du membre de gauche / chhh / retourne toi. Bon elles étaient bien égales / et qu'est-ce que je vous avais demandé de regarder sur ces égalités ? Wil ?
Wil : une chose commune
P : y'avait une chose commune / qu'est-ce que c'était cette chose commune ?
Chr : le fait qu'elles avaient deux …
P : Chr ? tu peux le dire
Chr : le fait qu'elles étaient toujours la même répétition de calcul

On voit ici que Chr propose, peut-être parce qu'on vient d'évoquer des programmes de calculs pour la praxéologie de vérification, de s'engager dans une lecture dans la dimension mathématique, avec l'idée de programmes de calculs communs. Après avoir retrouvé avec les élèves la preuve et admis une généralisation pour les autres types de nombres, que les élèves énumèrent (nombres décimaux, en écriture fractionnaire), conformément au scénario, le professeur retourne sur le discours à élaborer sous la forme d'un théorème, c'est-à-dire :

[…] une propriété qui est vraie pour tous les types de nombres, et qui explique la chose commune qu'on a vue / et que cette chose commune elle produit / et c'est ce que disait Chr tout à l'heure / c'est des types de calculs qui sont toujours les mêmes à chaque fois et qu'on dit en mathématiques équivalents / puisqu'ils donnent toujours le même résultat. Alors comment on pourrait écrire cette propriété ?

P s'appuie sur l'intervention de Chr pour amorcer une description de programmes de calculs (types de calculs dit-elle) équivalents. Cette formulation est nouvelle, et il n'est pas évident de s'en emparer, en témoigne le sujet indéfini employé par Mar aussitôt :

Mar : les équivalents… [donnent toujours la même chose, le même résultat ?]
P : de quoi tu parles quand tu dis les équivalents ?
[Inaudible]
Mar : deux fois les multiplications plus l'addition

On retrouve ici ce que prévoyait l'analyse *a priori* : seul le membre de droite est considéré *a priori* comme un programme de calcul. C'est le premier qui est décrit. Et c'est le professeur qui pousse à interpréter également le membre de gauche comme un programme de calcul :

P : alors deux fois les multiplications plus l'addition / ça c'est ce qu'il y a dans quel membre ?
Classe : à droite
P : à droite / et dans le membre de gauche qu'est-ce qu'il y a
Enz : une multiplication et une addition
P : une multiplication et une addition / En peut-être qu'on peut le dire mieux que à gauche y'a une multiplication et une addition qui est équivalente à deux multiplications et une addition / comment est-ce qu'on pourrait le dire mieux / Mar
Mar: si heu heu ben l'enchaînement heu y'a l'opération heu qui donne le bon résultat / heu les équivalents de la multiplica // tion et de // l'addition heu sss..

Le professeur demande de « dire mieux », sans qu'une telle injonction ne puisse donner d'indication sur ses attentes. La difficulté tient à ce qu'en l'absence d'évocation des nombres, le lien n'est pas fait entre les membres de gauche et de droite. Mentionner les opérations ne suffit pas. On observe une certaine difficulté pour manier le mot équivalent et la structure binaire ou symétrique d'une phrase à construire avec : commencer la phrase par « les équivalents » semble difficile et surtout ne permettra pas une adéquation spatiale avec l'écriture et la lecture de l'égalité. C'est donc le professeur qui prend la main pour guider l'identification du programme de calcul par étape en s'appuyant sur les priorités. Il semble implicitement rejeter, à cause des priorités et de la temporalité sous-entendue par 'et', la proposition de En (une multiplication et une addition) sans pourtant le dire clairement :

> P : (*écrit au tableau « est équivalent »)* alors / non / on va le construire ensemble d'abord / l'idée que dit Chr et Mar / c'est que à gauche on a un certain type de calcul avec une addition et une multiplication et à droite / et c'est équivalent à ce qu'il y a à droite / seulement il faudrait décrire un peu mieux ce qu'il y a à gauche / on peut pas dire c'est une multiplication et une addition / d'ailleurs on commence par quoi ? à gauche ?
> Classe : addition
> P : l'addition, pourquoi on commence par l'addition à gauche ? You ?
> You et Classe : parce que c'est entre parenthèses
> P : parce que c'est entre parenthèses / alors du coup on additionne et après ?
> Classe : on multiplie
> P : on multiplie (*écrit en même temps au tableau « additionner puis multiplier »*) alors additionner puis multiplier / ça revient à faire quoi ?
> You : à faire l'opération
> P : pardon / je dis ça revient à mais c'est pas ça / c'est à gauche on additionne d'abord et ensuite on multiplie et c'est équivalent à droite à chacune des égalités qu'est-ce qu'on fait ?
> Classe : on écrit le nombre fois
> P : alors c'est le nombre / ce nombre comment il s'appelle ?
> Classe : le terme
> P : non
> Classe : le facteur
> P : c'est le facteur / et qu'est-ce qu'on en fait de ce facteur ?
> Classe : on multiplie par les termes
> P : on multiplie alors (*écrit en même temps*) multiplier le facteur par les termes, et après qu'est-ce qu'on en fait une fois qu'on a fait les multiplications ? à droite qu'est-ce qu'on fait une fois qu'on a fait les multiplications ?
> *Murmures* : les produits, on ajoute
> P : regardez sur votre cahier, vous avez les exemples sur votre cahier
> *Classe* : on ajoute
> P : oui on ajoute / alors du coup // (*relit le tableau*) additionner puis multiplier c'est équivalent à multiplier le facteur par les termes … et après ? Cla ?
> Cla : additionner les produits
> P : additionner les produits / et ben voilà ça c'est un théorème

La construction est collective et l'identification de l'écriture à gauche comme programme de calcul ne semble pas poser de problème. Le professeur rebondit ensuite sur la question d'un élève quant au sens à donner à « équivalent » :

> P : (*reprend une question d'élève en aparte*) qu'est-ce que ça veut dire est équivalent ici ?
> Classe : c'est à peu près la même chose, c'est comme si, c'est égal
> P : non c'est pas égal
> X : comme si
> P : non / ce sont des calculs équivalents / qu'est-ce que ça veut dire que ce sont des calculs équivalents ? Cla ?
> Cla : ça veut dire qu'ils donnent le même résultat
> P : ça veut dire qu'ils donnent le même résultat / alors on va l'écrire en plus (*écrit en même temps*) des calculs équivalents sont des calculs qui donnent le même résultat

Ainsi reprend-il la proposition de l'égalité pour proposer de construire une seconde formulation :

> P : Maintenant si vous voulez parler d'égalité / alors il faut le dire autrement / on dit pas additionner puis multiplier / c'est pas ça / à gauche qu'est-ce que c'est qu'on a ? comme structure ?
> X : un enchaînement d'opérations

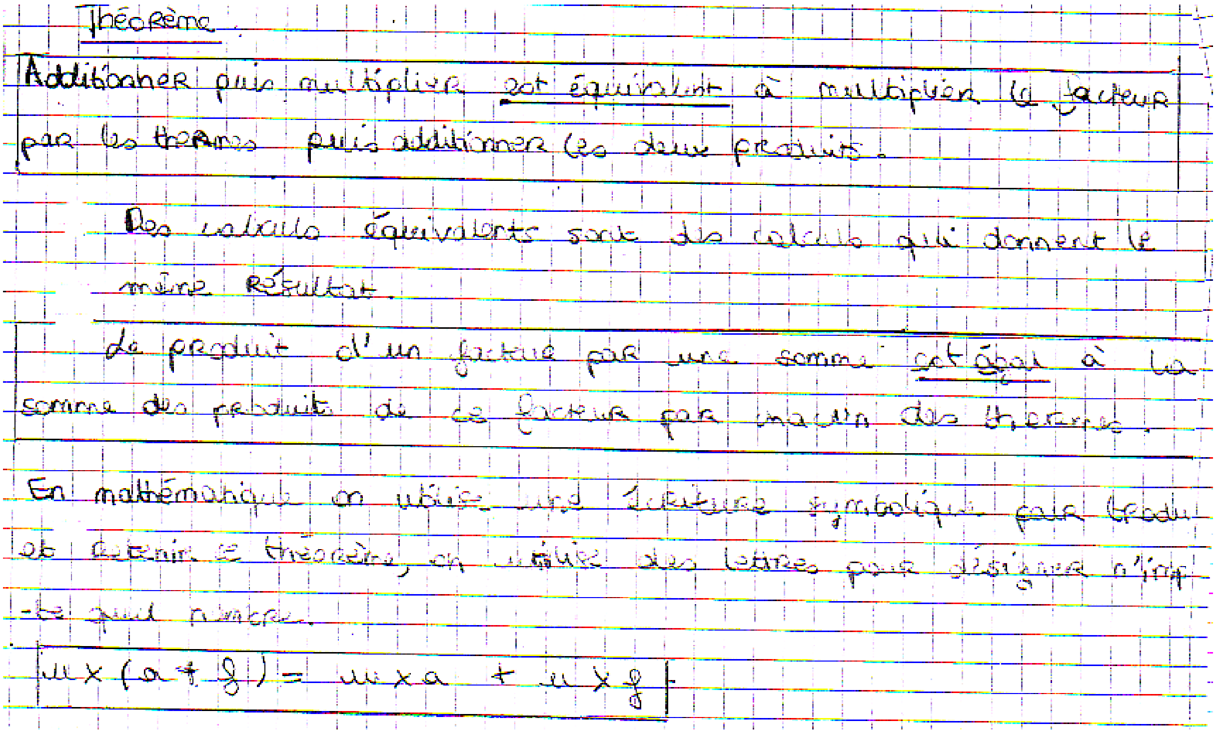
P : c'est un enchaînement d'opérations et qu'est-ce que c'est comme type d'enchaînement d'opérations ?
Dav : une multiplication
P : alors c'est pas une multiplication on dit ?
Dav : un facteur / un nombre ?
P : comment ça s'appelle ?
Enz : un produit

On retrouve ici l'évitement de la difficulté de reconnaissance de structure certainement par mémoire didactique : Dav identifie bien une écriture d'une multiplication, et après l'intervention du professeur, reste dans le registre de la multiplication même s'il mésinterprète les attentes de P. Cette référence aux produits initiaux ne permet pas d'éviter le travail de reconnaissance de structure pour le membre de droite. Ainsi cela prend-il un peu plus de temps, le professeur ne mentionne aucune technique afférente, et réfute par exemple la première proposition de Wil qui visiblement utilise les signes qu'il lit dans l'ordre de gauche à droite :

Wil : le produit d'un facteur par une
P : et non c'est pas des produits par une somme justement
Mat : la somme de heu…
P : c'est la somme
Mat : des facteurs des produits
P : la somme des produits de ce facteur par quoi ?
Classe : les termes
P : oui par les termes, par chacun des termes, là cette fois on parle d'égalité, c'est une autre façon de dire le théorème donc vous avez une égalité ici qui correspond à une équivalence de programmes de calculs (*souligne les mots égalité et équivalent*)
Mar : en fait là ça veut dire celle là mais en autre phrase

Utilisation de l'écriture algébrique comme formalisatrice, généralisatrice et unificatrice

L'écriture algébrique est introduite ici comme un nouveau formalisme, qui doit permettre de retrouver, et qui est soutenu par, le discours construit, c'est-à-dire le théorème écrit sous les deux formes précédentes :


Théorème

Additionner puis multiplier est équivalent à multiplier le facteur par les termes puis additionner les deux produits.

Des calculs équivalents sont des calculs qui donnent le même résultat

Le produit d'un facteur par une somme est égal à la somme des produits de ce facteur par chacun des termes.

En mathématiques on utilise une écriture symbolique pour traduire et retenir ce théorème, on utilise des lettres pour désigner n'importe quel nombre.

$u \times (a + g) = u \times a + u \times g$

Figure 3.15 – Extrait de cahier, théorème

Le professeur explicite ainsi :

> P : non bien sûr / on n'apprend pas par cœur des choses comme ça / en mathématiques évidemment chut / chut / Enz / évidemment vous allez pas apprendre tout ça par cœur / par contre il faut pouvoir le retrouver / en mathématiques on a une façon de l'écrire autrement […] en mathématiques on a une écriture symbolique qui permet de retrouver cette formulation qui permet de le retenir. Les écritures symboliques en mathématiques évidemment le produit ça s'écrit (*écrit* ×) comme ça
> X : fois
> P : oui / d'un facteur / alors le problème c'est que pour désigner n'importe quel nombre et pour montrer cette généralité ces théorèmes ils sont valables pour tous les types de nombres
> Elo : *x*

Le caractère généralisateur de l'écriture apparaît, la lettre généralise le nombre, elle a un statut de nombre indéterminé. Se pose alors la question de la représentation de nombres différents par des lettres différentes :

> Dav : u plus u
> You : u fois u plus u
> P : mais non / on peut avoir des nombres différents
> *Classe* : a plus b /f / g ..//.. e madame

Conformément au scénario, le professeur guide la classe pour construire l'écriture à partir de la lecture du théorème sous sa deuxième version, en reposant la question des parenthèses nécessaires ou non, puis demande à la classe de vérifier que l'écriture produite correspond aussi au premier formalisme, en ré-interprétant l'écriture comme celle de l'équivalence de deux programmes de calcul :

> P : alors du coup cette égalité / quand on lit cette égalité on peut se souvenir de la phrase (*montrant le tableau*) c'est un produit d'un facteur par une somme qui est égal à la somme du produit de ce facteur par chacun des termes / et ça par contre / cette égalité là / tiens est-ce que elle correspond aussi à ce qu'on a écrit comme théorème ?
> *Brouhaha*

P : on le lit ? additionner // qu'est-ce qu'on additionne ici ?
Classe : *a* et *f*
P : *a* et *f* / donc deux nombres d'accord / puis multiplier
Classe : par u
P : d'accord est équivalent
You, Mar, Classe : égal
P : ça veut dire que ça donne le même résultat / à multiplier le facteur
Dav : *u*
Classe : *u*
P : c'est bien *u* / par les termes
Chr : *a* et *f*
P : *a* et *f* qu'on multiplie bien par le facteur puis additionner les deux produits / oui ça correspond bien / alors vous écrivez

Des implicites malgré tout : une unification et une généralisation premières

La première formulation correspondant à l'équivalence de deux programmes de calcul conserve des éléments insuffisamment généralisés compte tenu du projet d'enseignement, et de ce point de vue diffère quelque peu du scénario prévu. Néanmoins elle correspond bien au choix de ne pas faire apparaître d'égalités montrant des sommes de plus de deux termes. Le nombre de termes apparaît dans le premier formalisme : on parle d'additionner les *deux* produits. Par ailleurs, il y a un certain implicite quant à la référence au facteur : « Additionner puis multiplier est équivalent à multiplier le facteur par les termes puis additionner les deux produits ». Le facteur peut désigner la somme ou non. De ce point de vue, les élèves levaient l'implicite lors des phases orales en parlant du facteur qui n'est « pas additionné ». La seconde formulation est peut-être plus explicite, même si la somme est aussi un facteur … néanmoins, l'explicitation exigerait que l'on mentionne aussi, pour chaque fonction syntaxique, la référence à la sous-expression correspondante : on ne saurait parler de terme sans mentionner la somme dont il est le terme. La question qui se pose alors est celle de l'influence, ou non de ces implicites sur les apprentissages.

La seconde formulation est plus générale que la première, elle ne mentionne pas le nombre de termes par exemple, remarquons aussi qu'elle ne mentionne pas la nature de ce qu'on additionne ou multiplie (celle-ci pouvant être nombre ou somme par exemple). Néanmoins, compte tenu de ce qui a été construit, les programmes de calculs s'appliquent implicitement et nécessairement sur des nombres ici. Les lettres revêtent un premier caractère unificateur et généralisateur de nombres.

La question de l'écriture algébrique et d'une possible rigidification

La sonnerie arrête à ce moment là le travail. L'écriture algébrique vient repositionner géographiquement les termes et les facteurs, alors que le formalisme rhétorique permettait de s'en affranchir. La question de ces places et donc de la flexibilité de l'écriture que soutiennent les premiers formalismes et moins l'écriture algébrique ne se posera pas à ce moment-là. La séance suivante montre que la flexibilité des écritures perdure, avec des questionnements que les formulations rhétoriques accompagnent d'un point de vue technologique. C'est ce que nous allons voir maintenant.

Nous passons maintenant à la seconde séance relative à la situation d'institutionnalisation qui occupe les 23 minutes d'un cours suivant de la classe. L'épisode débute par un rappel au théorème sous les trois formulations.

Un complément technologique pour la flexibilité des écritures

On y voit une élève, Ame, rappeler le théorème sous la forme d'une équivalence :

> Ame : qu'on peut additionner et multiplier et ça revenait au même que si on multipliait le facteur heu par les termes heu ? par chacun des termes
> P : si on multipliait le facteur par chacun des deux termes oui / d'ailleurs on disait pas ça revient au même mathématiquement on disait ?
> *Classe* : équivalent

A a en réalité omis la dernière étape du second programme de calcul qui consiste à ajouter les produits obtenus, le professeur corrigera le vocabulaire portant sur l'équivalence, mais ne complète pas la formulation de Ame. Cependant, avec l'aide du cahier, Wil énonce la seconde formulation intégralement :

> Wil : le produit d'un facteur par une somme (*ne lit pas mais s'arrête*)
> P : le produit d'un facteur par une somme est égal à ?
> A et Wil : (*en lisant*) à la somme des produits par chacun des termes.

Le rappel de l'écriture algébrique est alors, de façon contingente, l'occasion d'un questionnement autour de la syntaxe :

> P : on a dit u multiplié par ?
> Classe : entre parenthèses a plus f // égal u fois f plus u fois a
> P : (*écrit au tableau* $u \times (a + f) = u \times f + u \times a$) et ça
> X : c'est une égalité
> P : ça correspond bien au théorème ?
> Classe : oui
> P : vous pouvez expliquer pourquoi ?
> Sop : c'est pas un *f* à la fin ?

Le professeur écrit sous la dictée des élèves, et on entend un élève dicter les produits partiels sans que les facteurs issus de la somme écrite à gauche apparaissent dans le même ordre, de gauche à droite, pour l'écriture du membre de droite. L'égalité écrite au tableau ne correspond pas à l'écriture de la séance précédente, et donc à celle probablement de la plupart des cahiers (mais parmi les 7 cahiers recueillis, on trouve une écriture avec la lettre *x* à la place de *u* par exemple, ce qui permet de penser que certains élèves prennent des libertés par rapport aux traces écrites du tableau). P reprend alors l'intervention de Sop pour éclairer et valider l'écriture par la propriété mathématique de la commutativité de l'addition (même si elle n'est pas ainsi dite) :

> P : ha c'est pas *u* fois *f* à la fin tu dis ?
> Sop : ça donne pareil de toute façon
> P : ça donne pareil ?
> Enz : je croyais que / moi sur mon livre j'ai inversé le *a* et le *f*
> P : oui mais j'ai écrit ce que dictait heu ..//.. mais est-ce que c'est important d'inverser le *a* et le *f* ?
> Classe : non c'est la même chose
> P : pourquoi c'est la même chose ?
> *Brouhaha*
> P : chut / Mar ?
> Mar : on sait toujours qu'on commence par la multiplication donc heu on est obligé de faire les multiplications
> X : on commence par les multiplications
> P : on commence en effet par les deux multiplications / donc c'est bien les deux mêmes multiplications / et après qu'est-ce qu'on fait ?
> Flo : on ajoute

P : on ajoute Flo / et alors ? est-ce que ça revient au même ?
Classe : oui
P : oui / pourquoi Flo ?
Flo : parce que l'addition n'a pas de sens
P : oui / l'addition n'a pas de sens on peut le dire comme ça / donc là on a bien deux multiplications et on ajoute et on a dit dans le théorème / Cla

Cet épisode est de nature à modifier le rapport aux écritures littérales eu égard aux formulations rhétoriques : celles-ci sont plus souples, et jouent un rôle technologique soutenant différentes écritures pour une égalité relevant du même genre, de sorte que le discours revêt un caractère unificateur des écritures. On justifie du même coup les équivalences des programmes de calculs sous différentes écritures du point de vue mathématique que véhicule la commutativité de l'addition : il y a bien ici de nouveau ce dialogue entre les dimensions sémio-linguistiques et mathématique soutenant les manipulations. On observe les élèves s'emparer du discours construit, même si cela reste difficile (outre les omissions et implicites, qui relèvent sans doute d'un phénomène naturel, et nous reviendrons sur ce point, mais qui ne font pas nécessairement obstacle à une convocation complète future au moment où cela peut se révéler nécessaire, c'est-à-dire utile). Ainsi en témoigne l'extrait suivant :

Cla : additionner puis multiplier revient à mult heu addit // heu multiplier le facteur par heu non à additionner le facteur par celui qui ..//.. (*se résoud à lire sur le cahier*) additionner puis multiplier est équivalent à multiplier le facteur par chacun des termes puis à additionner
P : Comment est-ce qu'on peut le retrouver en regardant ça alors ?
Elv : on fait l'opération dans la tête / on sait qu'on commence par l'addition / donc on fait additionner puis multiplier
P : oui / et après qu'est-ce qu'on dit ?
Cla : est équivalent donc est égal à addit..//.. heu
P : non à droite qu'est-ce qu'on fait en premier ?
Classe : on multiplie
P : on multiplie
Classe : le facteur
P : le facteur / ici c'est quelle lettre ?
Classe : u
P : u / par chacun des termes / c'est quoi chacun des termes ?
Dav : *a* et *f*
P : *a* et *f* oui, qu'est-ce que c'est déjà les termes ? Mat ?
Mat : c'est dans les additions
P : c'est ce qu'on additionne d'accord

Les hésitations sont nombreuses, mais la reconstruction est bien collectivement assumée, avec ce lien entre les formulations, les priorités et les écritures.

Réorganisation des connaissances : reconstruction des praxéologies de calcul mental et d'écriture d'égalité

Les élèves sont donc confrontés à T_{calc_m} consistant à calculer mentalement le produit de deux entiers. La technique $\tau_{calc\_m}^{+}$ est toujours la même que pour la première séance : décomposer l'un des facteurs sous la forme d'une somme puis calculer la somme des produits de l'autre facteur par chacun des termes. Etant donné le type de tâche, les traces écrites dont les élèves éprouvent le besoin sont diverses. On voit parfois uniquement le résultat final, parfois les résultats intermédiaires avec ou sans écriture des produits partiels. Conformément aux techniques anciennes néanmoins, l'écriture sous la forme d'un produit par une somme est absente, du moins pour ce qui est des sept cahiers recueillis :

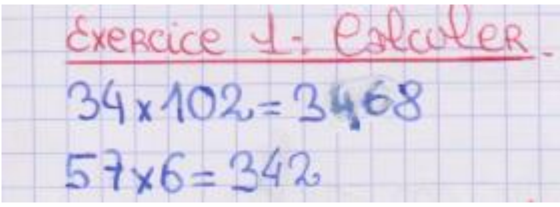


Figure 3.16 – Extrait de cahier montrant uniquement les résultats

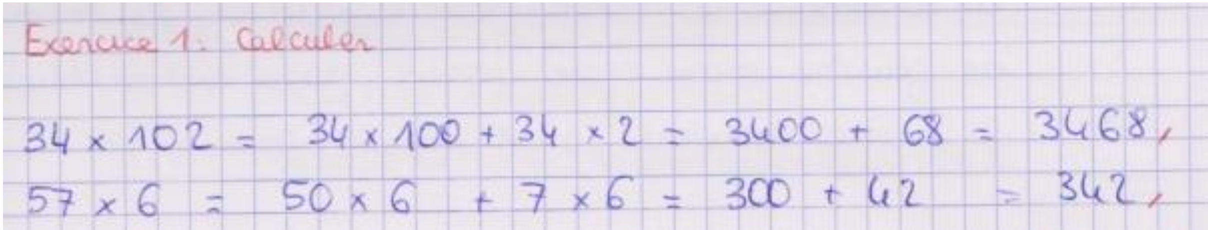


Figure 3.17 – Extrait de cahier montrant les produits partiels

L'un des cahiers toutefois montre, comme en une prise de note, l'écriture de la décomposition au dessous du travail permettant d'obtenir le résultat.

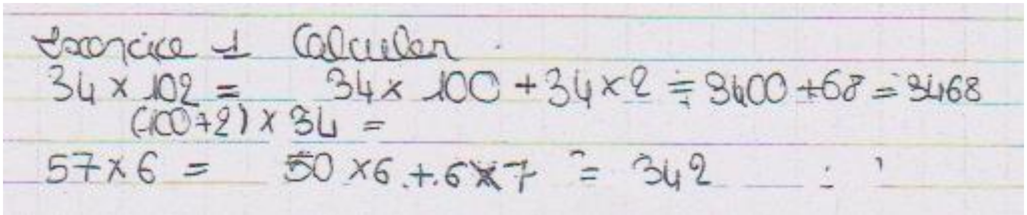


Figure 3.18 – Extrait de cahier montrant les produits partiels, et une note du produit par une somme

Etant donné l'écriture postérieure, visiblement une sorte de complément, on peut supposer que l'élève n'a pas éprouvé le besoin de l'écrire pour mettre sa technique à l'œuvre. Cette écriture, correspondant à l'égalité, a donc un autre statut, qui correspond à ce qu'il se passe à l'oral dans la classe : celui de complément pour la justification de la technique.

Les égalités et le théorème comme technologie des praxéologies de calcul mental

La mise à jour de la technologie est poussée par le professeur, certainement parce que la technologie s'oublie dans la pratique, d'autant qu'elle a longuement vécue sans technologie justificatrice. Les élèves n'éprouvent certainement pas le besoin de justifier leur technique, ce dont témoignent les réponses rapides, lacunaires, voire lapidaires des élèves.

> Chr : j'écris que le résultat ou ?
> P : alors il faut au moins que tu expliques comment tu as fait à l'oral, comment tu as fait ?
> Chr : ben j'ai fait 50 fois 6 ça fait 300 après j'ai fait 6 fois 7 ça fait 42, ça fait 342
> P : oui,
> You : c'est ça madame ?
> Art : oui
> Classe : mais le premier ?
> P : on reprend le premier ? Donc Ma a écrit 34 multiplié par 100 plus 34 multiplié par 2 / est-ce que c'est bien égal à ce qui est écrit là à gauche ?
> Classe : oui
> P : pourquoi ?

Mat : parce que c'est la même chose qu'a fait Chr et c'est le théorème, enfin en fait elle a décortiqué le nombre elle a fait 100 plus 2

On y voit des descriptions de techniques mais pas de technologie spontanément, le professeur insiste, en demandant pourquoi. Dès lors, M le justifie par l'évocation du théorème, qui prend donc bien la place d'élément technologique dans la praxéologie. M évoque aussi le premier membre des égalités produites correspondant à la manipulation des écritures : « elle a décortiqué le nombre » dit-elle. P pousse alors les descriptions, et demande de recontextualiser ici, Mat s'exécute, non sans difficulté, mais parvient à décrire les programmes de calcul, même si le premier omet l'un des facteurs qui est 34 :

P : elle a fait 100 plus 2 et après ?
Dav : de l'autre côté …
Mat : 100 et 2 ça fait 102 donc heu 34 fois 100 elle a trouvé le résultat après elle l'a ajouté à 34 fois 2 pour faire 100 plus 2 et elle a trouvé le résultat

Ce qui manque cependant dans cette description est l'idée d'équivalence, de sorte que le professeur relance :

P : oui mais qu'est-ce qui vous assure que là, ça ce calcul là il est bien égal à celui là ?
Clo ?
Clo : c'est le théorème qui le dit

Le théorème est bien élément technologique assurant l'égalité, ou plus exactement équivalence des programmes de calcul.

Le professeur revient sur la recontextualisation et demande de retrouver la formulation rhétorique du théorème et d'identifier termes et facteurs dans l'écriture. La chose est laborieuse :

P : non mais nous on veut savoir si c'est pareil et vous dites que c'est pareil parce que c'est bien le théorème / mais qu'est-ce qui dit que ça / ça correspond au théorème ? Mat ?
Mat : le membre de droite
P : ha le membre de droite / est-ce que ça correspond bien au théorème le membre de droite ?
You : non
P : qu'est-ce qu'il dit le théorème déjà ?
You : ha oui il dit les deux heu
Classe : multiplier puis additionner
P : You ?
You : heu / le facteur par le terme et additionner les deux produits
P : alors est-ce qu'on a bien le facteur par le terme comme tu dis ?
You : oui
P : c'est quoi le facteur ?
You : j'sais pas
Classe : 34
P : 34 oui, et les termes ?
Classe : 100 et 2
P : 100 et 2 et alors qu'est-ce qu'on en fait de ça ?
Classe : on multiplie par le facteur
P : on multiplie par le facteur / Enz retourne toi
Cla : et après on les additionne
P : et après on les additionne et dans le membre de gauche ça correspond bien au théorème ?
Classe : oui
P : Qu'est-ce qu'il dit le théorème ?
Sop : additionner puis multiplier
P : additionner puis multiplier est-ce que on additionne bien en premier ?
Dav : oui

Flo : oui / mais faut mettre des parenthèses
P : et après on multiplie ? par combien ?
Classe : 34
P : par 34 d'accord / oui ça correspond bien au théorème donc on est sûr que ce soit bien égal et puisque c'est bien égal / cette méthode permet bien de trouver le résultat / 3468

Ce que cherche le professeur ici est une validation des écritures. Après la validation mathématique de l'équivalence, il s'agit de s'assurer que les écritures relèvent bien de la transformation de mouvement liée à la distributivité. Evidemment ce n'est pas dit comme cela, mais le théorème, pour assurer l'équivalence, doit être soutenu par un contrôle de la syntaxe des écritures. C'est bien un dialogue des dimensions que le professeur organise, non sans peine, pour ce premier calcul. La recontextualisation ne sera pas réglée plus rapidement pour le second calcul, et on voit les difficultés du professeur à faire instancier, c'est-à-dire à décrire les nombres, en même temps que leur fonction syntaxique :

P : et dans ce qu'a fait Chr / ça correspond bien au théorème ?
Classe : oui
You : il a additionné puis multiplié
P : Art ?
Art : il a fait 6 fois 50 ça fait 300
Ili : 6 fois 7
P : il a pas fait 6 fois 7
Art : non il a fait 7 fois 6 et 6 fois 5
P : il a fait 50 fois 6 plus 6 fois 7 (*écrit en même temps*) et est-ce que ça ça correspond au théorème ?
Flo : oui additionner puis multiplier est équivalent à multiplier le facteur par les termes puis additionner les deux produits
P : oui d'accord mais qu'est-ce qui te fait dire que ça ça correspond ?
..//..
P : comment tu le vois ? et dites il faut le voir // comment vous le voyez ? Qu'est-ce que vous regardez là ?
murmures
P : le membre de droite et alors ?
murmures
X : y'a une addition
P : y'a une addition oui / quoi d'autre ?
Classe : les multiplications
P : les multiplications, qu'est-ce qu'il y a de spécial ?
Classe : le facteur / les termes
P : Elv?
Elv : les facteurs sont bien multipliés par les deux termes
P : les facteurs c'est quoi les facteurs ?
Classe : 6
P : c'est 6 le facteur, est-ce qu'il est bien multiplié par les deux termes ?
Classe : oui 50 et 7
P : 50 et 7 / d'où ils viennent 50 et 7 ?
Classe : de 57 / ben de 57
P : de 57 / quel est le lien ?
Clo : parce que c'est 50 plus 7 est égal à 57
Mar : 50 plus 7
P : d'accord

Ce qui se construit est certainement difficile, la genèse des articulations entre dimension mathématique et sémio-linguistique se fait par des allers-retours entre formulations générales et instanciées. Malgré tout, le professeur parvient à faire émerger ce qu'il attend, les élèves font fonctionner la dialectique complexe qui est à l'œuvre, et ce faisant, construisent les indices visuels pertinents en lien avec le théorème en réponse au questionnement : « comment vous le voyez ? Qu'est-ce que vous regardez ? ». Cette insistance prépare à l'exercice suivant, dont la validation ne pourra s'effectuer que dans la dimension sémio-linguistique, puisque l'égalité sera entre deux expressions algébriques :

> P : […] Alors 6 multiplié par *a* plus 4, qu'est-ce que vous proposez ? Luc ?
> Luc : 6 fois *a* plus 6 fois 4
> P : (*écrit*) est-ce que ça correspond bien au théorème ?
> Classe : oui
> You : non
> Dav : et oui
> P : oui pourquoi ? Chut / qu'est-ce qu'on regarde ?
> E : 6 plus 4
> P : Lis?
> Lis : ben on regarde le membre de droite
> P : le membre de droite, qu'est-ce qu'il y a au membre de droite ?
> Lis : ben le heu une addition et deux multiplications
> P : une addition et deux multiplications / ça suffit pas qu'est-ce qu'il faut regarder d'autre Seb ?
> Seb : y'a les deux facteurs / y'a deux produits
> P : deux produits / qu'est-ce qu'on regarde de plus dans ces produits ?
> Wil : le facteur et les termes
> P : le facteur, c'est quoi le facteur ?
> Classe : 6
> P : et les termes ?
> Classe : *a* et 4
> P : et alors qu'est-ce qu'on doit regarder avec 6, *a* et 4 ? Ili ?
> Ili : ils sont multipliés
> P : ils sont multipliés et après ?
> X : ils sont additionnés

La lassitude gagne, certainement parce que le besoin d'identification ne se fait pas sentir. Les élèves ne retourneront pas à une recontextualisation pour les calculs suivants et utiliseront des formulations générales et évocations lacunaires :

> Cla : parce que dans le membre de droite on voit bien que le facteur est multiplié par les deux termes et les deux produits sont additionnés

Et pour l'égalité suivante :

> Mat : oui parce que on voit le facteur et les deux produits après sont additionnés

Il n'est pas étonnant que l'évocation ne concerne que le membre écrit puisque le membre de gauche était donné par la consigne : il s'agissait de compléter l'égalité, donc le travail se situe dans l'écriture correspondant au second programme de calcul. Il n'est pas non plus étonnant que les discours finissent par omettre certains éléments, c'est un phénomène naturel qui apparaît lorsque la technologie dans son intégralité n'est plus tout à fait nécessaire : la pratique n'y fait pas référence constamment. Néanmoins lorsque l'enjeu de la validité est plus fort, apparaissent des références plus explicites au théorème, c'est ce que nous allons voir pour la dernière correction.

Une nouvelle généralisation et unification : extension du domaine de validité de la technologie

La dernière correction voit trois réponses possibles apparaître au tableau selon les propositions de Mat, Fla, et Ama:

136×235 = 136×230 + 136×5

136×235 = 136×200 + 136×35

136×235 = 136×200 + 136×30 + 136×5

Le théorème unifie de ce point de vue deux techniques différentes correspondant à deux écritures différentes d'égalités reposant sur deux sommes différentes. La décomposition apparaît donc non unique. Mais ce qui occupera véritablement la classe est la question du nombre de termes. Nous avons vu plus haut que le théorème comme les écritures, compte tenu aussi du support écrit de la séance 3, réfère plus ou moins implicitement à des sommes de deux termes. C'est là la question qui émerge :

> *Murmures* : pourquoi y'en a trois
> P : ha pourquoi y'en a trois ?
> X : pour moi y'en a deux non ?
> P : normalement y'en a deux ? qu'est-ce qu'il dit le théorème ?
> X : on est pas obligé de faire deux
> P : ha il dit qu'on est pas obligé de faire deux / qu'est-ce qu'il dit ? Cla ?
> Cla : il dit additionner puis multiplier
> P : additionner puis multiplier / est-ce que on a bien une addition donc à gauche, elle est pas écrite, mais qui correspond à celle là qu'est-ce que c'est l'addition ? qu'est-ce que c'est l'addition qui est pas écrite ? (*écrit sous la dictée d'un élève*) 200 plus 30 plus 5 et qui serait multiplié par combien ?
> Classe : 136
> P : 136 / c'est le facteur commun / et est-ce que ça revient bien à multiplier à chaque fois par le facteur
> Classe : oui
> P : par chacun des termes ? avant d'additionner ?
> Classe : oui
> P : c'est bien ce que dit le théorème / le théorème ne dit pas qu'on est obligé d'en avoir deux / c'est pas vrai.

On voit donc ici X interpréter une généralité et Cla retourner à une formulation plus complète du théorème. Il y a pourtant un glissement, car en réalité, si la deuxième formulation construite avec la classe n'évoque pas deux termes, la première, si. Le professeur modifie quelque peu le discours réellement élaboré pour généraliser, or, il y a là certainement un moment technologique shunté qui aurait pu ne pas l'être, avec notamment, la vérification de l'équivalence par effectuation des programmes de calcul. On aurait pu aussi envisager de réitérer deux fois l'utilisation du théorème avec des égalités successives à deux termes. Le questionnement suivant aurait aussi pu à la fois poser de nouveau l'extension de la théorie, et aussi de celle des formalismes et en particulier de l'écriture algébrique. C'est certainement là un des manques du scénario. La sonnerie retentit au moment de la copie des élèves :

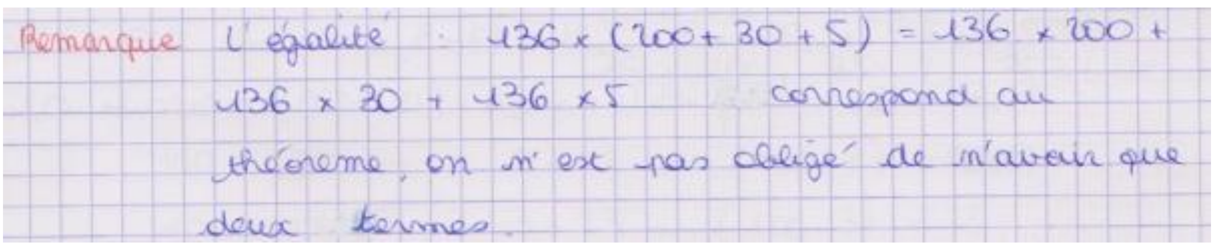


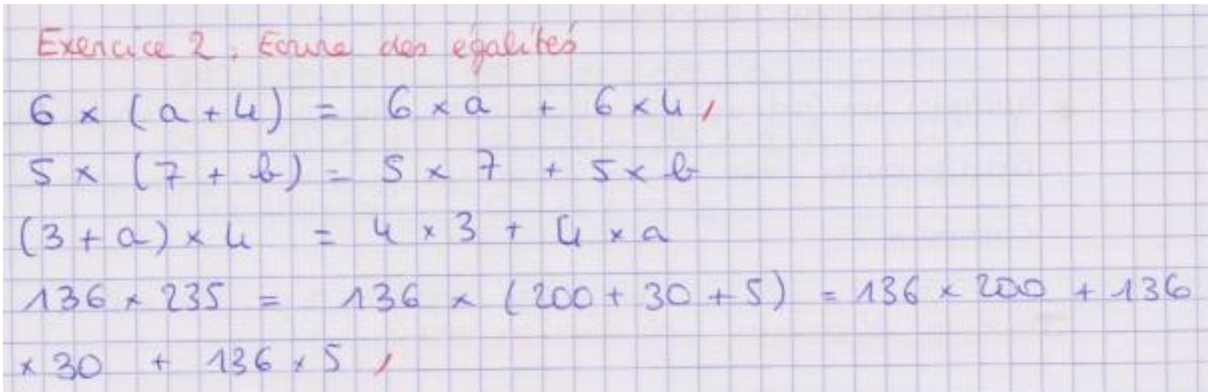
Figure 3.19 – Extrait de cahier afférent à la généralisation à une somme de trois termes

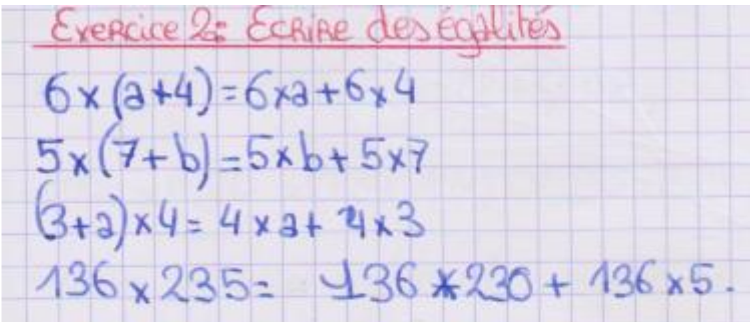
> P : vous recopiez rapidement / et vous écrivez d'autres égalités ..//.. je vous demande de recopier celles là qui ont été faites par des groupes et qu'on n'a pas encore regardées / je vous demande de les recopier d'abord.

Ce moment n'en réalise pas moins une généralisation du théorème, tant dans sa formulation que dans son domaine de validité, amenant ainsi à désamorcer ce que pourrait rigidifier dans les techniques, le formalisme de l'écriture algébrique ou les effets de contrats que pourraient induire la majorité des spécimens rencontrés où n'apparaissent que deux termes.

Conclusion

Cette situation voit émerger des formalismes nouveaux, et comme l'analyse *a priori* l'anticipait, les interventions du professeur sont importantes pour ce faire. Cependant elles ne sont pas seules à l'origine des constructions. La mémoire des situations précédentes sert de façon essentielle pour lever certains obstacles, comme l'identification d'un des deux programmes de calcul, et la reconnaissance de la structure de produit, dont la difficulté est de façon remarquable évitée. L'analyse *a posteriori* confirme de ce point de vue les résultats de notre analyse *a priori*. Les interventions du professeur ont pour rôle essentiel de maintenir la tension et de faire dialoguer les dimensions mathématique et sémio-linguistiques au travers des différents formalismes rhétoriques et algébriques. L'on observe la généralisation au travers de ces formalismes, et une réorganisation des connaissances qui s'amorce à l'occasion du type de tâche calculatoire, dont le théorème vient occuper la composante technologique. Les validations sont de nature double, syntaxique et mathématique. On note cependant un écueil dans le choix des égalités et l'absence d'exploration de l'extension à une somme de plus de deux termes, qui se fait finalement quelque peu par détournement de l'un des formalismes rhétoriques. La rigidification que pourrait véhiculer l'écriture algébrique est du moins atténuée. Les extraits de l'ensemble des cahiers recueillis montrent ainsi des écritures non localisées géographiquement à un moment ou à un autre.


Exercice 2. Ecrire des égalités
6 x (a + 4) = 6 x a + 6 x 4
5 x (7 + b) = 5 x 7 + 5 x b
(3 + a) x 4 = 4 x 3 + 4 x a
136 x 235 = 136 x (200 + 30 + 5) = 136 x 200 + 136
x 30 + 136 x 5


Exercice 2 : Ecrire des égalités
6 x (a+4) = 6 x a + 6 x 4
5 x (7+b) = 5 x b + 5 x 7
(3+a) x 4 = 4 x a + 4 x 3
136 x 235 = 136 x 230 + 136 x 5.

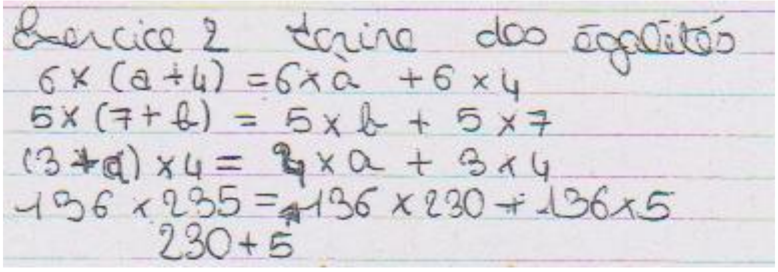

Exercice 2 écrire des égalités
$6 \times (a + 4) = 6 \times a + 6 \times 4$
$5 \times (7 + b) = 5 \times b + 5 \times 7$
$(3 + a) \times 4 = 4 \times a + 3 \times 4$
$136 \times 235 = 136 \times 230 + 136 \times 5$
$230 + 5$

Figure 3.20 – Extraits de cahier et souplesse des écritures

Conformément à l'analyse *a priori*, on voit une diversité d'écritures qui persiste, de sorte que l'on puisse supposer que les indices ostensifs pris pour construire les écritures ne sont pas uniquement formels.

3.2.5 Analyse a posteriori de la situation d'institutionnalisation : nouvelles extensions

Les dernières phases de la situation d'institutionnalisation concernant le sens de la factorisation et le cas de la soustraction, occupent une dernière séance que nous analysons maintenant.

Tableau synoptique du déroulement

Temps	Tâches	Organisation / Phase	Descriptions	Eléments de justification
1	Interpréter 6×(a+4) = 6×a+6×4	Collective	Equivalence de programmes de calcul	*Enz: En fait cette égalité elle est valable pour tous les nombres, ça veut dire que toujours l'égalité elle sera juste même si les nombres*
2				
3			*Dav : après on fait 6 d'abord fois n'importe quel nombre et après on fait 6 fois 4* *P : et après qu'est-ce qu'on fait ?* *Dav : on les additionne*	*Sop : parce que à chaque fois on trouvera la même chose*
4				
5				
6	50 × 16 + 16 × 8 = (50 + 8)× 16 30 × 7 + 2 × 7 = (30 + 2) × 7 (25 × 9) + (25 × 10) = 25 × (10 + 9) $T_{Description}$	Collective	Syntaxique	Relation d'équivalence et dénotation conservée par inversion des écritures.
7			*Flo : c'est la même chose*	*Sop: même si c'est inversé ça donne pareil, ça donne toujours le même résultat*
8			*Flo : c'est la même forme […]y 'a deux multiplications, et une addition, et une multiplication et une addition*	*Mar : vu que c'est équivalent.*
9			*Mar:c'est les égalités qu'on avaient faites avant, le membre de gauche c'est celui qui est dans le membre de droite de ces trois là […] c'est inversé*	
10			Equivalence de programmes de calcul	
11				
12			*C : on multiplie le facteur par les deux termes du membre de droite*	
13				
14				
15				
16			*on multiplie le facteur par deux autres nombres et c'est équivalent à additionner les deux autres nombres puis à multiplier par le facteur qui est deux fois à gauche.*	
17				
18				
19	35 × 98 + 35 × 2 2,34 × 7 + 2, 34 × 3 13,4 × 130 + 870 × 13,4 $T_{calc\_m'}$	Individuelle puis correction collective	*je pense que le membre de gauche en fait à ce qu'on trouve l'opération plus facilement, l'égalité donne la même opération*	Théorème
20				
21			*You : J'ai fait 2,34 fois 7 et 3 ça fait 10 donc j'ai écrit une autre égalité et après j'ai mis le résultat*	

22				
23				
24				
25				
26				
27				
28				
29		Institutionnalisation	Unification	
30				
31				
32				
33				
34	25 × 20 – 25 = 25 × (10 + 9) $T_{vérification}$	Individuelle puis correction collective	*on fait les deux calculs […] on trouve pareil*	Validation mathématique Egalité et dénotation
35			*Enz : c'est pas les mêmes nombres […]y'a pas de soustraction […]* *C : mais y'a pas 10 et 9 dans le membre de gauche*	Validation sémio-linguistique Syntaxe
36				
37				
38				
39				
40				
41	25 × 19 *J'ai fait 25 fois 20 ça fait 500, moins 25* $T_{écrire =}$	Recherche individuelle puis correction collective		Syntaxique et théorème / Egalité
42				*Sop : ben le 20 c'est heu ça fait 19 si on enlève 1*
43	$T_{vérification}$			*Flo : parce que c'est le facteur commun*
44	**41 × 199** *41 fois 200 ça fait 8 200 et j'ai enlevé 41* **35 × 98** *J'ai fait 35 fois 100 et après j'ai fait moins 35 fois 2* **23 × 97** *J'ai fait 100 fois 23 ça fait 2 300 après j'ai enlevé à 2 300, 3 fois 23* $T_{écrire =}$ $T_{vérification}$	Recherche individuelle		Syntaxique et équivalence / dénotation
45				
46				
47				
48				
49				
50				
51				
52				
53				
54		Institutionnalisation	Unification	Evocation d'une extension de $\Theta_{écrire=}$
55				

Interprétations multiples des écritures algébriques : une dialectique robuste

Nous avons vu lors de la situation précédente que le travail et la validation sur les manipulations des écritures pour produire l'égalité s'était essentiellement fait d'un point de vue syntaxique pour $6 \times (a + 4) = 6 \times a + 6 \times 4$. Cette écriture a été vue comme image d'une transformation de mouvement dans la dimension sémio-linguistique. Parmi les 8 cahiers recueillis, 7 montrent une manipulation sans difficulté, ce qui correspond à ce que laisse penser le déroulement en classe. Le dernier cahier néanmoins montre que pour un élève au moins, l'appropriation du sens de l'écriture littérale est incertaine. On y voit ainsi You remplacer la lettre par un nombre avant d'écrire une égalité :

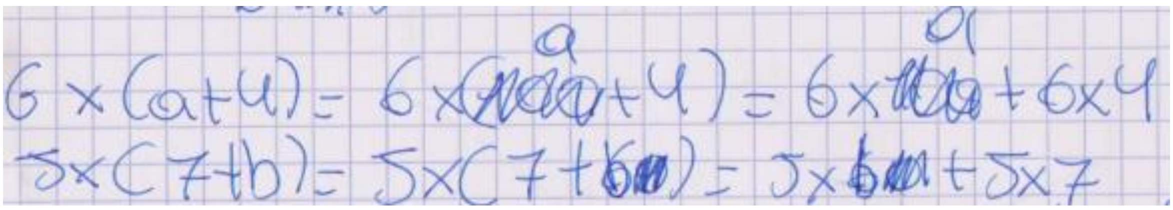


Figure 3.21 – Extrait du cahier de You

You a remplacé a et b par 100 et 60 respectivement avant de produire l'égalité, avec des manipulations tout-à-fait correctes du reste. On peut ainsi interpréter cette difficultéà envisager ce type d'écritures par une modification en réalité de l'objet sur lequel porte la transformation de mouvement : une expression symbolique algébrique. D'un autre point de vue, cela réfère à des va-et-vient qui ne vont pas de soi entre des systèmes liés à des degrés différents d'algébrisation de programmes de calcul. Ainsi dans les premières séances, le système est-il un ensemble de nombres. On y rencontre des programmes de calcul arithmétiques comme PCA (17;10 ;2) :=17×(10+2) ou PCA(17;10;2) :=17×10+17×2. La relation d'équivalence dans ce système est l'égalité sur les nombres (les entiers naturels dans ce cas), l'effectuation des programmes permet d'assurer l'égalité : la dénotation est identique, c'est le nombre 204 dans ce cas.

L'étape de formalisation puis d'unification et de généralisation entraîne la rencontre de programmes de calculs mathématisés, c'est-à-dire algébrisés, avec une particularité : le degré d'algébrisation ne prend pas en compte un, mais trois nombres indéterminés. Ainsi les programmes de calculs sont-ils les suivants : PCA(u ; a ; *f*) := $u \times (a + f)$ et PCA (u ; a ; *f*) := $u \times a + u \times f$. Lorsqu'on retombe à un degré d'algébrisation plus faible, intermédiaire, entre les premières écritures et celles-ci, l'interprétation peut se révèler non transparente pour les programmes de calculs comme PCA (6 ; a ;4) := $6 \times (a + 4)$. Les indications données par le professeur sur ce que désigne la lettre éclairent en partie les écritures. Mais le lien avec la dimension mathématique manque certainement à ce moment-là et explique la pratique de You. Ce sera bien le théorème et le discours élaboré sur lesquels les élèves s'appuieront, ce qui jouera un rôle essentiel pour retrouver la dialectique, collectivement.

Le lien sera remis en question par le professeur lors de cette séance suivante qui débute par un retour sur l'interprétation des écritures :

> P : Alors la question d'Ili je la repose en d'autres termes / à la fin de l'heure il m'a demandé finalement comment est-ce qu'on interprète une égalité comme ça / ça revenait un petit peu à des

questions de You aussi qui demandait mais finalement ce a là c'est un nombre ? on peut imaginer que c'est 60 ? et je leur ai répondu à tous les deux / non pas du tout / cette égalité elle ne se lit pas comme ça / alors qui peut la traduire et qui peut imaginer ce qu'on peut dire pour décrire cette égalité ? Mar ?
Mar : Et ben (*inaudible*) a c'est n'importe quel chiffre,
P : alors a c'est n'importe quel nombre d'accord, parce que c'est une égalité qui est valable pour n'importe quel nombre
Elv : En fait cette égalité elle est valable pour tous les nombres, ça veut dire que toujours l'égalité elle sera juste même si les nombres (*inaudible*)
P : oui, alors ça veut dire, soyez plus précis que ça, si c'est vrai pour n'importe quel nombre qu'est-ce que c'est qui est vrai Luc ?
Luc : ..//..
P : il faudrait décrire / ce qu'on en fait justement // […] donc maintenant l'idée c'est comment traduire ça et donc Mar dit c'est une égalité qui est vraie pour n'importe quel nombre a / Seb ?
Seb : parce que à chaque fois on trouvera la même chose
P : mais à chaque fois quand vous faites quoi ? Dites-le

P insiste pour faire décrire les programmes de calcul, les élèves s'exécutent, poussés par P pour aboutir à une forme rhétorique complète. Des résistances apparaissent face au type de tâche de formulation rhétorique qui semble peu familier, mais qui a déjà eu lieu à plusieurs reprises lors des séances précédentes, de sorte que la classe y parvient malgré tout. Car le théorème sous-tend les descriptions et le sens de l'équivalence apparaît spontanément : Seb évoque le fait qu'on trouvera à chaque fois la même chose.

P : mais à chaque fois quand vous faites quoi ? Dites-le
Classe : ben un calcul
P : Quel calcul ?
Classe : 6 fois entre parenthèses / une addition
P : une addition, laquelle ?
Classe : des termes / de a plus 4
P : Quels termes ? Soyez précis avec cette égalité là
Gre : de a et de 4
Elv : 6
P : non c'est pas 6 qu'on ajoute
Classe : a et 4, n'importe quel nombre et 4
P : c'est n'importe quel nombre et 4, et après qu'est-ce qu'on fait
Dav : après on fait 6 d'abord fois n'importe quel nombre et après on fait 6 fois 4
P : et après qu'est-ce qu'on fait ?
Dav : on les additionne
P : on les additionne / donc je reprends ce que vous dites / si on prend n'importe quel nombre / et qu'on ajoute 4 et qu'après / on multiplie par 6 / c'est équivalent à prendre ce nombre et le multiplier par 6 / puis faire 6 fois 4 et ensuite ajouter les résultats..//.. ça ça se lit comme une équivalence de programmes de calculs // le programme de calcul écrit dans le membre de gauche est équivalent au programme de calcul dans le membre de droite // ça / c'est une écriture symbolique qui traduit une équivalence de programmes de calcul // c'est ça que ça veut dire.

On peut aussi entendre les résistances comme un manque de nécessité, c'est-à-dire que les élèves n'éprouvent certainement pas le besoin de lever les implicites de leurs descriptions partielles. Le professeur les y amène malgré tout, et ce de façon essentielle pour assurer la dialectique dans l'interprétation de l'écriture dans les dimensions mathématique et sémio-linguistique. Ce qu'évoque Seb n'est peut-être pas tout à fait certain : est-il en train d'évoquer une instanciation du théorème et donc de ramener le discours dans le système des nombres, dont il interprète, à juste titre d'ailleurs, PCA $(6\,;\,a\,;4) := 6 \times (a + 4)$ comme une modélisation intermédiaire ? La question qui se pose est alors celle d'une interprétation autonome, (dans une perspective de modélisation polynomiale) qui s'y adosse bien sûr, et c'est peut être une subtilité *in vacuo*, mais aussi la raison de cette recherche d'explicitation de la part du professeur : l'écriture de l'égalité relève d'une première transformation de mouvement portant sur de nouveaux objets que sont les expressions symboliques algébriques, ou dans la dimension mathématique, les PCA algébrisés. Autrement dit, la dénotation des expressions sur lesquelles le travail s'accomplit change de nature : c'est celle de fonctions polynômes. C'est une extension de la praxéologie $\mathcal{P}_{\text{écrire=}}$ que la technologie soutient *via* la généralisation de l'équivalence, il n'y a donc pas de besoin d'exploration numérique, pour se convaincre par exemple, et le travail du professeur est essentiel pour pousser une interprétation dans ce sens. L'intervention de Seb permet néanmoins toujours de le faire en référence au système numérique. Les praxéologies construites s'articulent véritablement, dans les systèmes imbriqués dans une modélisation numérico-algébrique.

Unification dans le sens de la factorisation : des écritures aux programmes de calcul
Cet épisode est suivi de l'examen de trois nouvelles égalités copiées lors de la séance précédente :

$$50 \times 16 + 16 \times 8 = (50 + 8)\times 16$$

$$30 \times 7 + 2 \times 7 = (30 + 2) \times 7$$

$$(25 \times 9) + (25 \times 10) = 25 \times (10 + 9)$$

L'unification se fait d'emblée du côté des écritures, dont la souplesse d'utilisation identifiée dans la classe jusqu'à présent permet à Flo de déclarer qu'il s'agit de la même forme (bien qu'à strictement parler ce ne soit pas le cas !). Ceci nous conduit à supposer que l'identification de ce qu'il nomme une forme est au-delà des seuls ostensifs. Pourtant, la description se révèle encore une fois douloureuse, et le professeur peine à obtenir des programmes de calcul, et en particulier l'identification du facteur commun :

> P : […] Alors vous regardez maintenant les trois égalités que certains groupes avaient produites. Alors qu'est-ce que vous en dites ? Flo ?
> Flo : c'est la même chose
> P : c'est la même chose, qu'est-ce qui te fait dire que c'est la même chose ?
> Flo : c'est la forme
> P : Comment ?
> Flo : c'est la même forme
> P : c'est la même forme / qu'est-ce qui te fait dire que c'est la même forme ?
> Flo : y'a deux membres
> P : quoi d'autre ?
> Flo : y'a deux multiplications / et une addition / et une multiplication et une addition
> P : bon / quoi d'autre ?
> You : des parenthèses
> P : tu peux être un peu plus précis ?
> You : // ce qu'il y a entre parenthèses c'est une addition

On voit de nouveau une régression : le théorème ne sert pas de soutien aux descriptions demandées par le professeur, et des reconnaissances peu pertinentes apparaissent comme le nombre de membres ! Pourtant, il est probable que Flo ait bien identifié davantage, et l'on voit les difficultés langagières de nouveau s'exercer, avec une certaine opacité de ce que le professeur attend comme identifications. Très vite pourtant les noms des opérations apparaissent, mais certainement pas comme programme de calcul mais plutôt comme ostensifs. Le professeur ne parvient pas à dire clairement ce qu'il attend, et demandant « des précisions » provoque de nouveau une régression plutôt que la mention des termes et facteurs ou la description plus exactement d'équivalence de programmes de calcul. On voit qu'il est difficile pour le professeur comme pour les élèves de rentrer dans un discours méta-mathématique, il manque certainement un contrat, qui se construit néanmoins, puisque les attentes de P ne sont pas entendues. L'intervention de Mar arrêtera momentanément le travail de $T_{Description}$ pour aborder la justification des écritures, ce qui est en lien avec les tentatives d'unification des élèves. Cette unification ne viendra pas de la description mais sera véhiculée par la technologie couplée à la dénotation de l'égalité comme le prévoyait l'analyse *a priori* :

> Mar : En fait c'est que pour moi c'est les égalités qu'on avait faites avant / le membre de gauche c'est celui qui est dans le membre de droite de ces trois là // et le membre de droite dans celles-là / elles sont dans / en fait c'est inversé quoi
> P : qu'est-ce que vous pensez de ce que dit Mar ?
> *Classe* : c'est vrai, ben oui, oui
> P : Enz ?
> Enz : c'est la même chose oui
> P : d'accord / c'est inversé / donc on a inversé
> Sop : c'est inversé donc ça donne pareil
> P : ha qu'est-ce que tu dis Sop ?
> Sop : même si c'est inversé ça donne pareil / ça donne toujours le même résultat
> P : oui bien sûr / vous êtes d'accord avec ça ?
> Classe *:* oui
> P : Alors vous pouvez écrire, on a inversé le membre de gauche et le membre de droite (*dicte en écrivant au tableau*), mais c'est pareil / on obtient toujours les mêmes résultats
> Mar : vu que c'est équivalent
> P : (*note*) vu que c'est équivalent

Les élèves semblent s'être emparés de la notion d'équivalence, en témoignent des interventions multiples des élèves tout au long des séances. Cependant le professeur parviendra difficilement à faire expliciter les programmes de calculs. Les interventions ne sont en effet pas de nature à éclairer ses attentes entièrement, de sorte qu'il est contraint de les préciser à chaque intervention un peu plus :

> P : […] Est-ce que vous pouvez dire plus précisément ce qui est équivalent ?
> You : l'opération
> P : quelle opération soyez plus précis ? Art?
> Art : les opérations
> P : quelles opérations écrites à gauche et à droite ?
> ..//..
> P : allez on y va qu'est-ce qu'on fait à gauche à chaque fois ?
> Enz : une addition
> P : non c'est pas vrai qu'est-ce qu'on fait à gauche en premier
> Classe : les multiplications
> P : qu'est-ce qu'elles ont de spécial ces multiplications ?
> Classe : même nombre, on additionne après
> P : et on additionne après mais ces multiplications elles ont quelque chose de spécial Art ?
> Art : y'a le même facteur
> P : y'a le même facteur oui / alors du coup comment on pourrait dire à gauche ?
> Clo : on pourrait mettre *a* plus
> Flo : à gauche on retrouve toujours le même facteur
> P : tu ne dis pas les calculs qu'il y a à produire / première chose qu'on fait dans le programme de calcul à gauche ?

Le professeur mentionne enfin explicitement qu'il attend une description par étape, dans l'ordre, de l'enchaînement de calcul, autrement dit donner la forme rhétorique des programmes de calcul écrits sous forme symbolique. On voit à quel point le vocabulaire peut être difficile à manier et à interpréter : E répond une addition pour le membre de gauche, ce que le professeur rejette. Ceci est pourtant une somme de deux produits, de sorte que P attendant une description par étape, ne valide pas la proposition, alors qu'il s'agit bien d'une addition. Ce qui gêne ici c'est que l'élève identifie la nature de l'expression avec du vocabulaire qui n'en relève pas, il parle d'une opération, donc réfère à un programme de calcul décrit par étape. Il y a une ambiguïté et le professeur interprète comme erronée sa réponse.

P ne prend pas en compte non plus le formalisme proposé par Cl qui propose une écriture algébrique. Peut-être aurait-ce pu être un intermédiaire permettant de retrouver le discours justement.

Une autre difficulté surgit : c'est la description des programmes de calculs correspondant aux deux membres de l'égalité de façon indépendante l'un de l'autre : ce qui engage des confusions liées aux fonctions syntaxiques :

> P : maintenant on relit la phrase / « on multiplie les facteurs » / mais c'est pas les facteurs
> *Classe* : le facteur
> P : le facteur / « par les deux termes » sauf que vous pouvez pas dire que ce sont des termes parce que ils sont pas additionnés ici / ce sont des facteurs écrits comme ça /
> Luc : ben les deux termes du membre de droite
> P : oui mais avant de décrire le membre de droite on décrit le membre de gauche / qui est équivalent au membre de droite on peut pas raisonner comme ça / Cla ?
> Cla : on multiplie le facteur par les deux termes du membre de droite
> P : non / on ne peut pas faire référence au membre de droite alors qu'on décrit celui de gauche / y'a quelque chose qui va pas
> E : ben les deux autres nombres

La formulation du théorème dont essayent de s'emparer les élèves pour l'adapter fait presque obstacle puisque, écrite dans l'autre sens, l'égalité demande de décrire la somme indépendamment du produit écrit à droite. Et les fonctions syntaxiques remplies par les nombres diffèrent : « vous pouvez pas dire que ce sont des termes parce que ils sont pas additionnés » . La subtilité tient à ce que la deuxième partie de la phrase du théorème réfère à la première, c'est-à-dire qu'on peut décrire le second programme de calcul en faisant référence au premier : les termes dans l'écriture $u \times (a + f)$ deviennent facteurs dans l'écriture $u \times a + u \times f$ mais on les appelle termes en référence au premier programme de calcul : « multiplier le facteur par les termes ».

On observe alors un abandon des fonctions syntaxiques pour revenir à la notion de nombre, ce qui permettra de clarifier les objets dont on parle bien que cela n'aille pas dans le sens du projet de généralisation. Cette difficulté s'explique aussi par les implicites précédents de la formulation rhétorique du théorème, c'est-à-dire que la fonction d'une sous-expression ne peut en principe s'exprimer sans référence à l'expression dont elle dépend : un terme est toujours terme d'une certaine somme. Ce n'est pas exprimé, ce qui correspond à un principe d'économie naturel dans les discours. La référence au membre de droite est donc insistante de la part des élèves, ce qui est corrélé à l'inversion des écritures, qui peut-être n'engage pas à coup sûr de lecture de gauche à droite, ou du moins explique l'amalgame. Une égalité comme $50 \times 16 + 16 \times 8 = (50 + 8) \times 16$ peut en effet se lire de droite à gauche, et se décrire comme telle dans le sens du développement, tout en ayant conscience que l'écriture est inversée par rapport à la temporalité de l'énonciation.

C'est donc bien le rôle du professeur, non seulement de pousser à une lecture de gauche à droite, pour préparer une nouvelle interprétation, mais aussi de faire produire une description autonome du membre de gauche. Le travail de formulation -de désintrication- est considérable. La référence au nombre permet alors à la classe de s'en sortir, ce que le professeur accepte malgré le projet initial. Ce qui n'empêchera pas du reste une retouche à un moment ultérieur d'institutionnalisation (d'autant que la formulation de la classe omettra l'addition pour le programme de calcul écrit à gauche !). Ceci s'explique sans doute par la quantité de difficultés à surmonter, mais aussi et surtout par la construction d'une véritable dialectique qui demande du temps, ne serait-ce que pour assurer de multiples interprétations, et une clarification de celles-ci. Près de 10 minutes y seront consacrées (14 minutes en comptant le moment de justification) avec des prises de paroles souvent collectives, se nourrissant les unes les autres jusqu'à ce qu'un ou quelques élèves prennent le pas pour les mises en forme intermédiaires. On voit ainsi les élèves s'approprier au fur et à mesure les interprétations des écritures dans un véritable effort collectif, jusqu'à la mise en avant du facteur commun :

> E : ceux qui se trouvent entre parenthèses
> P : et non / ils se trouvent pas entre parenthèses à gauche « on multiplie le facteur par deux autres nombres et c'est équivalent à additionner » alors c'est plus les termes
> Classe : les autres nombres
> P : oui oui les deux autres nombres (*sous la dictée*) puis à multiplier par le facteur qui est deux fois à gauche. Alors en mathématiques on dit pas le facteur qui est deux fois à gauche
> Classe : qui est repris
> P : alors on a une façon plus rapide de le dire / on appelle ça le facteur commun. Vous voyez pourquoi on dit commun ?
> Mat : commun aux deux multiplications
> Chr : commun des deux côtés de l'addition
> P : oui ?
> E : commun dans les deux multiplications
> P : oui commun dans les deux multiplications / ça veut dire qu'il est présent dans les deux multiplications, il est commun aux deux multiplications // donc du coup « à multiplier par le facteur commun ». / alors il faut pas écrire la phrase comme ça du coup c'est « multiplier le facteur par deux autres nombres » / ou plutôt un facteur parce que là vous savez pas / « est équivalent à additionner les autres nombres puis à multiplier par le facteur commun ».

Un nouveau type de tâche : calculer la somme de deux produits ayant un facteur commun

Au moment de la justification, You intervient de la façon suivante :

> You : les membres de gauche comme on a fait c'est pas obligé qu'ils soient à droite non?
> P : Tu demandes si on est obligé de les mettre soit à gauche soit à droite ? ..//.. Ben la question qu'on pourrait se poser c'est à quoi ça sert de les mettre à gauche ou de les mettre à droite

Aussi P reprend cette référence après le travail précédent :

> P : alors on va revenir sur l'autre question, finalement inverser les deux membres à quoi ça sert ? Mar ?
> Mar : A rien

L'affirmation de Mar n'a certainement rien du déni, Mar est très impliquée dans les tâches proposées et sa réaction n'a peut-être rien d'étonnant. On peut en effet l'interpréter au regard des situations de production d'égalité qui formalisaient les techniques calculatoires. De ce point de vue, l'écriture dans un sens ou dans l'autre n'a pas d'importance, si ce n'est l'implicite de la temporalité et de la lecture de gauche à droite. L'unification vécue c'est-à-dire la réversibilité des écritures qui réfèrent à une même chose comme dit Flo, permet justement que le sens d'écriture soit indifférent au regard de la technologie. Outre la maladresse de la question de P, les élèves s'emparent bel et bien de l'enjeu, qui n'est pas l'intérêt de la transformation de mouvement consistant à échanger les membres de l'égalité, mais celui de l'utilisation du programme de calcul jusque-là écrit à gauche PCA(u ; a ; f) := $u \times (a + f)$ à la place de PCA (u ; a ; f) := $u \times a + u \times f$. Et c'est ce qu'induit ce sens d'écriture : la technique est livrée par l'écriture du membre de droite. C'est la rencontre d'un nouveau type de tâche de calcul qui le provoque au travers de 35 × 98 + 35 × 2. Comme le prévoyait l'analyse *a priori* néanmoins, $\tau_{calc\_m}{}^{+}$ apparaît tout comme la technique attendue. Elles se retrouvent alors en concurrence :

> P : il faudrait trouver le résultat oui, mentalement évidemment
> E : c'est simple en fait
> Gre : madame
> P : chut Ili
> Mar : inverser ça sert à faciliter l'opération
> P : Ca sert à faciliter l'opération / ça peut faciliter l'opération d'utiliser ce genre d'égalité là ?
> Classe : oui
> P : pourquoi ?
> You : madame,
> E : mais non !
> P : ha non ?
> *Brouhaha*
> P : expliquez un peu plus / Chr
> Chr : ben parce que trente cinq fois quatre-vingt dix
> Luc : dix-huit
> Chr : ça va prendre du temps / et donc on fait deux fois trente-cinq ..//..
> P : ha et tu fais 35 fois 98 ?
> Chr : mm
> So : mais non
> P : Sop ?
> Sop : parce qu'en fait on peut simplifier vu que le facteur qui est repris c'est 35 ben on peut additionner 98 plus 2 ça fait 100 et 35 fois 100 / 3500

Il y a un malentendu ici quant à la technique qu'essaye d'exprimer Chr, que nous verrons se lever plus tard lorsqu'il reprendra la parole. Néanmoins, le professeur reprend une technique consistant à effectuer les deux produits, avant d'ajouter, tel que le programme est écrit, et en supposant que Chr entend multiplier par 90 puis par 2 et peut-être par 8 après pour cela. So propose quant à elle de simplifier, c'est-à-dire d'utiliser un programme de calcul équivalent plus rapide à effectuer, et plus sûr, qui correspond aux égalités dans l'autre sens.

La formulation construite servira alors à la fois de soutien à la technique proposée par So que contestera Chr, et de technologie c'est-à-dire légitimant l'équivalence, et par suite le résultat. Examinons maintenant ce que dit Chr :

> Chr : mais non on doit faire fois 70 / on additionne
> Sop : mais faut pas additionner le facteur

P : mais non regarde le théorème on additionne pas du tout les facteurs, (*lit le théorème*) « multiplier un facteur par deux autres nombres est équivalent à additionner les deux autres nombres puis à multiplier par le facteur commun », les autres nombres ici c'est quoi ?
Classe : 2 et 98
P: et ensuite on multiplie par le facteur commun / Art ?
Art : ben 35
P : oui / le théorème ne dit pas ce que tu dis Chr / on ne multiplie pas le facteur commun par 2 / c'est pas vrai. Alors du coup ça facilite ?
Classe : oui
P : oui bien sûr parce que du coup 98 plus 2 ça fait
Dav : 100
P : 100 et 100 fois 35
Classe : 3500
P : 3500 c'est plus simple / oui Mar ?
Mar : c'est que en fait je pense que le membre de gauche en fait à ce qu'on trouve l'opération plus facilement / l'égalité donne la même opération

Mar a subtilement compris la chose : ce n'est en effet pas l'inversion des membres, mais bien le membre de gauche des premières égalités, qui est ici programme de calcul utile. You exprime bien l'égalité comme technologie c'est-à-dire justifiant que cette technique donne bien le résultat, puisqu'il y a égalité :

You : ben j'ai fait 2,34 fois 7 et 3 ça fait 10 donc j'ai écrit une autre égalité et après j'ai mis le résultat

Ici encore s'articulent écritures, techniques de calcul et logos lié à l'équivalence et au théorème. Le théorème joue bien son rôle technologique à plusieurs égards.

Une nouvelle unification : cas de la soustraction

La dernière partie de la séance est consacrée à un retour sur des extraits de fiches distribuées aux groupes lors de la deuxième séance, car aucune des égalités produites par les groupes ne convient pour les descriptions suivantes :

25 × 19	J'ai fait 25 fois 20 ça fait 500, moins 25.
41 × 199	41 fois 200 ça fait 8 200 et j'ai enlevé 41.
35 × 98	J'ai fait 35 fois 100 et après j'ai fait moins 35 fois 2.
23 × 97	J'ai fait 100 fois 23 ça fait 2 300 après j'ai enlevé à 2 300, 3 fois 23.

Les élèves sont confrontés à $T_{\text{vérification} =}$ pour l'égalité produite par un groupe quant au premier calcul : 25 × 20 – 25 = 25 × (10 + 9). Ils parviennent rapidement après effectuation des programmes de calcul à conclure à l'égalité. Pourtant l'égalité ne repose pas sur une propriété mathématique soutenant une transformation de mouvement, et cela s'identifie aussitôt par une observation syntaxique :

Enz : c'est pas les mêmes nombres
P : c'est pas les mêmes nombres / enfin pas tous
Enz : heu oui / et y'a pas de soustraction
P : ha déjà y'a pas de soustraction
Chr : si y'en a une

P : dans le membre de gauche mais je pense que Enz voulait dire dans le membre de droite / quoi d'autre ?
Enz : y'a pas les même nombres que dans le membre de gauche / il manque le nombre 20 dans le membre de droite
P : il manque le nombre 20 effectivement
Chr : mais y'a pas 10 et 9 dans le membre de gauche
P : oui, donc finalement cette égalité elle est vraie mais elle n'explique pas le procédé

Les élèves sont donc de nouveau confrontés à l'ensemble des praxéologies vécues dans le cas de la présence d'une soustraction, ce qui participe d'un mouvement d'unification pour $T_{écrire =}$:Ecrire une égalité pour décrire les techniques de calcul de T_{calc_m} et T_{calc_p}. Les égalités sont rapidement écrites, et vérifiées par effectuation. Voici celles qui sont écrites au tableau sous la dictée des élèves :

$$41 \times 200 - 41 = (200 - 1) \times 41$$

$$35 \times 100 - 35 \times 2 = (100 - 2) \times 35$$

$$100 \times 23 - 3 \times 23 = (100 - 3) \times 23$$

On observe là encore une souplesse qui perdure dans les écritures : le facteur commun dans les produits des membres de gauche sont tantôt écrits à gauche du signe × comme 35 et tantôt écrits à droite comme 23.

Conclusion

A l'issue de cette analyse, l'on peut conclure que les difficultés de formulation sont conséquentes. Pourtant c'est au travers des interactions langagières sous la direction du professeur que les transformations de mouvement émergent, des dialectiques fines se construisent en s'appuyant sur des interprétations multiples des expressions. Elles conjuguent des instanciations, et des généralisations, dans les dimensions sémio-linguistique et mathématique, et articulent équivalence de programmes de calcul, techniques de calcul, théorème et formalisations rhétoriques et algébriques, lectures syntaxiques et écritures de nombres. Ces interprétations et les liens qui se tissent entre elles demandent du temps, des reprises, des désintrications, qui ont lieu dans un véritable effort collectif. Les interventions des élèves se nourrissent les unes les autres, malgré les maladresses parfois, conduisant éventuellement à des malentendus, du côté élève comme du côté professeur. Les références multiples permettent de surmonter les difficultés langagières à bien des égards. Le théorème joue son rôle technologique à la fois dans sa fonction justificatrice et productrice d'une nouvelle technique de calcul mental pour des sommes de produits ayant un facteur commun. L'unification a donc bien lieu entre le sens du développement et de la factorisation dans le sens où la même propriété est identifiée au travers des divers formalismes. Elle s'achève avec le cas de la soustraction dans une certaine mesure.

3.3. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

A l'issue de nos analyses *a priori* et *a posteriori*, se dégagent un certain nombre d'effets de l'alternative que nous avons envisagée quant aux enjeux formalisateur unificateur et généralisateur de la distributivité. Ces effets ne nous semblent pas à mesurer en termes de réussite des élèves dans le calcul littéral, bien que les extraits de copies récoltés montrent qu'ils semblent réussir convenablement, dans leur travail technique, pour des expressions relativement peu complexes, correspondant à ce qui est attendu en 5^{e}. Nous interprétons les résultats de nos analyses à la lumière des praxéologies construites, et en particulier de la composante technologique de nature double, sémio-linguistique et mathématique. Le prisme des caractères formalisateur, unificateur et généralisateur nous semble de ce point de vue revêtir des potentialités intéressantes, qui permettent de clarifier des enjeux, vis-à-vis d'une organisation de connaissances plus vaste, intégrant les praxis anciennes et des généralisations à des systèmes de nombres qui se construisent, mais aussi de prendre en charge un certain enseignement des formalismes, et de véhiculer ainsi la construction de transformations de mouvements au sein de dialectiques substantielles. Elles n'en demeurent pas moins difficiles, et nous allons mettre en regard les effets des caractères FUG au cœur des savoirs enseignés et leur devenir dans les savoirs appris. A cet effet, nous nous appuyons sur une analyse des productions écrites des élèves de cette classe lors de l'évaluation terminale. Nous ne disposons cependant que de 21 copies, parmi les 24 autorisées, sans avoir d'informations concernant les 3 copies manquantes.

Formalismes et souplesse des écritures
Nos analyses *a priori* et *a posteriori* montrent que les situations envisagées permettent de construire divers formalismes associés à la propriété de distributivité. Elle est institutionnalisée sous forme rhétorique et algébrique. Les interprétations associées articulent les dimensions sémio-linguistique (transformation de mouvement) et mathématique (programme de calcul). Ces distinctions nous paraissent de nature à clarifier les discours qui peuvent être tenus, également légitimes, dans l'une ou l'autre des dimensions. Nos analyses *a posteriori* confirment que les élèves peuvent les construire en partie, et s'emparer de façon déterminante des dialectiques qui s'y donnent à voir. Elles nous paraissent en cela potentiellement de nature à outiller le travail algébrique, comme nous allons le voir.

Les formalismes rhétoriques, tout comme le jeu construit sur les variables didactiques à l'origine, permettent que subsiste une certaine souplesse des écritures, ainsi que nous l'avons vu au fur et à mesure des analyses des situations. Ceci conduit à penser que les manipulations ostensives qui s'exercent se fondent alors sur les fonctions syntaxiques. Cette souplesse des écritures persiste en partie au moment de l'évaluation.

L'exercice 2 consiste à compléter des égalités en utilisant la distributivité, le premier membre étant une expression algébrique donnée, x, et c étant des nombres indéterminés :

$$6 \times (x + 4) =$$

$$(x - 8) \times 2 =$$

$$5 \times c + 5 \times 7 =$$

Les élèves sont donc confrontés à $\mathrm{T}_{\textit{écrire=}}$ dans le sens du développement comme de la factorisation, et la consigne précise la technologie du point de vue mathématique.

Examinons les écritures qui apparaissent dans les copies de notre corpus :

Egalité à compléter : écriture du membre de gauche	Ecritures des membres de droite	Occurrences	Pourcentages
$6\times(x+4)=$	$6\times x+6\times 4$	14	67%
	$6x+6\times 4$	1	5%
	$6\times x+4\times 6$	1	5%
	$6\times 4+6\times x$	2	10%
	$6\times(x+2+2)$	1	
	$10x$	1	
$6\times(x:4)=$	$(6\times x):(6\times 4)$	1	

Figure 3.22 – Tableau récapitulatif des réponses pour le premier développement du contrôle

Nous laissons de côté les trois copies montrant des erreurs, dont deux montrent soit une mésentente de consigne (l'égalité est juste mais repose sur une transformation de mouvement déconnectée de la distributivité) soit une erreur de recopie et une extension d'une distributivité de la multiplication par rapport à la division. La grande majorité des élèves parvient donc à effectuer une transformation de mouvement idoine, et 4 d'entre eux montrent des écritures souples, c'est-à-dire écrivent les facteurs sans les repérer géographiquement (à gauche ou à droite) par rapport à l'écriture du premier membre, de même que les produits partiels en tant que termes de la somme pour $6\times 4+6\times x$.

Ces inversions de termes reposent sur la commutativité de l'addition qui n'est plus vraie pour la soustraction. Cette souplesse pourrait se révéler obstacle si les écritures fonctionnent de façon déconnectée de la dimension mathématique, c'est-à-dire sans faire référence à la propriété justifiant cette flexibilité possible. Observons donc le cas de la deuxième égalité engageant une soustraction :

Egalité à compléter : écriture du membre de gauche	Ecritures des membres de droite	Occurrences	Pourcentages
$(x-8)\times 2=$	$x\times 2-8\times 2$	7	33%
	$2\times x-2\times 8$	5	24%
	$(2\times x)-(2\times 8)$	2	10%
	$2\times x-8\times 2$	1	5%
	$2\times(x-4-4)$	1	
	$2\times 8-2\times x$	1	10%
	$2\times 8-x\times 2$	1	
	$10x$	1	
	$x-8\times x-2$	1	

Figure 3.23 – Tableau récapitulatif des réponses pour le second développement du contrôle

La grande majorité des élèves dont nous avons recueilli les copies ont réussi à effectuer la transformation de mouvement idoine. On retrouve les mêmes types d'erreurs que pour l'égalité précédente (malentendu de contrat, fausse distributivité notamment), et en plus, deux élèves échangent les termes, ce qui, dans ce cas, rend l'égalité fausse. Parmi les 15 élèves qui réussissent cette deuxième égalité, 6 utilisent des écritures non localisées géographiquement à un moment ou à un autre, tandis que les autres ont en quelque sorte, normalisé leur écriture. Ceci nous permet de supposer que pour ces 6 élèves au moins, la flexibilité des écritures est contrôlée ainsi que le donne à voir l'extrait suivant :

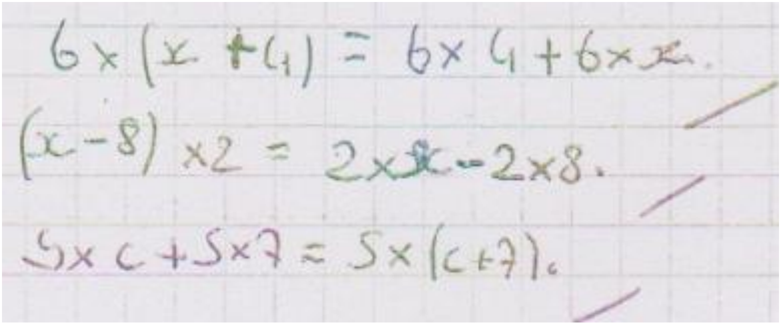


Figure 3.24 – Extrait d'une copie

La dernière égalité est correctement complétée pour 81% des copies, avec une souplesse, encore une fois, des positions des termes ou du facteur 5. Ainsi 7 élèves montrent-ils des écritures non normalisées.

Egalité à compléter : écriture du membre de gauche	Ecritures des membres de droite	Occurrences	Pourcentages
5×c + 5×7	5×(7 + c)	3	14%
	5×(c + 7)	10	48%
	5(c + 7)	1	5%
	(c + 7)×5	3	14%
	17	1	
	17c	1	
	5×c(c × 7)	1	

Figure 3.25 – Tableau récapitulatif des réponses pour la factorisation de l'exercice 2 du contrôle

Ces indices amènent à penser que les transformations de mouvement ne sont pas purement formelles, c'est-à-dire que l'écriture ne se fait pas uniquement d'un point de vue syntaxique par agrégation de signes, « dans l'ordre », il semble que l'on puisse supposer que d'autres choses se jouent. L'on ne saurait avoir accès véritablement aux praxéologies personnelles sans entretien auprès des élèves pour s'en assurer. Cependant un autre exercice de l'évaluation offre une occasion d'entrevoir les éléments technologiques à l'œuvre pour le contrôle d'égalités dans le domaine numérique comme algébrique. C'est ce que nous abordons maintenant.

Réorganisations des connaissances et rôle technologique du théorème

Nos analyses *a priori* permettent de dégager des réorganisations praxéologiques particulières, qui se modèlent au fur et à mesure des tâches qui sont confiées aux élèves, et de la construction de la propriété de distributivité. Les enjeux FUG motivent les reprises, les articulations, les différentes interprétations et évolutions des praxéologies. Ainsi, la situation de production des égalités conduit à faire émerger un nouveau formalisme qui a tout d'abord le statut de description de technique. Il ne devient élément technologique dans les praxéologies de calcul qu'après de nombreuses élaborations. Ces détours praxéologiques s'expliquent par un travail concomitant sur les formalismes, dont l'objet est de créer une composante technologique articulant mathématique et sémio-linguistique. Les obstacles de la numération comme les difficultés langagières montrent que cela ne saurait aller de soi. L'unification de la situation suivante qui se fait à l'interface de ces deux dimensions, est tout d'abord mise à l'épreuve dans la dimension sémio-linguistique : le discours produit doit assurer une fonction technologique de production de technique pour les écritures d'égalités. Le retour dans la dimension mathématique s'exerce par la question de la preuve, c'est-à-dire de la généralisation à l'ensemble des nombres entiers naturels. Après institutionnalisation, le retour aux praxéologies de calcul et à celles de production d'égalité permet d'assurer en principe l'intégration de la propriété dans les praxéologies de calcul anciennes (de les compléter et de les unifier), mais aussi dans une nouvelle organisation mathématique dont le type de tâche consiste à écrire une égalité fondée sur une transformation de mouvement. Elles sont à la fois de nature mathématique et protomathématique. Les analyses *a posteriori* laissent à penser que la technologie assure ses fonctions justificatrice (« c'est le théorème qui le dit » s'exclame Cl), productrice de technique (pour un nouveau type de calcul mental de somme) et soutien d'extensions (caractère généralisateur). Il apparaît toutefois que l'extension à une somme de trois termes reste à interroger. Elle a été réglée par le professeur observé en s'appuyant sur une généralisation portée par l'un des formalismes que ne portaient pas les autres, et qui ne livrait sans doute pas tout de cette extension (bien que la dénotation permette de conclure à la justesse de l'égalité, la généralisation de la transformation de mouvement n'est pas mise à l'étude). Le choix de ne pas faire apparaître de telles égalités dans la feuille distribuée aux élèves est certainement questionnable. Toutefois, le lien entre le formalisme algébrique et une telle extension nous semble plus globalement à interroger, comme nous l'avons laissé entendre au chapitre précédent lors des analyses de manuels où nous avons pointé de telles généralisations de l'usage de la distributivité du côté des polynômes, ce qui sera l'objet du dernier chapitre de cette thèse. Nous allons maintenant pister le devenir de ces réorganisations praxéologiques et la façon dont les élèves peuvent s'emparer des composantes technologiques à plus long terme, en analysant les productions des élèves pour le troisième exercice de l'évaluation.

Celui-ci donne pour consigne de déterminer si les égalités sont vraies ou fausses, et de justifier. Les égalités proposées sont les suivantes :

$$13 \times 105 = 13 \times 98 + 13 \times 2 + 13 \times 5$$

$$5 \times b + 10 = 5 \times (b + 2)$$

$$a \times 3 + a \times 2 = 5 \times a \times a$$

Cet exercice permet d'évaluer la praxéologie construite pour le type de tâche $T_{vérifier\ =}$. Pour ce type de tâche, selon que l'égalité relève du domaine numérique ou algébrique, les techniques et technologie peuvent différer.

Ainsi pour la première égalité, deux techniques peuvent être envisagées. La première repose sur une exécution des programmes de calcul :

$\tau_{effectuation}$: effectuer les programmes de calcul écrits dans chaque membre de l'égalité puis comparer les nombres obtenus : l'égalité est vraie si les résultats sont égaux.

$\theta_{effectuation}$: dénotation et égalité /équivalence de programmes de calcul : deux expressions numériques (de deux programmes de calcul) sont égales si leur dénotation (le nombre – résultat des programmes de calcul) est la même.

La seconde technique repose sur l'utilisation de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition dans le cas d'une somme de trois termes.

$\tau_{transformation\ de\ mouvement}$: Ecrire une égalité, ou un programme de calcul intermédiaire dans le sens de la factorisation ou du développement, et conclure par transitivité de l'égalité, ou par identification des termes (on utilise là implicitement l'égalité des polynômes et l'unicité de l'écriture).

Cette technique engage néanmoins une certaine reconnaissance d'indices ostensifs (ici le facteur commun 13) permettant de supposer que l'égalité est vraie, c'est-à-dire des savoirs pratiques de la dimension instrumentale qui permettent d'identifier que l'on a intérêt à utiliser la distributivité. Deux expressions différentes peuvent avoir même dénotation sans que l'une soit image par transformations de mouvement fondée sur la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. Si une telle transformation de mouvement ne permettait pas de donner l'égalité, on ne pourrait conclure pour autant à la fausseté de l'égalité. Elle pourrait relever d'une autre transformation de mouvement. La technologie associée à $\tau_{transformation\ de\ mouvement}$ est ici la suivante :

$\theta_{distributivité}$: Théorème (distributivité de la multiplication par rapport à l'addition)

Pour la seconde égalité, comme pour la troisième, $\tau_{effectuation}$ adaptée au domaine algébrique demande une étape consistant à choisir un nombre et à remplacer les lettres par ce nombre avant d'exécuter le programme de calcul. Cette technique ne peut assurer que l'égalité soit juste. Si les résultats obtenus ne sont pas égaux, en revanche, on obtient un contre-exemple qui suffit à invalider l'égalité. Cependant, si les nombres obtenus sont égaux, l'égalité entre les expressions ne saurait se justifier par ce seul essai. Et l'argument tient à la transformation de mouvement soutenue par la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. La technologie se compose à la fois de la définition de l'équivalence de deux programmes de calcul (c'est-à-dire que les résultats doivent être les mêmes quels que soient les nombres choisis), et de la transformation de mouvement. Cette transformation de mouvement orchestre les dimensions sémio-linguistique et mathématique, dans le sens où sa reconnaissance peut se faire du côté syntaxique comme sémantique, ou en dialectique, c'est-à-dire que l'on puisse à la fois justifier dans un discours portant sur les écritures comme sur les programmes de calcul.

Composante technologique d'une autre nature et dialectique sémio-linguistique / mathématique

Les tableaux suivants donnent un premier aperçu des discours technologiques mis en avant par les élèves. Nous avons comptabilisé comme dialectique sémio-linguistique/mathématique tout discours articulant à la fois des éléments syntaxiques et mathématiques. Comme nous venons de le voir en analysant rapidement les types de tâches, des arguments purement syntaxiques peuvent être suffisants, sans nécessaire dialectique. Nous pourrons évaluer cette dialectique en observant dans une même copie comment les élèves peuvent mettre en avant l'une ou l'autre des interprétations des écritures selon les techniques choisies. C'est ce que nous ferons dans un second temps sur un exemple de copie.

Examinons tout d'abord les types de réponses obtenues pour la première égalité :

Egalités	Technique	Eléments technologiques	Occurrences	Pourcentages
$13\times105 = 13\times98+13\times2+13\times5$	$\tau_{effectuation}$	Résultat identique (mentionné ou non)	6	29%
	$\tau_{transformation\ de\ mvt}$	***Dialectique sémio-linguistique / mathématique***	15	71%
		Lien nombre 105 somme 98+2+5	7	33%
		facteur commun 13	7	33%
		Développement ou factorisation	5	24%

Figure 3.26 – Tableau comparatif des techniques et technologies pour la première égalité

Les exécutions des programmes de calculs permettent pour cette première égalité de conclure, avec comparaison implicite ou non des dénotés.

La dialectique s'exprime par une mise en relation entre nombre, fonction syntaxique et programme de calcul comme dans la copie suivante :

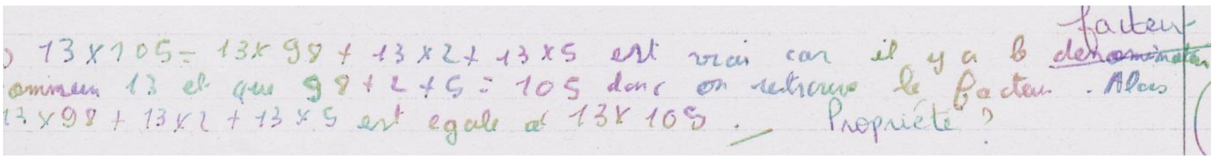

13×105 = 13×98 + 13×2 + 13×5 est vrai car il y a le ~~dénominateur~~ facteur commun 13 et que 98+2+5 = 105 donc on retrouve le facteur. Alors 13×98 + 13×2 + 13×5 est égale à 13×105. Propriété ?

Figure 3.27 – Extrait de copie montrant l'utilisation d'une dialectique sémio-linguistique/ mathématique

105 est identifié comme résultat d'un programme de calcul : la somme des nombres 98, 2 et 5, ce qui permet de retrouver le facteur du produit 13×105 dont l'élève a déjà identifié au préalable 13 comme facteur commun. On voit qu'il fait référence à la transformation de mouvement qui fonctionne ici implicitement, en faisant dialoguer les différentes interprétations des écritures.

De la même façon la copie suivante fait dialoguer la syntaxe, programme de calcul lié à l'addition et les facteurs « nombre commun », et «facteur pas commun » :

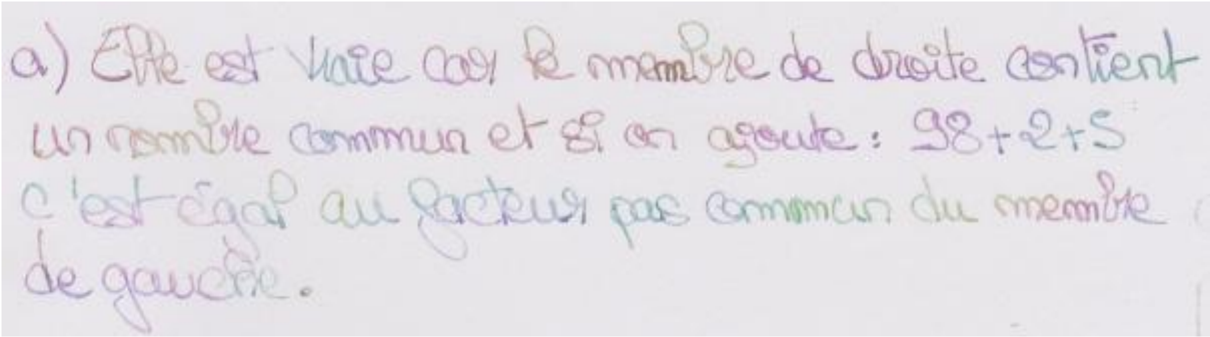

a) Elle est vraie car le membre de droite contient
un nombre commun et si on ajoute : 98+2+5
c'est égal au facteur pas commun du membre
de gauche.

Figure 3.28 – Extrait de copie montrant l'utilisation d'une dialectique sémio-linguistique / mathématique

Certains élèves sont plus rapides, mais montrent les indices d'un bon entendement de la transformation de mouvement à l'œuvre (programme de calcul et facteur commun). Ainsi :

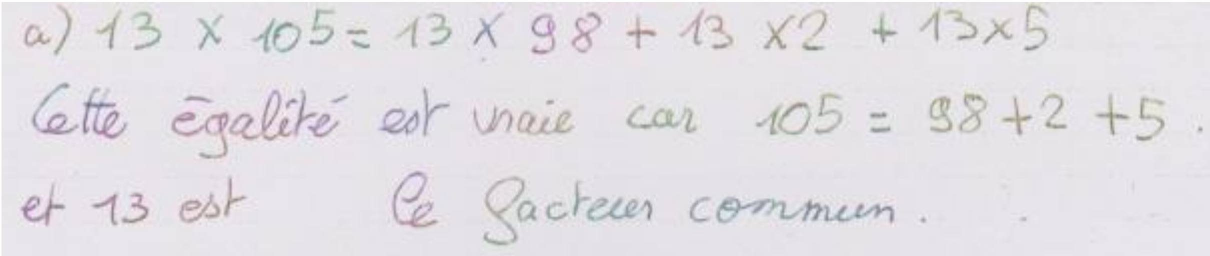

a) 13 × 105 = 13 × 98 + 13 × 2 + 13×5
Cette égalité est vraie car 105 = 98+2+5.
et 13 est le facteur commun.

Figure 3.29 – Extrait de copie montrant l'utilisation d'une dialectique syntaxique / mathématique

Nous reviendrons sur la question des implicites et omissions. Ici en particulier, cet élève ne cite pas le produit du facteur commun par la somme, mais il est implicite dans le produit donné déjà écrit 13×105. Cet élève explique donc bien à la fois 13 et 105 à partir du membre de droite. Certains néanmoins ne mentionnent que la somme ou que le facteur commun, ce qui se révèle incomplet et ne permet pas de savoir si ces élèves identifient tout à fait l'ensemble des indices ostensifs et leur interprétation nécessaires à la justification.

En outre, cinq copies montrent les écritures symboliques d'un développement ou d'une factorisation avec, par exemple, évocation de l'équivalence de programmes de calcul comme pour cet élève :

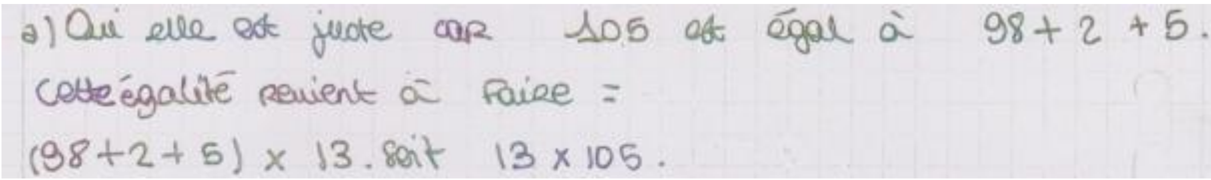
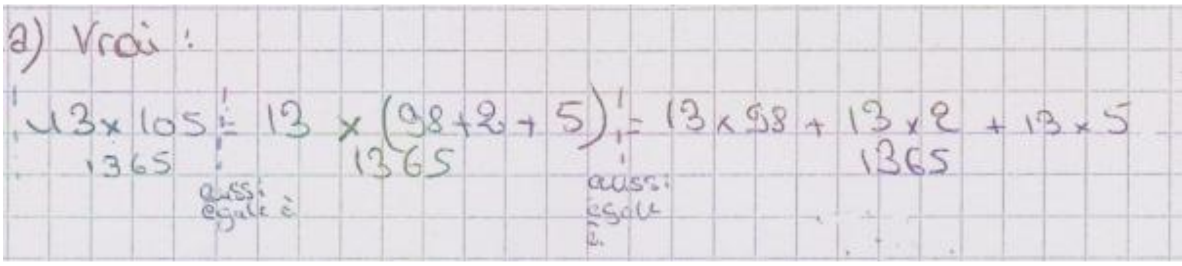

a) Oui elle est juste car 105 est égal à 98+2+5.
Cette égalité revient à faire =
(98+2+5) × 13. soit 13 × 105.

Figure 3.31 – Extrait de copie montrant l'utilisation d'une dialectique sémio-linguistique / mathématique

D'autres complètent les traces écrites usuelles des transformations de mouvement effectuées, par des vérifications de $\tau_{effectuation}$:

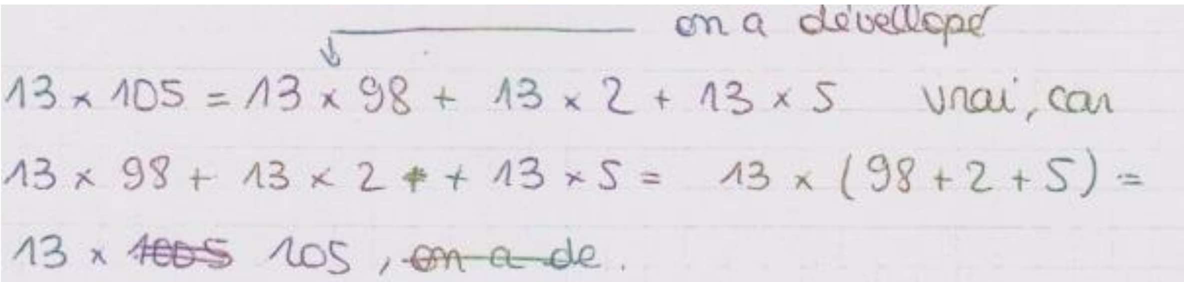

a) Vrai :

13×105 = 13 × (98+2+5) = 13×98 + 13×2 + 13×5

1365 aussi égale à 1365 aussi égale à 1365

Figure 3.32 – Extrait de copie montrant l'utilisation d'une dialectique dénotation /transformation de mouvement

Ceci témoigne d'une certaine robustesse des dialectiques construites autour des transformations de mouvement en lien avec la dénotation. Les exemples ne sont pas isolés, et certains élèves mentionnent même cette idée de transformation de mouvement, à l'instar d'une élève qui parle de calcul intermédiaire, ou encore de celle-ci, qui identifie un développement tout en écrivant à la suite une factorisation dans une double lecture de l'égalité dans un sens ou dans l'autre :


on a dévellopé

13 × 105 = 13 × 98 + 13 × 2 + 13 × 5 vrai, car

13 × 98 + 13 × 2 + 13 × 5 = 13 × (98 + 2 + 5) =

13 × ~~1005~~ 105 , ~~on a de~~ .

Figure 3.33 – Extrait de copie montrant une double interprétation

La dialectique véritablement exprimée pour la seconde égalité concerne moins de copies (52% contre 71% précédemment). Nous observons ici de manière isolée la réponse apportée. Nous verrons plus loin que c'est en analysant l'ensemble d'une même copie que l'on peut évaluer la capacité à faire dialoguer les dimensions et à produire de multiples lectures : les dimensions dans lesquelles se placent les interprétations dépendent bien sûr de l'utilité que l'on en a, et par là des spécimens rencontrés. Ainsi en va-t-il de la seconde égalité :

<table>
<tr><th>Egalités</th><th>Technique</th><th>Eléments technologiques</th><th>Occurrences</th><th>Pourcentages</th></tr>
<tr><td rowspan="9">5×b+10 = 5×(b+2)</td><td rowspan="2">$\tau_{effectuation}$</td><td>Calcul faux aboutissant à des résultats différents et conclusion cohérente</td><td>2</td><td>10%</td></tr>
<tr><td>Calcul juste mais conclusion à partir d'un exemple</td><td>3</td><td>14%</td></tr>
<tr><td rowspan="7">$\tau_{transformation\ de\ mvt}$</td><td>Dialectique sémio-linguistique / mathématique</td><td>11</td><td>52%</td></tr>
<tr><td>Lien nombre 10 et produit 2×5</td><td>3</td><td>14%</td></tr>
<tr><td>syntaxique pur 10 ≠ 2</td><td>6</td><td>29%</td></tr>
<tr><td>facteur commun 5</td><td>2</td><td>10%</td></tr>
<tr><td>Développement ou factorisation</td><td>5</td><td>24%</td></tr>
<tr><td>fausse transformation 7b</td><td>1</td><td>5%</td></tr>
<tr><td>Théorème énoncé</td><td>1</td><td>5%</td></tr>
</table>

Figure 3.34 – Tableau comparatif des techniques et technologies pour la seconde égalité

On voit donc 3 élèves utiliser la dénotation, sans transformation de mouvement de sorte que les arguments sont insuffisants :

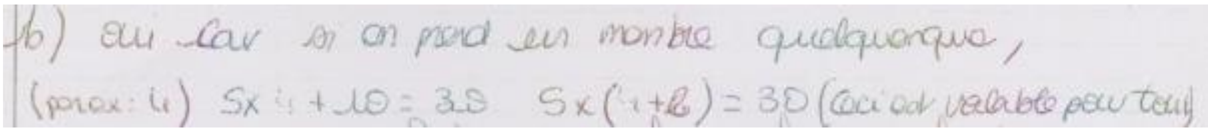

b) oui car si on prend un nombre quelquonque,
(pr ex : 4) 5x4+10=30 5x(4+2)=30 (ceci est valable pour tous

Figure 3.35 – Extrait de copie montrant un essai insuffisant

Certains élèves évoquent de manière isolée la double lecture de 10 comme nombre et comme produit de 2 par 5 :

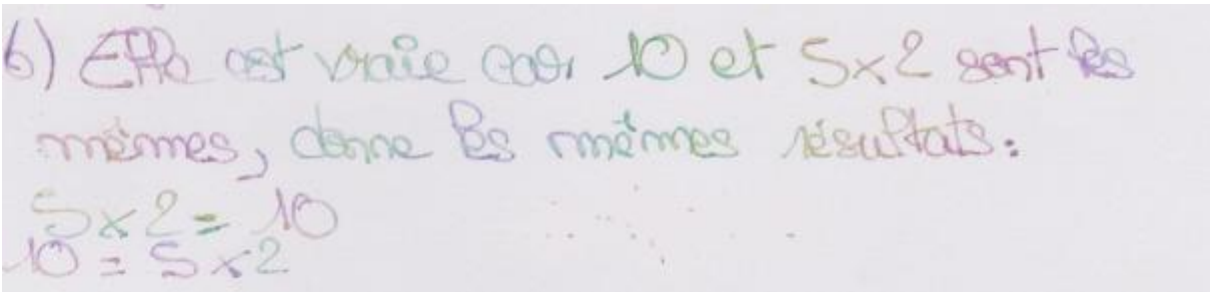

b) Elle est vraie car 10 et 5x2 sont les mêmes, donc les mêmes résultats.
5x2=10
10=5x2

Figure 3.36 – Extrait de copie montrant une transformation de mouvement évoquée

L'ensemble de la justification n'apparaît pas ici: l'évocation de la transformation de mouvement est bien présente mais très lacunaire. On peut en même temps y voir la mise en avant de l'essentiel, dans une réelle dialectique entre nombre et écriture de produit (la formulation de l'élève est intéressante de ce point de vue et semble tout à fait aller dans le sens d'écritures de même dénotation : « sont les mêmes » dit-elle).

D'autant que six élèves ne parviennent pas à réaliser cette étape, et concluent à partir d'une lecture syntaxique insuffisante du membre de gauche :

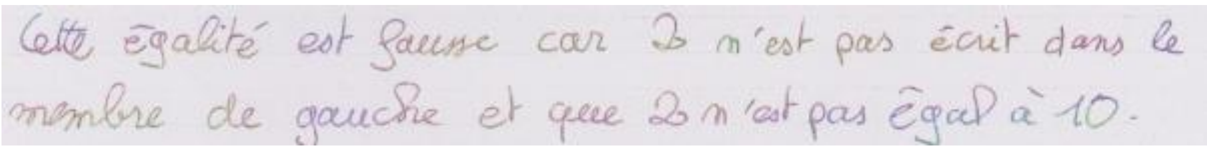

Cette égalité est fausse car 2 n'est pas écrit dans le membre de gauche et que 2 n'est pas égal à 10.

Figure 3.37 – Des arguments syntaxiques lacunaires

Une élève complète l'identification du lien entre nombre et produit par un discours, qui, malgré les maladresses langagières (elle décrit le membre de gauche en référence au membre de droite) est tout à fait juste et montre une dialectique robuste :

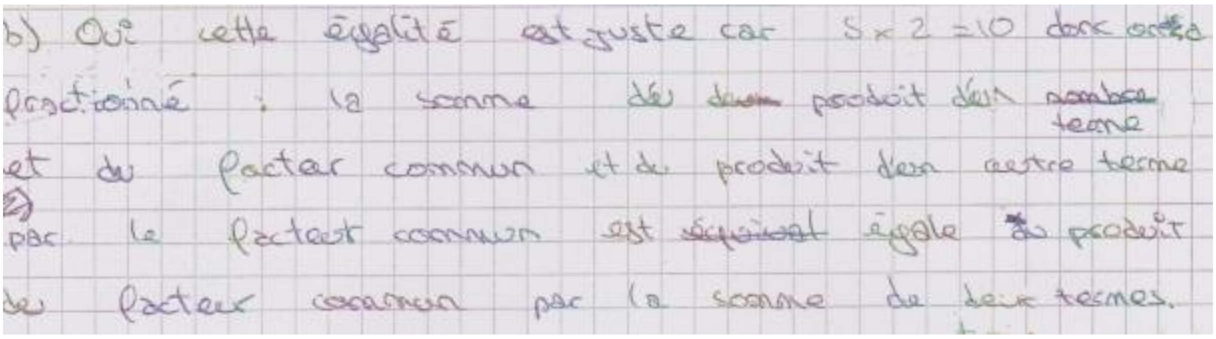

b) Oui cette égalité est juste car 5×2 =10 donc ordre fractionné : la somme des ~~deux~~ produit d'un ~~nombre~~ terme et du facteur commun et du produit d'un autre terme par le facteur commun est ~~équivalent~~ égale au produit du facteur commun par la somme de deux termes.

Figure 3.38 – Des arguments articulant mathématique et sémio-linguistique

On observe comme pour la première égalité, cinq élèves montrer des développements ou factorisations de la sorte :

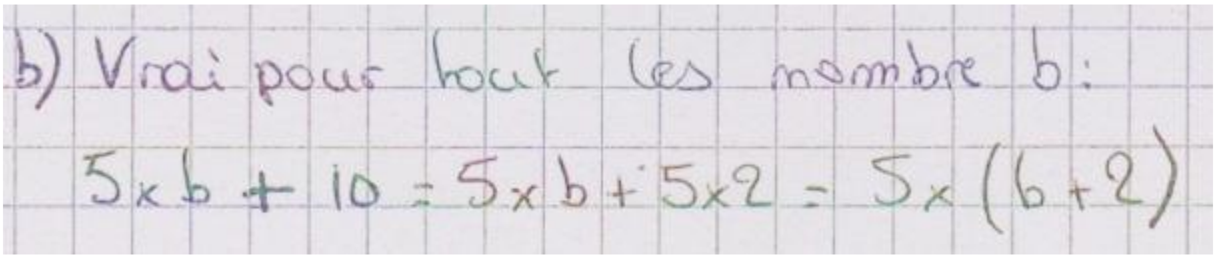

b) Vrai pour tout les nombre b :
5×b + 10 = 5×b + 5×2 = 5×(b+2)

Figure 3.39 – Des arguments de calcul algébrique

Pour la dernière égalité, la dialectique n'apparaît pas véritablement ou très peu. Ceci peut s'expliquer par les indices syntaxiques amplement suffisants pour conclure : l'énumération de l'apparition dans l'écriture factorisée du facteur commun est décisive.

<table>
<tr><th>Egalités</th><th>Technique</th><th>Eléments technologiques</th><th>Occurrences</th><th>Pourcentages</th></tr>
<tr><td rowspan="8">a×3+a×2 = 5×a×a</td><td>$\tau_{effectuation}$</td><td>Contre exemple</td><td>6</td><td>29%</td></tr>
<tr><td rowspan="7">$\tau_{transformation\ de\ mvt}$</td><td>Dialectique sémio-linguistique / mathématique</td><td>5</td><td>24%</td></tr>
<tr><td>Syntaxique faux (3+2=5 ou facteur commun)</td><td>5</td><td>24%</td></tr>
<tr><td>Syntaxique pur (dénombrement) juste</td><td>2</td><td>10%</td></tr>
<tr><td>Syntaxique / facteur commun juste</td><td>3</td><td>14%</td></tr>
<tr><td>Développement ou factorisation</td><td>4</td><td>19%</td></tr>
<tr><td>fausse transformation</td><td>2</td><td>10%</td></tr>
<tr><td>Théorème énoncé partiellement (programme de calcul équivalent) ou distributivité nommée</td><td>2</td><td>10%</td></tr>
</table>

Figure 3.40 – Tableau récapitulatif des techniques et technologie pour la troisième égalité

Identifier le fait que a soit un facteur commun dans l'écriture du membre de gauche et qu'il doit donc être écrit une seule fois à droite, est cependant bien une lecture sémio-linguistique permettant de lier fonction syntaxique et syntaxe brute (dénombrement des ostensifs). On peut la considérer incomplète car on pourrait envisager une autre transformation de mouvement fondée sur une autre propriété que la distributivité donnant cette égalité. Ainsi 5 est-il aussi important pour utiliser implicitement l'unicité de l'écriture polynomiale. Mais là encore, on ne peut tout à fait conclure : l'omission relève-t-elle d'une identification non problématique ou d'une technologie incomplète ? On ne saurait en décider à partir de ces seules traces écrites. Il n'en demeure pas moins que pour cinq élèves, la dialectique se donne à voir sur cette seule question :

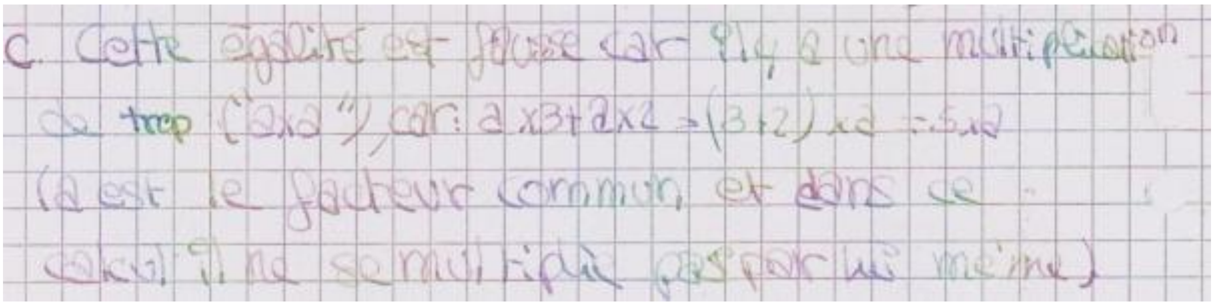

c. Cette égalité est fausse car il y a une multiplication de trop ("a×a") car : a×3+a×2 = (3+2)×a = 5×a (a est le facteur commun et dans ce calcul il ne se multiplie pas par lui même)

Figure 3.41 – Extrait de copie montrant une dialectique sémio-linguistique / mathématique

Ou encore cet élève qui fait très clairement dialoguer les dimension sémio-linguistique et mathématique en mentionnant la distributivité comme propriété devant soutenir la transformation de mouvement et la question du dénombrement des ostensifs, pertinent ici :

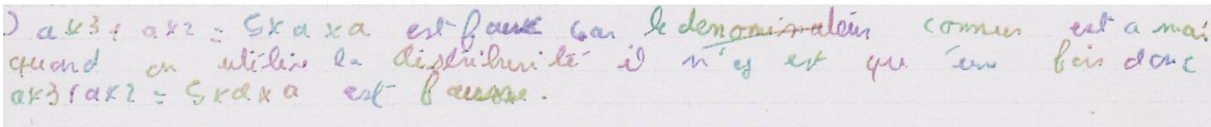
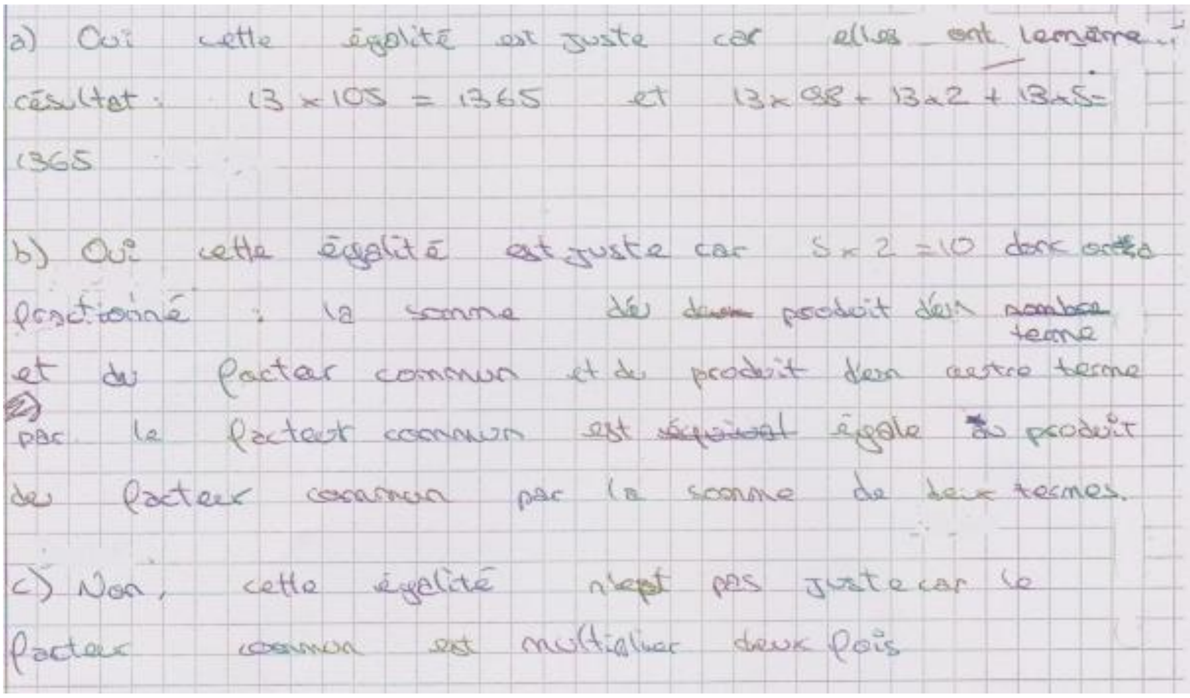

) a×3+a×2 = 5×a×a est fausse car le dénominateur commun est a mais quand on utilise la distributivité il n'y est qu'une fois donc a×3+a×2 = 5×a×a est fausse.

Figure 3.42 – Extrait de copie montrant une dialectique sémio-linguistique / mathématique

La dialectique s'exprime dans les copies par des lectures différentes, à un moment ou à un autre des égalités, c'est-à-dire par des interprétations orchestrant programmes de calcul, nombres, transformations de mouvement et dénotations. Nous ne montrerons ici qu'un exemple d'une copie, mais les analyses quantitatives précédentes montrent, ne serait-ce que pour la première égalité, que cette dialectique existe pour au moins 71% des élèves. Ce qui n'empêche bien entendu pas des lectures pouvant être erronées ici ou là. Mais l'extrait de copie suivant (dont nous avons déjà donné une partie pour la *Figure 3. 38*) est représentatif d'un effet possible de la dialectique construite, c'est-à-dire de cet usage des lectures multiples outillées par les discours soutenant à la fois du point de vue des manipulations, les écritures et les propriétés mathématiques.



a) Oui cette égalité est juste car elles ont le même résultat : 13 × 105 = 1365 et 13 × 98 + 13 × 2 + 13 × 5 = 1365

b) Oui cette égalité est juste car 5 × 2 = 10 donc on a fractionné : la somme des ~~deux~~ produit des ~~nombre~~ terme et du facteur commun et du produit d'un autre terme par le facteur commun est ~~équivalent~~ égale au produit du facteur commun par la somme de deux termes.

c) Non, cette égalité n'est pas juste car le facteur commun est multiplier deux fois

Figure 3.43 – Extrait de copie montrant des dialectiques multiples

On voit s'exercer de manière très claire, les liens entre dénotation (pour la question a)) et programmes de calcul, syntaxe et écritures de nombres (5×2=10 on a fractionné dit-elle), puis description de la transformation de mouvement sous la forme d'une égalité entre structure avec identification des fonctions syntaxiques des sous-expressions, ainsi qu' une identification syntaxique de dénombrement en lien avec la fonction syntaxique : le facteur commun est multiplié deux fois.

La question de l'implicite et des omissions

Cette dialectique est certainement moins explicite dans la plupart des copies, avec en particulier comme nous l'avons vu, des descriptions partielles des programmes de calcul à l'œuvre. Ces descriptions, si elles sont partielles, ou situées plus dans l'une ou l'autre des dimensions, mettent néanmoins l'accent sur les éléments essentiels, c'est-à-dire, utiles aux argumentations. La copie précédente montre néanmoins cette possibilité de convoquer l'une ou l'autre, ou l'une et l'autre. Le phénomène d'implicitation et d'omission et néanmoins naturel dans toute pratique experte. Les explicitations sont coûteuses, mais ont été certainement nécessaires en début d'apprentissage lors des situations expérimentées, pour pouvoir à un moment ou à un autre être convoquées. Les omissions arrivent très vite dans le travail de manipulation des élèves, dans les traces écrites en particulier, c'est-à-dire que la technologie ne s'y exprime pas toujours, ou pas de manière exhaustive. Ainsi l'extrait de cahier suivant en témoigne-t-il lors de la situation d'institutionnalisation expérimentée :

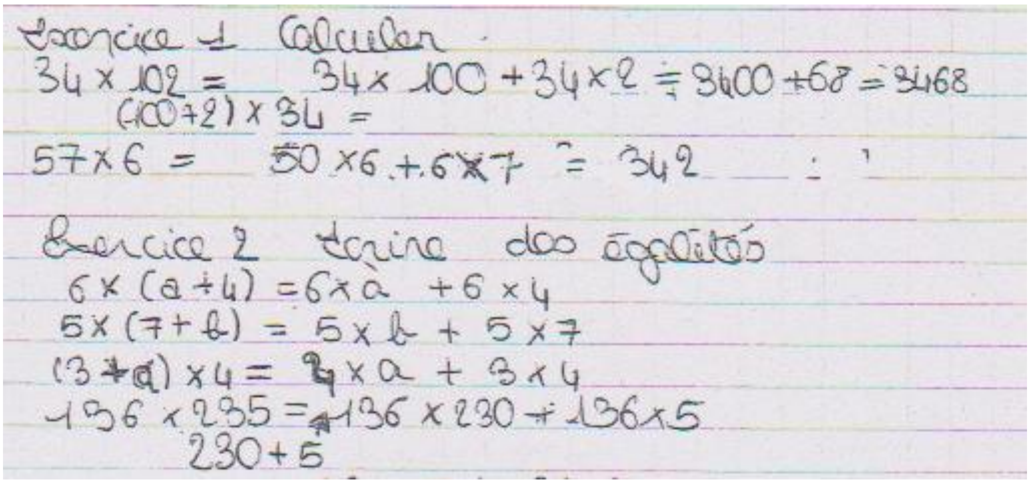


Figure 3.44 – Extrait de cahier correspondant à la situation d'institutionnalisation

On voit combien $T_{écrire=}$ outille dans un premier temps la pratique de T_{calcul_m} à l'exercice 1, dont l'élève inscrit *a posteriori* (pendant la correction ?) le membre de gauche de l'égalité manquant pour éclairer la technologie à l'œuvre. Elle complète de ce point de vue les traces écrites au tableau, qui montrent elles aussi des omissions dans l'écriture :

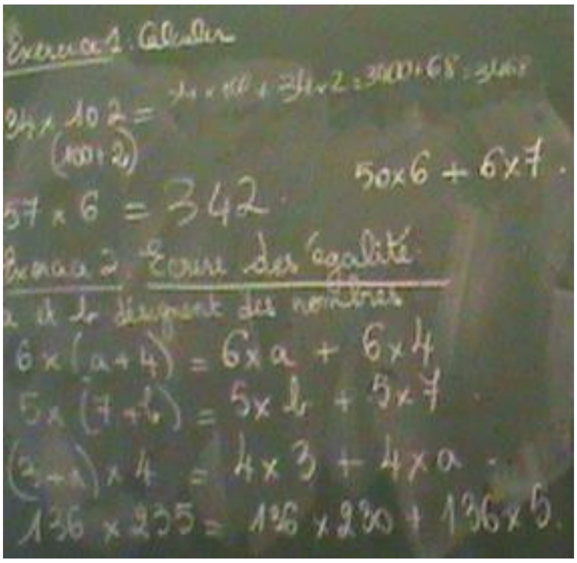


Figure 3.45 – Photo du tableau à la fin de la correction des exercices

On voit en effet la somme (100+2) écrite entre parenthèses sans écriture du produit, ou même de l'égalité. L'élève recompose tout cela, à l'écrit, au moment de la première égalité, mais plus pour la seconde. On retrouve des traces (avec omissions) de la technologie pour la dernière, dont elle éprouve semble-t-il le besoin de technologie. Ce qui n'est pas au tableau, mais a été néanmoins levé à l'oral. Ceci s'explique sans doute par la question de l'adaptation qui se pose en classe et à la non unicité de la décomposition. Du moins peut-on interpréter ainsi les traces écrites suivantes de son cahier :

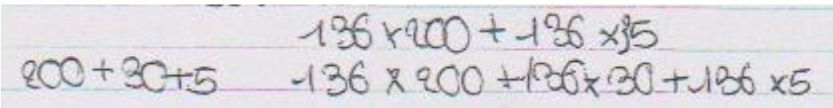


Figure 3.46 – Extrait de cahier suivant le précédent

On voit là encore avec omission l'écriture de la décomposition apparaître avec une somme de trois termes : c'est en effet l'élément crucial de l'adaptation, le reste de l'écriture n'est pas essentiel à l'exécution du type de tâche. On trouve finalement très tôt dans les cahiers, ce que Drouhard et Panizza (2012) nomment le traitement modulaire des expressions :

> Le traitement d'une formule par des calculs peut en effet concerner certains « modules » et pas d'autres, en vertu de l'absence d'interrelation syntaxique entre les parties (sous-expressions) tant du point de vue des transformations que celui de la dénotation (il y a bien des relations, mais elles sont entre les parties-les sous-expressions- et le tout – la formule). En d'autres termes, on peut appliquer une transformation de mouvement à une partie, sans que cela affecte les autres. Pour des raisons d'économie, on ne répète pas toujours les éléments inchangés dans les lignes de calcul successives. Drouhard, Panizza (2012) p. 223-224

C'est bien là ce qu'il se passe pour cette élève, qui montre des traces de la transformation $235 \xrightarrow{Décomposition} 200+30+5$. Les mêmes auteurs notent que si « la formule de départ est très complexe ou enchevêtrée (en particulier quand on a affaire à des systèmes un peu compliqués) la récupération des parties omises peut devenir vraiment ardue. », mais ce n'est pas le cas dans l'exemple précédent.

De la même façon lors de la séance suivante consacrée aux écritures des égalités dans le sens de la factorisation, trouve-t-on des traces écrites des transformations de mouvement qui éclairent la technique de calcul pour le premier programme de calcul à exécuter 35×98+35×2, puis dès le calcul suivant n'offre plus aucune trace de technique ou de technologie : seul le résultat apparaît.

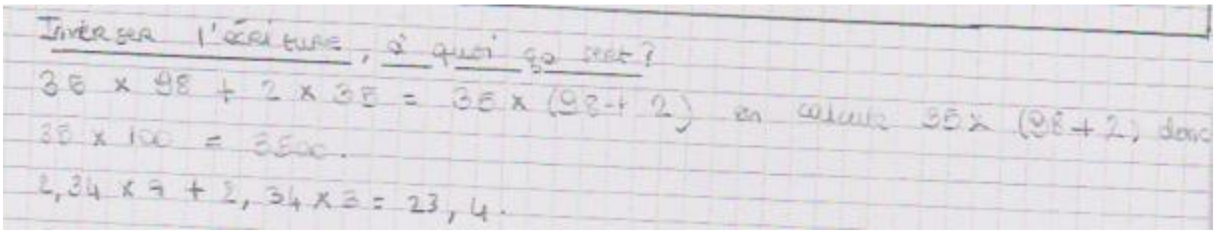


Figure 3.47 - Omissions

C'est en réalité la question de l'enjeu qui pousse ou non à des formulations écrites ou orales plus ou moins complètes. Ainsi avons-nous vu dans les séances le professeur pousser les descriptions, de façon certainement essentielle en début d'apprentissage, mais les élèves peuvent ne plus en éprouver le besoin assez rapidement. Ce besoin s'exprime au moment d'une adaptation ou d'une difficulté, avec les décompositions par exemple ici. L'explicitation est alors soit linguistique : signes de nombre que l'on distingue par exemple, soit dans la théorie mathématique.

De la même façon, la dénotation ne sera pas convoquée systématiquement pour s'assurer de sa conservation lors des transformations de mouvement et ainsi les contrôler. Les explicitations comme les dialectiques semblent cependant pouvoir l'être comme le montrent la majorité de copies.

Unifications : des organisations mathématiques locales

Nous avons vu au fur et à mesure des séances que les élèves ont été de nouveau confrontés à des types de tâches calculatoires pour reconstruire et compléter les praxéologies en y intégrant la distributivité comme élément technologique. La distributivité de la multiplication par rapport à l'addition ou la soustraction revêt ainsi un caractère unificateur de plusieurs types de tâches, anciens, traités de manière isolée jusqu'alors.

Unification T_{cm+} et T_{cm-}, unification de $\wp_{écrire\,=}$ et T_{calcul}

Ainsi avons-nous vu comment la praxéologie de l'écriture d'égalité s'avère de nature à outiller les techniques de calcul mental. Celles-ci sont à la fois considérées comme élément technologique contextualisé, et comme technique permettant d'écrire un programme de calcul équivalent plus simple à exécuter (parce qu'on y trouve par exemple des produits connus, ou dont les techniques sont très familières comme des produits par 10, 100 ou 1000).

Notons par ailleurs que dans les praxéologies construites, une subtilité demeure pour $\wp_{écrire=}$. Deux transformations sont en réalité à l'œuvre : l'une productrice d'une écriture d'un programme de calcul équivalent, et l'autre productrice d'une égalité. Les ensembles images sont de nature différente. Elles sont bien entendu liées par la même technologie :

$$t: (u; a; f) \mapsto u \times a + u \times f$$

Et

$$t: (u; a; f) \mapsto u \times (a + f) = u \times a + u \times f$$

Chacune, selon le spécimen proposé, repose éventuellement sur une autre transformation de mouvement de décomposition pour obtenir les termes.

On ne peut toutefois le réduire à des transformations à deux variables, (en référence au calcul) il y a un choix à faire par l'élève pour a et f, lorsque la consigne est l'écriture d'une égalité, ce qui permet d'aborder la question de la non unicité du modèle et de la technique de calcul (si l'égalité y est soumise). C'est ce qu'il se passe au moment de l'écriture d'une égalité reposant sur la distributivité lors de la troisième situation pour le produit 136×235. On obtient PCA(136 ;200 ;35) :=136×200+136×35 et PCA(136 ;230 ;5):=136×230+136×5. Ces deux programmes de calcul relèvent bien, du point de vue syntaxique, du théorème élaboré, et on voit apparaître un choix dans une transformation de mouvement en amont qui est celle de la décomposition, c'est-à-dire d'un changement d'écriture de nombre $235 \xrightarrow{Décomposition} 200+35$ ou $235 \xrightarrow{Décomposition} 230+5$. Mais plus encore, un nouveau modèle émerge, celui d'un programme de calcul à 4 paramètres : PCA(136 ;200 ;30 ;5) qui n'est pas vu comme une composition PCA(136 ;200 ;***30+5***) avec substitution, mais bel et bien comme une extension des programmes de calcul, en généralisant le nombre de paramètres. La généralisation porte alors sur les écritures.

Unification des types de tâche de calcul mental et posé :

Nous n'avons pas vu réapparaître de calcul posé dans les séances expérimentées. Peut-être parce qu'ils ont peu d'avenir dans le curriculum (il en serait peut être autrement si une théorie du calcul sur les polynômes, et en particulier de produit posé en faisait partie).

Cette unification a eu lieu de fait, dans la situation de production d'égalités puis lors de l'identification d'une chose commune, car les égalités observées et construites sont bel et bien issues du calcul mental comme du calcul posé lors de la première situation. Néanmoins aucune institutionnalisation ou retour sur cette praxéologie n'aura lieu lors des séances immédiatement suivantes. Elle réapparaîtra cependant, au moment de la synthèse (en annexe), dont les écritures d'égalité et la distributivité unifient les types de tâches, et donc recomposent une praxéologie locale de calcul de produits. Les deux types de tâche T_{calc_m+} et $T_{calc\_\ p}$ y apparaissent, avec des égalités servant de technologie instanciée. La théorie de l'addition itérée est utilisée dans une preuve, avant une décontextualisation pour une expression du théorème :

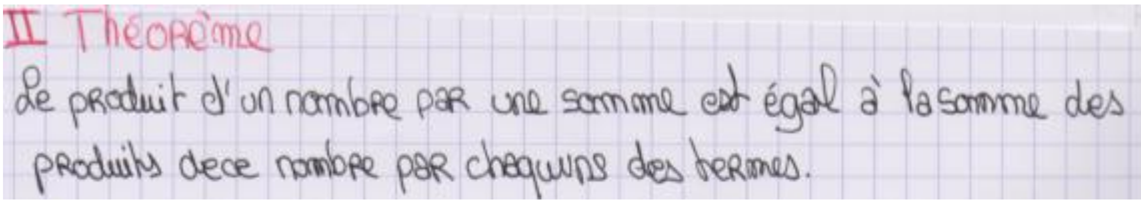


Figure 3.48 – Extrait de la synthèse réalisée par le professeur

Dans cette version finale, l'extension à un nombre quelconque de termes peut être assumée. La formulation revêt un caractère généralisateur. Néanmoins, la nature d'un facteur est ici exprimée : un nombre. Nous avons vu que pour généraliser tout à fait, la description de la transformation de mouvement ne devrait reposer que sur des fonctions syntaxiques, qui en sont les invariants. Une formulation comme « le produit d'un facteur par une somme est égal à la somme des produits de ce facteur par chacun des termes de la somme » serait plus souple.

L'enjeu se situera néanmoins en 4e, avec l'utilisation de la distributivité lorsque le facteur sera lui aussi une somme. Cependant, la complexité de la formulation n'est peut-être pas à négliger, et cet usage du mot « nombre » permet peut être une certaine clarification, là encore utile en début d'apprentissage. La généralisation est un phénomène qui ne se construit certainement pas d'emblée, et qui repose sur de nouvelles rencontres d'adaptations possibles, qui demandent alors de retoucher la technologie.

Unification de deux genres de tâches : développer ou factoriser

Enfin, l'unification entre les genres de tâches de développement et de factorisation est réalisée par le type de tâche $T_{écrire=}$ reposant sur la même technologie de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et l'unification des formalismes afférents.

Perspectives

Si des analyses fines et détaillées n'ont pas été conduites dans la seconde classe où l'ingénierie a été expérimentée, des premiers éléments tendent à confirmer la robustesse des analyses *a priori* effectuées. L'étude de nos données supplémentaires nous apparaît comme une perspective de recherche complémentaire à la fois pour des questions de diffusion, et pour éprouver la robustesse des phénomènes qui apparaissent dans nos observations. Le fait que le professeur de cette autre classe ne soit pas le chercheur nous apparaît d'autant plus intéressant pour pister la manière dont les articulations entre dimensions sémio-linguistique et mathématique peuvent advenir. De quelle nature sont les interventions didactiques du professeur, dans les situations de formulation comme d'institutionnalisation ? Sont-elles semblables à celles que nous avons observées, et en particulier montrent-elles des effets de contrat qui peuvent apparaître ? La mémoire des situations précédentes joue-t-elle le rôle de levier de la même manière au travers des interventions des élèves ? En l'état, les potentialités des enjeux formalisateur, unificateur et généralisateur, détaillées dans notre analyse *a posteriori* semblent pouvoir se retrouver dans la deuxième expérimentation. Celles-ci concernent à la fois les dialectiques entre les dimensions sémio-linguistique et mathématique, et les fonctions technologiques de la propriété de distributivité. Elles amorcent en particulier un mouvement de généralisation lié aux systèmes de nombres au fondement de ces caractères FUG. Nous avons entrevu cependant au chapitre précédent, et la question s'est également posée au travers de l'extension à une somme de trois termes dans cette expérimentation, un autre mouvement de généralisation, de formalisation et d'unification, s'exercer du côté des polynômes, et dont nous avons envisagé un fondement plus intrinsèque au calcul algébrique, et complémentaire : celui de la substitution. Afin de prolonger cette première étape d'ingénierie liée à notre expérimentation, nous allons en amorcer une étude, à laquelle nous consacrons notre dernier chapitre de thèse.

Chapitre 4

La substitution, une notion formalisatrice, unificatrice et généralisatrice complémentaire et incontournable ?

INTRODUCTION

L'étude que nous amorçons ici trouve son origine dans les analyses de manuels que nous avons conduites au second chapitre. La focale apportée par les caractères formalisateur, unificateur et généralisateur pour l'analyse des savoirs à enseigner et enseignés nous a conduite à mettre à jour une double extension de l'utilisation de la distributivité. D'une part, les types de nombres engagés se révèlent, au fur et à mesure des niveaux de classes, de plus en plus larges, depuis les nombres entiers, en passant par les nombres relatifs, rationnels, jusqu'aux nombres réels dans une certaine mesure (sur une partie du moins). Ainsi la distributivité voit-elle son domaine de validité étendu à différents systèmes de nombres. D'autre part, et de façon concomitante, l'utilisation de la distributivité dans le langage algébrique s'étend à des expressions qui ne sont pas réduites à une lettre ou à un nombre, mais qui correspondent à une représentation symbolique de programme de calcul. Nos premières analyses de manuels et des programmes, tendent à dessiner des généralisations muettes du côté des polynômes dans cet usage, véhiculé par des substitutions qui paraissent présentées comme allant de soi. Comment interpréter dès lors cette extension particulière de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition ? Est-ce un plongement des pratiques dans l'anneau des polynômes à coefficients réels que l'on préconstruit implicitement ainsi ? Comment et à quel moment ce mouvement de généralisation apparaît-il et se développe-t-il ? Les pratiques qui se donnent à voir dans la dimension sémio-linguistiques peuvent-elles être transparentes ? Nous avons laissé en suspens ces questions, et les reprenons ici.

Nous entendons explorer les types de tâches qui les voient naître, et l'environnement technologique susceptible d'accompagner les adaptations. Du point de vue linguistique, il s'agit de déterminer les catégories des expressions engagées et les généralisations alors opérées vis-à-vis de la distributivité. Ces analyses croisent également les évolutions des formalismes de la propriété mathématique que nous avons déjà repérées au travers des programmes. Ceci nous amène à compléter l'analyse des caractères formalisateur, unificateur et généralisateur de la distributivité et la façon dont ils adviennent du côté des expressions algébriques. Nous supposons en effet, que les adaptations afférentes des techniques de calcul existent de façon précoce et silencieuse. En même temps, nous entrevoyons dans la substitution un nouveau fondement propre au calcul algébrique, et complémentaire aux généralisations liées aux systèmes de nombres.

Ce chapitre s'organise en quatre parties. La première est consacrée à des analyses plus spécifiques des généralisations qui s'exercent bel et bien, comme nous le verrons, au travers de substitutions liées à la distributivité dans les savoirs à enseigner et enseignés. Nous analysons dans un premier temps pour cela, trois collections de manuels, de la 5^{e} à la 3^{e}. Dans un second temps, nous mettons en regard nos analyses avec celles de pratiques enseignantes à partir de nouveaux extraits d'entretiens dont nous avons déjà parlé, afin de questionner la nature de l'extension, et plus particulièrement les effets possibles des implicites véhiculés par ce mouvement de généralisation. Afin d'outiller nos analyses nous présentons en préambule quelques éléments épistémologiques à propos de la substitution, afin de caractériser les pratiques muettes afférentes.

Dans une deuxième partie, nous menons une réflexion épistémologique approfondie sur la notion de substitution, afin d'envisager, dans une troisième partie, les fondements d'une nouvelle notion formalisatrice, unificatrice et généralisatrice dans le domaine du calcul algébrique, complémentaire à la distributivité. Nous nous appuyons sur le travail de Serfati (2005) pour ce faire, mais conduisons notre propre réflexion, afin de déterminer les potentialités et les limites de l'introduction dans l'enseignement, d'un tel complément théorique du côté des écritures. Dans une quatrième partie, nous concluons ce chapitre par une exploration synthétique de nouveaux enjeux formalisateur, unificateur et généralisateur pour l'enseignement du calcul algébrique, qui pourraient constituer un prolongement de notre projet d'ingénierie tout au long de la scolarité obligatoire.

4.1. GENERALISATION DE L'UTILISATION DE LA DISTRIBUTIVITE ET SUBSTITUTION

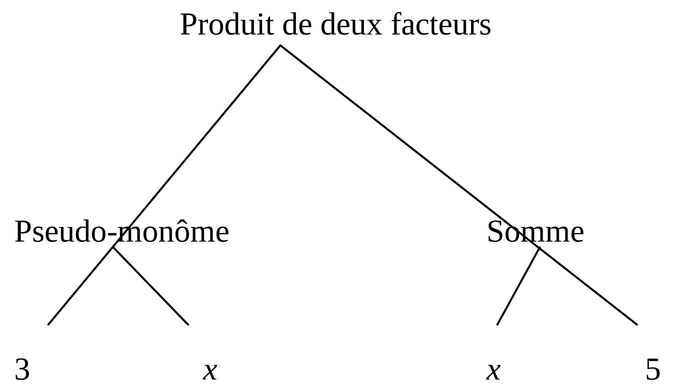
Cette partie vise à approfondir les aspects formalisateur, unificateur et généralisateur de la distributivité au regard de l'extension de son usage du côté des polynômes, telle que nous l'avons quelque peu mise à jour à l'occasion de nos analyses de manuels dans le chapitre 2. Nous commençons par définir ce que nous entendons par « généralisation de l'utilisation de la distributivité du côté des polynômes ». Nous nous appuyons pour cela sur la notion de substitution à propos de laquelle nous amorçons une réflexion épistémologique. Les généralisations auxquelles nous nous intéressons étant étroitement liées aux formalismes symboliques de la propriété de distributivité et à leurs usages, nous utilisons tout d'abord le modèle linguistique des écritures symboliques algébriques (Drouhard 1992) que nous avons présenté au chapitre 1. Dans un second temps, nous nous appuyons sur les résultats de cette réflexion pour fonder de nouvelles analyses de manuels centrées sur la question de l'existence et de la caractérisation de telles généralisations, tout comme sur celle de leur prise en charge dans l'existant. Une mise en regard avec de nouveaux extraits des entretiens menés auprès des enseignants que nous avons déjà présentés, complète ces analyses. En conclusion, nous présentons les éléments émergeants de cette étude quant aux spécificités de la généralisation de l'utilisation de la distributivité « du côté des polynômes », et de la pratique de la substitution qui l'accompagne.

4.1.1 Préambule : une amorce de réflexion épistémologique sur la substitution

Notre analyse se fonde tout d'abord sur les formalismes institutionnalisés de la distributivité, qui, comme nous l'avons vu dans les premiers chapitres de cette thèse, se présentent sous la forme d'écritures symboliques propositionnelles, dans les programmes comme dans les manuels. La généralisation spécifique qui nous intéresse ici relève d'une utilisation de la propriété de distributivité engageant, implicitement ou non, une certaine modification de la catégorie[50] des termes et des facteurs dans les expressions de ses écritures symboliques. Rappelons que ces écritures sont au nombre de six : $k(a+b)=ka+kb$ et $k(a-b)=ka-kb$ pour la classe de 5^{e}, puis $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$ pour la classe de 4^{e} et enfin $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$et $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ pour la classe de 3^{e}. Les catégories sont celles des sous-expressions a, b, c, ou k. Nous ne considérons pas, dans un premier temps, comme généralisation « du côté des polynômes », l'utilisation pour des catégories de Constante (qui correspondent à des écritures de nombres) ou de Variable (qui correspondent à des écritures de nombre indéterminé). Ainsi utiliser la distributivité connue sous la forme $k(a+b)=ka+kb$ pour développer l'expression « $3(x+5)$ » ne relève pas de l'extension qui nous occupe. Les catégories correspondent soit

[50] Rappelons que l'on distingue en sémio-linguistique, catégorie et fonction syntaxique d'une expression ou d'une sous-expression, Drouhard (1992) définit les catégories suivantes permettant de modéliser l'ensemble des expressions symboliques algébriques telles qu'on les rencontre dans l'enseignement de l'algèbre élémentaire. Parmi les 21 catégories possibles relatives aux sous-expressions des formules, l'on trouve par exemple : Somme, Différence, Produit, Quotient, Fraction, Puissance, Racine, Opposé, Valeur absolue, Constante, Variable ou Pseudo-monôme (d'autres catégories sont définies pour les propositions, qui ne font pas l'objet de notre propos).

à des constantes, les nombres donnés et écrits sous leur forme décimale, 3 et 5, soit à une variable, le nombre indéterminé noté x. Nous revenons sur ce cas dans la troisième partie néanmoins où nous faisons le point sur les différents mouvements de généralisation orchestrés par la distributivité. Nous considérons cependant comme extension, l'utilisation de la distributivité pour développer une expression telle que « $3x(x+5)$ », car « $3x$ » relève d'une catégorie particulière, que Drouhard (1992) appelle Pseudo-monôme. Cette catégorie se distingue de celle d'un produit par le fait que, sur le plan de la structure linguistique, l'on peut considérer qu'il y a deux opérations multiplicatives : l'une interne comme pour $3 \times x$ et l'autre externe, comme pour $3x$. Cette distinction rejoint celle de la théorie des polynômes dans laquelle $3 \times x = 3x$ est une égalité entre un produit et un polynôme, alors que dans les $\mathbb{R}$-algèbres, les deux écritures de chaque membre correspondent à un produit (Charles 1985 cité par Drouhard 1992). Les dénotations des catégories produits et pseudo-monôme sont les mêmes, mais l'agrégation par juxtaposition oriente la lecture structurelle d'un produit de trois facteurs comme pour « $3x(x+5)$ ». La sous-structure dont dérive « $3x$» se trouve en position de facteur par rapport à la structure globale, ou autrement dit en position 'prioritaire'[51], ce que l'on peut représenter par l'arborescence suivante :



Plus généralement, on peut dire que la catégorie Pseudo-monôme est prioritaire par rapport à la catégorie Produit.

Nous envisageons finalement les extensions du côté des polynômes dont nous parlions au chapitre 2, comme des altérations de catégories des substituantes[52] dans l'usage des propositions formalisant la propriété de distributivité, les altérations faisant référence à des catégories autres que constante ou variable. Nous considérons que ces dernières sont les catégories initialement émergeantes de la construction de la distributivité à partir d'une généralisation de propriétés sur les systèmes de nombres. Ainsi, estimons-nous que les

[51] Il est possible de définir la notion de priorité d'un point de vue structurel pour généraliser son acception courante liée à l'effectuation, de façon à légitimer l'assertion selon laquelle la catégorie de pseudo-monôme est prioritaire par rapport à la catégorie produit. Cette définition ne saurait être présentée sans un certain nombre de concepts linguistiques, hors de notre propos. Nous nous contenterons ici de cette acception généralisée dont l'intuition suffit à rendre compte pour ce qui suit. Nous renvoyons néanmoins le lecteur intéressé à Drouhard 1992 p. 185.

[52] Nous empruntons un terme à Serfati (2005) défini comme « forme » donnée engagée dans une substitution. Nous reviendrons sur ce point dans la troisième partie de ce chapitre. Les substituantes sont pour nous ici des expressions symboliques algébriques se substituant dans les faits aux lieux des lettres dans les identités correspondant à la propriété de distributivité. Ainsi pour développer « $3x(x+5)$ » avec « $k(a+b) = ka + kb$ », on peut considérer « $3x$ » comme substituante de « k ».

utilisations pour une constante, ou pour une variable en sont les usages *normalement* portés, par construction, par les formalismes.

Ces premiers éléments définis, nous allons affiner nos analyses de manuels précédemment amorcées concernant la généralisation « du côté des polynômes ».

4.1.2 Analyse de manuels : des généralisations existantes, précoces et muettes

Une première analyse des manuels des collections Triangle, Transmath et Phare permet de préciser que les catégories qui émergent, sont celles de Pseudo-monôme, de Puissance, de Somme, de Différence, ou plus généralement de Somme Algébrique à n termes. Afin de ne pas alourdir notre propos, nous ne présentons que les analyses des collections Triangle et Transmath. Ce choix correspond au fait que nous cherchons à déterminer l'existence de telles généralisations, et dans une certaine mesure la façon dont elles peuvent vivre dans les pratiques (en supposant que les manuels peuvent être le reflet de pratiques existantes). Les deux collections, tout en attestant de l'ensemble des catégories susmentionnées, présentent des différences notables, comme nous le verrons, qui nous permettent d'entrevoir la diversité possible des pratiques attenantes à cette généralisation.

Les altérations de catégories afférentes étant fortement liées à des extensions praxémiques, nous structurons notre analyse en fonction des genres de tâches et des niveaux de classe. Cela nous permet de déterminer les lieux de ces extensions, et par suite ce qu'elles engagent comme généralisation à propos de la propriété mathématique de distributivité. Nous distinguons donc trois genres de tâche afférents au calcul algébrique, conformément à ce que l'on trouve dans les manuels : développer, factoriser et réduire.

Collection Triangle

Manuel de 5^e : $k(a+b) = ka + kb$ *et* $k(a-b) = ka - kb$
Pour le genre de tâche consistant à développer ou à factoriser une expression algébrique, aucune nouvelle catégorie n'apparaît pour k, a ou b, à l'exception du développement proposé dans un exercice résolu p. 128 de l'expression $2 \times (2 + 3x)$ où l'on voit apparaître un pseudo-monôme. La solution donne le développement sous la forme 4 + 6x sans aucun commentaire autre que « je simplifie l'une des expressions ou les deux », pour livrer la technique permettant de « prouver que deux expressions littérales ne sont pas égales ». Outre les choix du terme simplifier à la place de développer, et de la technique (le manuel propose de développer avant d'affecter une valeur à la variable pour fournir un contre exemple) qui sont questionnables, l'on observe que l'utilisation étendue à un cas tout à fait exceptionnel où b est un pseudo-monôme se fait de façon muette. Par ailleurs, le manuel n'écrit même pas la somme des produits par 2 pour 'montrer' les traces du développement. Aucun exercice autre n'occasionne de développement ou de factorisation où k, a ou b correspondent à des pseudo-monômes. Pour ces genres de tâches, l'on peut conclure que l'extension de la distributivité du côté des polynômes au sens où nous l'entendons, n'apparaît pas véritablement. Notons que l'interprétation de k, a et b comme nombre donné (constante) ou indéterminé (variable) correspond à la totalité des expressions à l'exception de celle que nous venons d'analyser.

En revanche, pour le genre de tâche de réduction apparaissent des extensions de l'utilisation de la propriété, dès la partie « Connaissances » et dans les exercices pour huit expressions à réduire. Dans chacun des cas, il s'agit de réduire une expression ou sous-expression constituée d'une somme de trois ou quatre termes, chacun des termes étant un produit (ou un pseudo-monôme) d'une constante par une même variable. Ainsi la partie « Connaissances » présente-t-elle une première telle utilisation de la distributivité :

(3) la distributivité :
- $k \times a + k \times b = k \times (a + b)$
- $k \times a - k \times b = k \times (a - b)$

$C = 3 \times x + 5 \times x + 2 \times x$
$C = (3 + 5 + 2) \times x$
$C = 10x$

Figure 4.1 – Triangle 5ᵉ 2010 p. 127

La technologie est présente, mais aucun discours n'accompagne l'adaptation permettant de l'utiliser pour une somme de trois termes. L'on pourrait penser *a priori* que l'adaptation soit de type introduction d'étape pour se ramener à une somme de deux termes, par associativité de l'addition. On peut alors utiliser à deux reprises la distributivité avec, par exemple, la suite d'égalités :

$$3 \times x + 5 \times x + 2 \times x = (3 \times x + 5 \times x) + 2 \times x = (3 + 5) \times x + 2 \times x = 8 \times x + 2 \times x$$
$$= (8 + 2) \times x = 10 \times x$$

L'étape donnée par le manuel ne correspond cependant à aucune de ces égalités. Etant donné le formalisme écrit comme référent à gauche, l'on pourrait alors penser que l'étape consiste en une substitution, l'expression $(3 + 5 + 2) \times x$ correspondant au produit $k \times (a + b)$ où b serait substitué par la somme $5 + 2$ (ou de façon symétrique a par $3 + 5$) en utilisant implicitement aussi la commutativité de la multiplication. Mais pour cela, l'utilisation du formalisme engendrerait une écriture comme $3 \times x + (5 + 2) \times x$ et donc de nouveau l'emploi de la distributivité à deux reprises, ce qui ne paraît pas correspondre aux indices ostensifs donnés par l'expression de la seconde ligne. L'extension praxémique qui se donne à voir semble en réalité fondée par une extension de la technologie, et implicitement du formalisme, qui n'est pas écrit, mais qui correspondrait à l'écriture suivante :

$$k \times a + k \times b + k \times c = k \times (a + b + c)$$

Cette extension se fait de façon précoce, dès les premières occasions d'emploi, et de façon muette, sans moment exploratoire dans le manuel. Plus encore, semble-t-elle présentée comme transparente. Cependant, les écritures des égalités précédentes montrent que le lien avec le formalisme donné de la distributivité repose sur une utilisation à deux reprises de la propriété, avec regroupement de deux termes. Cette introduction d'étape n'est peut-être pas évidente, étant donné qu'elle n'est pas immédiate, par analogie scripturale par exemple, et ce certainement d'autant moins pour des élèves en début d'apprentissage.

Le fait que cette généralisation de l'utilisation de la distributivité ne soit pas mise à l'étude et réfère en réalité à une extension de formalisme de la technologie, peut également entretenir implicitement l'idée, que les catégories susceptibles de correspondre aux substituantes de k, a et b, ne peuvent être que celles de Constante (nombre), ou de Variable (nombre indéterminé formalisé par *une* lettre). C'est une caractéristique très particulière de ce manuel à ce niveau. Par ailleurs, cette idée est confortée par les cas de réduction de sommes de pseudo-monômes. Dans la partie « Connaissances » du manuel, le signe × apparaissant dans l'écriture de la propriété telle qu'elle est présentée, insiste sur la catégorie Produit, tout comme pour ce qui est de l'exemple donné à côté. Dans la partie « Exercices », ces produits apparaissent comme pseudo-monômes, c'est-à-dire que les signes de la multiplication ne sont pas visibles dans les expressions données à réduire. Ainsi trouve-t-on des écritures telles que $6x + x + 5x$ que l'énoncé demande de « simplifier ». L'utilisation de l'extension praxémique que nous avons mise en évidence précédemment, demanderait dans ce cas, de passer de la catégorie Pseudo-monôme à la catégorie Produit. Il faudrait en effet écrire, ou du moins penser l'écriture, comme celle de $6 \times x + 1 \times x + 5 \times x$ pour s'appuyer sur le formalisme institutionnalisé par le manuel. Il est en réalité fort douteux, compte tenu des formalismes de la partie « Connaissances », que les expressions soient considérées autrement que comme produits chez les élèves. Ceci n'est bien sûr pas inadéquat, mais contraste simplement avec les apparitions en 4^{e} des catégories de Pseudo-monôme prégnantes dans les utilisations de la distributivité comme nous allons le voir.

Manuel de 4^{e} : entre formalisme ancien et nouveau $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$
Le formalisme ancien associé à la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, est repris dès la partie « Activités » dans le manuel de 4^{e}, où il est demandé de l'utiliser pour développer des expressions comme « $5x(-4 + 2x)$ ». L'interprétation de $5x$ comme un produit, à l'instar de ce qui se pratique dans le manuel de 5^{e}, aboutit à une apparente impossibilité d'employer la distributivité, l'expression étant un produit de trois facteurs. Là encore, l'adaptation permettant de se ramener à un produit de deux facteurs repose sur l'associativité, de la multiplication dans ce cas. Ceci conduit à un choix : soit on regroupe le produit « $5x$ », soit on regroupe le produit « $x(-4 + 2x)$ », si l'on n'utilise pas la commutativité qui aboutirait encore à un choix supplémentaire. Quoi qu'il en soit, le deuxième choix conduirait à utiliser la distributivité à deux reprises, mais pas le premier, ce qui légitimerait cette préférence, par économie. Mais il n'y a pas *a priori* de raison de favoriser l'un ou l'autre si l'on n'a jamais exploré les deux possibilités pour développer, et ce d'autant plus que « $5x$ » n'a pas été considéré comme pseudo-monôme auparavant. La rencontre se fait de façon à nouveau muette, aucun discours n'accompagne ce changement de point de vue, qui semble alors réglé par contrat, à l'instar de l'exemple donné par la partie « Connaissances » :

➡ **Exemple 1 :** Développer $A = 5\,(-\,2x + 8)$ ➡ **Exemple 2 :** Développer $B = -\,5x(2x - 4)$

$A = 5(-\,2x + 8)$	On reconnaît $a(b + c)$	$B = -\,5x(2x - 4)$
$A = 5(-\,2x) + 5 \times 8$	On remplace par $ab + ac$ en plaçant les signes de multiplication nécessaires	$B = -\,5x \times 2x - (-\,5x) \times 4$
$A = -\,10x + 40$	On réduit les produits	$B = -\,10x^2 + 20x$

2. Calcul littéral et initiation à la démonstration | **31**

Figure 4.2 - Triangle 4^{e} 2011 p. 31

Notons de plus que la nouvelle catégorie de Pseudo-monôme[53] apparaît tant pour les substituantes de k, que de a ou de b. Ceci réalise une extension de l'utilisation de la distributivité vue en 5e. L'unification implicite réalisée ici entre les deux formalismes anciens pour ne conserver plus que la forme additive, est par ailleurs ambigüe : le signe de la soustraction étant coloré en rouge pour l'expression B, il semble en réalité qu'on utilise l'autre formalisme de la classe du niveau précédent, lié à la distributivité de la multiplication par rapport à la soustraction, ce qui est, du reste, plus économique pour gérer les signes *a priori* dans ce cas. Ce n'est donc pas ce double usage qui est étonnant mais l'unification passée sous silence, réalisée par l'unique forme écrite entre les deux exemples, qui aboutit à une extension de l'usage de l'ancien formalisme sous forme additive. Mais on ne sait pas très bien comment, étant donné que ce n'est pas cela que l'on semble faire, compte tenu de la mise en avant du signe de la soustraction (il n'y a pas de recomposition en somme de l'opposé). Cette interprétation néanmoins nous laisse penser que se réalise donc dans les faits, une extension plutôt de l'utilisation des deux formalismes pour des expressions dont les termes ou les facteurs se voient assigner de nouvelles catégories : celle de pseudo-monôme. Cette interprétation des écritures de produits est nouvelle, compte tenu des l'analyse du manuel de 5e, et n'est pas commentée. Plus encore, elle repose sur un choix, pour k, qui n'est ni explicité, ni motivé quant à la priorité du pseudo-monôme sur le produit.

Une seconde extension se réalise de même pour le genre de tâche de développement dans la partie « Activités ». Il s'agit de la catégorie de Somme pour k. Cette substitution majeure en 4e, a pour enjeu la construction d'un nouveau formalisme de la distributivité : $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$, dont nous avons déjà parlé. Le manuel cependant, ne fait pas apparaître de démonstration de ce nouveau formalisme, dont la construction n'est pas claire (est-ce une généralisation de la situation des rectangles ?). La partie « Activités » demande par exemple en amont de développer « $(5x+3)(4x+2)$ ». On peut penser que l'objectif est de découvrir la double distributivité, et donc qu'il s'agisse d'utiliser la distributivité sous son formalisme ancien, à deux reprises. Dans ce cas, k est une somme, ce qui réalise une extension de l'usage de l'ancien. Cette extension ne sera cependant pas travaillée. Dès que le nouveau formalisme est mis en place, il n'y aura pas *a priori* de retour à cet usage étendu de l'ancien formalisme. Cette extension se réalise à nouveau sans discours, et n'a pas d'avenir à ce niveau de classe. Le nouveau formalisme est utilisé pour des substituantes dont les catégories relèvent soit de constantes, soit de pseudo-monômes (ou d'opposé de pseudo-monômes).

Notons par ailleurs que la rupture réalisée quant au genre de tâche factoriser en 4e est marquée par l'absence d'une telle rubrique dans la partie exercices, alors que s'y trouvent des rubriques nommées « Réduire une expression littérale » puis « Développer avec la distributivité » et enfin, « Développer avec la double distributivité ».

Le genre de tâche de réduction utilisant la distributivité, voit un seul changement s'opérer pour k, qui peut correspondre à une puissance, à l'instar de « x^2 » dans l'expression à réduire « $9x^2+3x^2$ ». Notons du reste que les exposants présents dans le manuel sont au

---

[53] Pour être tout à fait précis, il s'agit plutôt ici de l'opposé de pseudo-monôme.

plus égal à 2. Apparaissent néanmoins encore des réductions de sommes de plus de deux termes dont nous avons déjà mentionné l'extension au niveau précédent. Mais l'extension se poursuit pour des sommes algébriques comme à l'occasion de la réduction de la sous-expression « $-3x - 9x - 7x$ », de sorte que nous interprétons l'extension de la technologie et de son formalisme associé implicitement, sous la forme suivante (avec conservation implicite des signes entre les membres de gauche et de droite de l'égalité) :

$$k \times a \pm k \times b \pm k \times c = k \times (a \pm b \pm c)$$

Toutefois, ces expressions de sommes algébriques de trois termes apparaissent de façon marginale pour ce manuel.

Manuel de 3^e^ : nouveaux formalismes $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$*et* $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Rappelons tout d'abord que les nouveaux formalismes ne relèvent pas d'extensions mais d'instanciations littérales associées au formalisme de la double distributivité. Nous y reviendrons dans la partie suivante. L'utilisation de la distributivité pour le genre de tâche de développement, ne voit pas d'extension nouvelle, si ce n'est l'utilisation des nouveaux formalismes des identités remarquables. Les catégories dont relèvent les substituantes sont donc celles de variables, puissances, constantes ou pseudo-monômes. Il en va de même pour le genre de tâche de réduction.

Pour le genre de tâche de factorisation, l'extension de l'utilisation du formalisme de 5^{e} avec k somme, devient prégnant. Il peut être en effet essentiel pour les résolutions d'équations « produit nul » en se ramenant à des expressions sous la forme de produits. Ainsi la partie « Méthodes » du manuel expose-t-elle la technique de factorisation suivante :

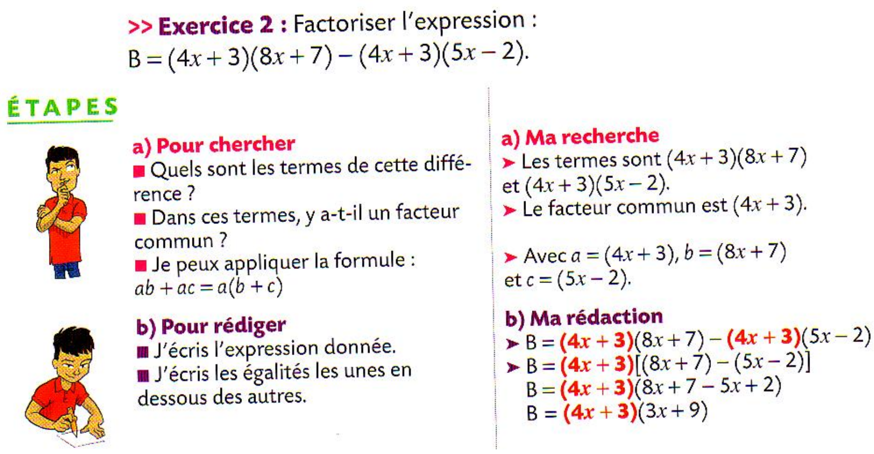


Figure 4.3 - Manuel Triangle 3^{e} 2012 p. 72

Se retrouve ici l'ambigüité quant au formalisme servant véritablement de référence à la substitution qui s'opère. Tout d'abord, pour chercher, le manuel parle d'identifier les termes d'une *différence* tandis que la « formule » donnée plus bas a pour premier membre $ab + ac$ qui est une *somme*. Plus encore, dans « ma rédaction », la seconde ligne montre encore une soustraction : le second facteur est écrit comme différence. Tout se passe comme si l'addition et la soustraction pouvaient référer au même formalisme, sans en réalité convoquer la somme de l'opposé. Une certaine confusion portant sur le signe opératoire s'insinue : il est écrit + mais cela semble pouvoir désigner + ou - . Ainsi, nous interprétons la pratique comme une utilisation étendue du formalisme de la distributivité de la multiplication par rapport à la soustraction, contrairement à ce que laisse entendre le commentaire accompagnateur. A cette confusion près, la substitution est explicitée par des égalités désignant les substituantes et les lettres des « lieux » de substitution : $a = (4x + 3), b = (8x + 7)\ et\ c = (5x - 2)$. Notons au passage qu'il s'agit là d'une extension de l'usage de l'égalité (qui correspond dans une certaine mesure à celle d'instanciations annoncées pour des effectuations comme « pour $x = 1$ »). Dans cette collection, ce sont les premières formalisations accompagnant les substitutions. L'extension à une somme comme facteur commun n'en est pas moins présentée comme transparente. La même extension apparaîtra pour l'utilisation des identités remarquables, toujours dans le genre de tâche de factorisation. Il y a de ce point de vue une rupture. D'un côté pour les développements, non seulement la catégorie Somme n'apparaît pas comme extension, mais encore, aucun formalisme n'accompagne les substitutions comme on les voit apparaître dans les factorisations.

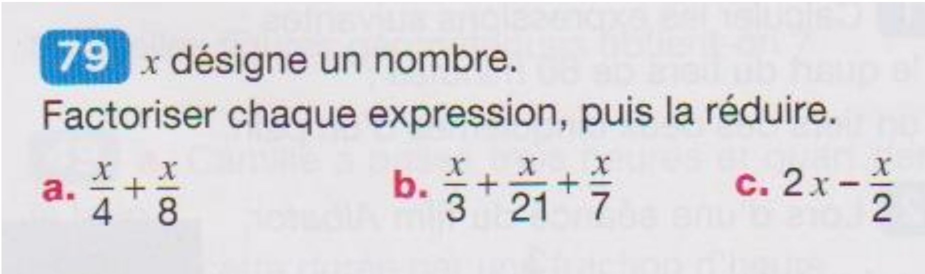
Afin d'éclairer quelque peu la portée des analyses précédentes, nous allons analyser les manuels d'une autre collection : Transmath. Il ne s'agit pas, nous le répétons, de dresser un état des lieux exhaustif, mais nous cherchons à déterminer dans quelle mesure des extensions peuvent exister, de façon muette et précoce à l'instar de ce que notre précédente analyse révèle. Nous avons choisi d'exposer pour cela, les analyses de deux collections qui montrent des spécificités très différentes. C'est ce que nous allons voir maintenant.

Collection Transmath

Manuel de 5^e^ : $k(a + b) = ka + kb\ et\ k(a - b) = ka - kb$
Les parties « Je découvre » puis « J'apprends » du chapitre 2 consacré aux expressions littérales, voient assigner les catégories de constantes ou de variables aux substituantes implicites des lettres *k*, a ou b. Les extensions de l'utilisation de la distributivité apparaissent au moment des exercices dans la partie « Je m'entraîne ».

Pour le genre de tâche de développement, *k*, a ou b peuvent être des pseudo-monômes, de même que pour les factorisations. Ainsi trouve-t-on par exemple un exercice demandant de développer « $2x(x + 5)$ ». L'adaptation relève d'une extension muette comme nous l'avons vu pour le manuel de la collection Triangle, dans la mesure où l'exercice guide les manipulations en proposant de compléter « $2x \times ... + 2x \times ...$ ». On trouve aussi des égalités à compléter pour des factorisations comme « $15x - 20 =\ldots(3x-\ldots)$ » ou « $6x^2 - x =\ldots\times x-\ldots\times x = (...-\ldots) \times x$ ». Dans ces égalités, les sous-expressions comme « $15x$ » sont interprétées comme produit d'une constante par un pseudo-monôme « $5 \times 3x$ », de même que « 20 » est réinterprétée comme un produit de constantes «5×4 » ou encore la variable « x » comme le produit « $1 \times x$ ». Ce faisant, les facteurs de ces produits relèvent de différentes catégories : Variable, Constante, ou Pseudo-monôme. Il s'agit d'une extension silencieuse par rapport aux parties « Je découvre » et « J'apprends », pour le cas des pseudo-monômes.

Une autre extension pourra peut-être apparaître pour le genre de tâche du développement dans un chapitre ultérieur consacré aux opérations sur les nombres en écritures fractionnaires.



79 x désigne un nombre.
Factoriser chaque expression, puis la réduire.
a. $\frac{x}{4}+\frac{x}{8}$ **b.** $\frac{x}{3}+\frac{x}{21}+\frac{x}{7}$ **c.** $2x-\frac{x}{2}$

Figure 4.4 - Transmath 5e 2014 p. 78

En effet, la factorisation n'étant pas univoque, l'on pourrait envisager de factoriser la première expression de la sorte : « $\frac{x}{4}+\frac{x}{8}=\frac{1}{4}\times x+\frac{1}{4}\times\frac{x}{2}=\frac{1}{4}\times\left(x+\frac{x}{2}\right)$ ». Dans ce cas, la distributivité a été appliquée avec une extension pour un quotient. Cependant, étant donné que les exercices suivants mettent en avant des réductions et des développements avec des pseudo-monômes de coefficient fractionnaire, il semble plutôt que ce ne soit pas là l'attendu, et que l'extension ne soit que du côté des pseudo-monômes comme nous l'avons vu précédemment.

Pour ce qui est du genre de tâche de réduction, on ne trouve qu'une seule rencontre avec une somme de trois termes, guidée par une égalité à compléter laissant sous-entendre, comme pour le manuel Triangle de 5e, que l'extension praxémique est une extension de la technologie et de son formalisme $k(a+b)=ka+kb$, et non une extension à la catégorie Somme pour b. Par ailleurs, toujours pour le genre de tâche de réduction, apparaît la catégorie Puissance. Ainsi un exercice demande-t-il de réduire « $6a^2+a^2$ ». Cependant, cette expression est la seule dans ce cas.

Une première conclusion à l'issue des analyses précédentes est que des extensions de l'utilisation de la distributivité sont, pour les deux collections, présentes dès le début de l'apprentissage du calcul algébrique, et muettes. Cependant, les catégories nouvelles sont plus diverses dans le manuel Transmath de 5e, bien que certaines soient peu représentées (puissance et quotient) par rapport à d'autres (pseudo-monômes). La diversité s'exprime aussi dans la nature des coefficients des pseudo-monômes qui peuvent être des nombres entiers, décimaux et rationnels. Tandis que le manuel Triangle de 4e réalise une certaine rupture, l'on peut anticiper que ce ne soit pas vraiment le cas pour le manuel Transmath du même niveau, étant donné que les extensions auront eu lieu auparavant.

Manuel de 4e : nouveau formalisme $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$
L'utilisation de la propriété de distributivité sous son formalisme de 5e ne voit d'autre extension que celles correspondant à l'opposé de pseudo-monômes dans les exercices du manuel de 4e, que ce soit pour les genres de tâche de développement ou de factorisation (ce dernier étant présent même si assez marginal).

En revanche, dans la partie « Activités », l'on retrouve la substitution majeure de k par une somme pour une preuve de la nouvelle identité de « double distributivité » :

a, *b*, *c*, *d* désignent des nombres relatifs.
a. Recopier et compléter : $(a+b)(c+d) = (a+b) \times \ldots + (a+b) \times \ldots$
b. Utiliser à nouveau la distributivité pour achever le développement de $(a+b)(c+d)$.

Figure 4.5 – Manuel Transmath 4e 2011, p.77

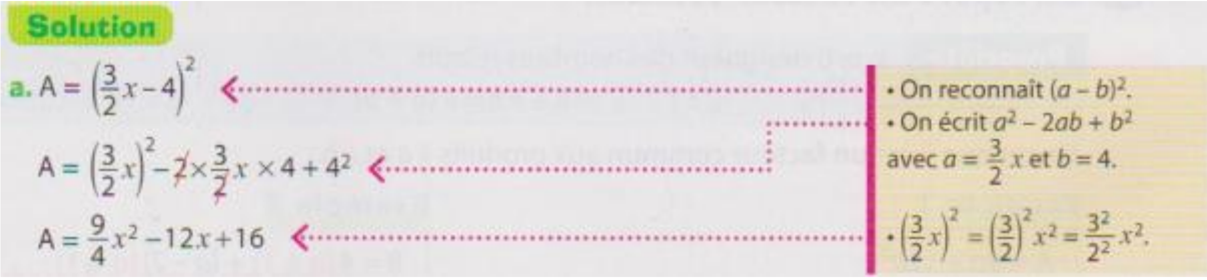
Cette extension apparaît donc dans le genre de tâche de développement. De façon assez inusuelle, une certaine quantification est précisée : a, b, c et d désignent des nombres relatifs. Nous avons déjà évoqué les extensions muettes du côté des systèmes de nombres qui s'exercent là, mais ici émerge aussi silencieusement, une extension à une somme accompagnée par l'égalité à compléter. Cependant, l'utilisation à deux reprises de la distributivité est explicitement évoquée par l'énoncé. Cette extension est néanmoins rencontrée sur cet unique travail, au contraire de ce que l'on pouvait analyser dans le manuel Triangle. Une fois la démonstration produite, le nouveau formalisme $(\mathrm{a}+\mathrm{b})(\mathrm{c}+\mathrm{d}) = \mathrm{ac} + \mathrm{ad} + \mathrm{bc} + \mathrm{bd}$ est employé avec les catégories constante, variable, ou pseudo-monôme (ou opposé de pseudo-monôme). La quantification introduite alors, pose la question de la transparence de l'interprétation d'un pseudo-monôme comme celle d'un nombre relatif. Cette question n'a pas lieu d'être pour des variables, ou des constantes : l'une comme l'autre désignent des nombres, donnés ou indéterminés, dont les graphèmes donnent accès à l'interprétation de façon immédiate ou du moins construite. Mais qu'en est-il de catégories comme somme, produit, puissance ou pseudo-monômes ? S'interprètent-elles comme nombre ?

Par ailleurs, pour le genre de tâche de réduction apparaît aussi le cas d'une somme algébrique de plus de deux termes, l'un des exercices en effet demande de réduire par exemple $8x - 12x + 20x$. Quatre exercices donneront l'occasion de rencontrer des réductions de sommes algébriques de trois ou quatre termes. De la même façon que pour le manuel Triangle, cette extension muette de l'utilisation de la distributivité est implicitement liée à une extension de la technologie et de son formalisme (à plusieurs termes).

Manuel de 3e : nouveaux formalismes $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$*et* $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Comme pour le manuel Triangle de 3e, les extensions pour les genres de tâches de développement et de réduction ne voient pas de modifications quant aux catégories de substituantes. Les formalismes nouveaux des identités remarquables sont employés pour des constantes, variables, puissances, pseudo-monômes ou opposé de pseudo monômes comme pour les formalismes précédents, pour les genres de tâches de développement et de factorisation.

Ce qui est particulier néanmoins dans le manuel Transmath, est l'apparition d'égalités pour « poser » des substitutions dans le cas du développement comme de la factorisation, pour l'utilisation des identités remarquables (alors que cela n'apparaît dans le manuel Triangle que dans le cas des factorisations). Elles apparaissent aussi pour soutenir les factorisations par une somme, qui correspondent à une extension majeure de la distributivité formalisée par $k(a+b) = ka + kb$. Examinons deux exemples des discours accompagnant les manipulations. Le premier relève d'un développement à partir d'une identité remarquable, et le second, d'une factorisation utilisant le formalisme ancien de la propriété de distributivité.



Solution

a. $A = \left(\frac{3}{2}x - 4\right)^2$

$A = \left(\frac{3}{2}x\right)^2 - \cancel{2} \times \frac{3}{\cancel{2}}x \times 4 + 4^2$

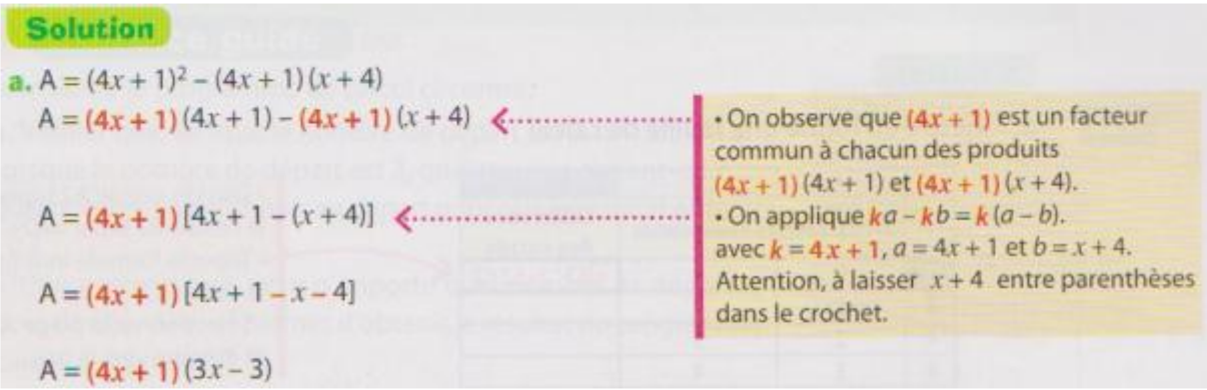
$A = \frac{9}{4}x^2 - 12x + 16$

• On reconnaît $(a - b)^2$.
• On écrit $a^2 - 2ab + b^2$ avec $a = \frac{3}{2}x$ et $b = 4$.

• $\left(\frac{3}{2}x\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 x^2 = \frac{3^2}{2^2}x^2$.

Figure 4.6 – Manuel Transmath 3e 2012, p.78

Le remplacement du lieu de la lettre semble assez clairement exprimé par l'encadré qui parle d'écrire une expression *avec* $a = \frac{3}{2}x$ et $b = 4$, c'est-à-dire qu'ici les égalités semblent bien référer à la substitution, même si, encore une fois l'on observe l'absence du vocabulaire lié au remplacement. On peut remarquer la différence quant aux ostensifs choisis par ce manuel pour désigner les substituantes : contrairement au manuel Triangle qui les parenthésait systématiquement, ici aucune parenthèse n'apparaît. On peut penser que cela s'explique par la présence de parenthèses dans l'expression à factoriser dans le cas de l'exemple traité par le manuel Triangle : $(4x + 3)(8x + 7) - (4x + 3)(5x - 2)$. Elles auraient une fonction facilitante, d'une part pour identifier ostensivement les substituantes, comme les sous-expressions entre parenthèses, et d'autre part, pour écrire l'expression factorisée, le parenthésage étant alors nécessaire, pour le facteur et pour le deuxième terme de la différence. Le manuel Triangle choisit en effet d'écrire tous les parenthésages dans une première ligne, y compris ceux qui ne sont pas utiles. Au contraire, le manuel Transmath n'indique que les parenthèses utiles dans le développement. Il s'agit bien d'un choix, car pour l'exercice résolu suivant, la factorisation concerne une expression du même type que celle que nous avons mentionnée pour le manuel Triangle, c'est-à-dire une différence de deux produits (même si l'un est un carré) ayant un facteur commun binôme.



Solution

a. $A = (4x + 1)^2 - (4x + 1)(x + 4)$

$A = (4x + 1)(4x + 1) - (4x + 1)(x + 4)$

$A = (4x + 1)[4x + 1 - (x + 4)]$

$A = (4x + 1)[4x + 1 - x - 4]$

$A = (4x + 1)(3x - 3)$

• On observe que $(4x + 1)$ est un facteur commun à chacun des produits $(4x + 1)(4x + 1)$ et $(4x + 1)(x + 4)$.
• On applique $ka - kb = k(a - b)$. avec $k = 4x + 1$, $a = 4x + 1$ et $b = x + 4$.
Attention, à laisser $x + 4$ entre parenthèses dans le crochet.

Figure 4.7 – Manuel Transmath 3e 2012, p.78

Notons tout d'abord que le manuel utilise les deux anciens formalismes liés à la distributivité par rapport à l'addition et par rapport à la soustraction, ce qui lève l'ambigüité du signe opératoire et des transformations à opérer plus ou moins implicitement pour les reconnaissances (transformer une différence en somme de l'opposé).

Ensuite, les substituantes sont désignées par des expressions non parenthésées au moment de l'écriture de l'égalité, même si au-dessus, le facteur commun est décrit avec parenthèses -et couleur-, et au dessous, l'attention est portée sur la nécessité de leur présence pour l'écriture du second terme de la différence. Pourtant, ce n'est pas ainsi exprimé, là encore, les recommandations ne s'accompagnent que de désignations ostensives : c'est entre les crochets qu'on doit laisser les parenthèses. Dans le cas du manuel Triangle, il semble que l'attention soit portée sur une certaine étude du parenthésage : d'abord systématique, puis enlevé à bon escient, en interrogeant à la fois la possibilité de la suppression, et les transformations nécessaires le cas échéant. Ce travail est cependant muet. Dans le manuel Transmath, seuls les parenthésages nécessaires apparaissent dans les substitutions, avec des éléments de discours, mais portant l'attention sur des indices de forme (les crochets) plutôt que sur la question de la hiérarchie des opérations et de la substitution qui doit conserver les fonctions syntaxiques dans ce cas. Dans un cas comme dans l'autre, la dialectique entre ostensifs et non-ostensifs n'est pas véritablement organisée pour soutenir la substitution qui se donne à voir et qui véhicule une extension de l'utilisation de la distributivité à des expressions dont les catégories sont de plus en plus diverses.

Avant de conclure nos analyses de manuels, nous proposons de les mettre en perspective avec des pratiques enseignantes, à partir d'extraits des entretiens menés auprès des quatre professeurs de collège que nous avons déjà présentés au chapitre 2. Ces entretiens n'étaient pas destinés *a priori* à pister les usages implicites ou explicites de substitutions dans les classes, de sorte que nous n'avons que peu d'éléments exploitables de ce point de vue. De telles pratiques ont néanmoins été évoquées, et les extraits que nous présentons renseignent autrement, sur la manière dont la substitution peut vivre, et outiller l'enseignement du calcul algébrique.

4.1.3 Substitution et pratiques enseignantes

Les entretiens menés permettent de mettre à jour certaines caractéristiques liées à la pratique implicite de la substitution chez deux enseignants : Benjamin et Jérôme. Tandis que pour Sandra et Nadine, ce sont d'une certaine manière des descriptions rhétoriques de transformations de mouvement qui soutiennent essentiellement les calculs algébriques, pour Benjamin et Jérôme, ce sont les expressions symboliques de la propriété. Ceci est peut-être à mettre en relation avec le fait que ces deux derniers enseignants ont des classes de 3^e, ce qui n'est pas le cas de Sandra et Nadine. Du moins, Benjamin et Jérôme justifient-ils l'intérêt qu'ils voient à la pratique de la substitution par le fait qu'elle prépare aux utilisations des identités remarquables en 3^e :

> BENJ : en 5^e j'aime bien qu'ils utilisent quand-même l'identité complètement parce que en 4e après quand on utilise la double distributivité / c'est pas mal aussi / de transposer les lettres et de voir / parce qu'après pour les identités remarquables / en 3^e / c'est encore plus utile de savoir transformer une écriture en une autre écriture / en ayant l'identité en dessous et en voyant à quoi correspond chaque lettre.

Le formalisme algébrique de la distributivité est un élément théorique prégnant pour Benjamin, il fait réciter les identités, les fait écrire en dessous des expressions données aux élèves, certainement pour faciliter le travail de reconnaissance préalable à la substitution. Ainsi décrit-il la façon dont les écritures soutiennent le calcul à la fois du point de vue théorique et du point de vue des manipulations :

BENJ : par exemple 3a moins pas moins / plus déjà / plus 5a / je leur fais remarquer qu'il y a un facteur commun / donc ça c'est des multiplications puisque on a revu au début qu'on peut supprimer le signe multiplier donc ça / ça / en général ce que je fais c'est que je leur mets en dessous l'identité avec a donc le facteur commun / là c'est k fois petit a plus petit b fois k ils savent que ça ça donne donc a plus b fois k ou k fois a plus b après tu peux l'écrire comme tu veux / donc ça fait entre parenthèses 3 plus 5 / a et b / multiplié par petit a et on peut faire le calcul dans la parenthèse donc ensuite on calcule 8 / fois petit a donc 8 a

On voit la substitution se dérouler au fur et à mesure de la lecture de l'identité, dont l'écriture (et par suite le choix de l'identité) du membre de gauche repose sur une reconnaissance préalable d'un facteur commun, et donc sur celle des substituantes, utiles à la suite de l'écriture. Il décrit véritablement une substitution en parlant de « transposition » :

BENJ : […] en fait c'est vraiment de la transposition / de mettre à une position / ben des opérations et on transpose les nombres ou les expressions / à la place de a / b / k heu

Cependant, cette utilisation du formalisme semble le contraindre à des phénomènes d'auto-censures vis-à-vis des expressions qu'il fait rencontrer aux élèves :

BENJ : […] déjà développer quand y'en a trois à l'intérieur, c'est quelque chose qu'on voit pas souvent, c'est pas clairement écrit dans les programmes en plus[...] c'est encore plus utile de savoir transformer une écriture en une autre écriture / en ayant l'identité en dessous et en voyant à quoi correspond chaque lettre

CHER : d'accord mais alors comment tu fais si tu as 3a plus 5a plus 2a

BENJ : ha ben ouais / ça c'est un cas que je vois rarement / en 5^{e} ça arrive des fois / mais c'est vrai que en général en 5^{e} je reste sur ça quoi

La substitution par une somme pourrait pourtant être de nature à éclairer l'adaptation de la technique de réduction pour une somme de trois termes, et à la construire, à condition d'utiliser à deux reprises la distributivité comme nous l'avons vu plus haut. Benjamin n'envisage pas la substitution comme un outillage théorique, mais comme une pratique par analogie scripturale, ce qui, pour lui, conduit en un sens à bloquer certaines extensions et la souplesse des écritures possibles.

Jérôme parle aussi beaucoup de substitution, même s'il n'emploie pas le mot non plus, à la fois pour des remplacements par des nombres, mais aussi pour soutenir les genres de tâches de développement et de factorisation d'expressions algébriques. Il y voit cependant une des difficultés majeures de l'enseignement du calcul algébrique. Il identifie une rupture du point de vue de l'interprétation :

JERO : pour factoriser ils ont beaucoup de mal / si tu veux / si t'as $x + 1$ facteur de $x + 2$ plus heu $x + 1$ facteur de $x + 3$ / ils ont du mal à voir que ça c'est le même nombre (*il entoure* $x + 1$) et qu'on peut utiliser la distributivité que c'est le k tu vois et que ça c'est le a et ça c'est le b.

CHER : et pourquoi à ton avis ?

JERO : ..//.. mais je pense ça vient vraiment de la représentation / que pour eux / c'est pas un nombre / c'est pas comme avec 2 fois 3 comme ils faisaient au début / plus 2 fois 4

Pour Jérôme, c'est donc l'idée que l'on puisse interpréter une expression telle que « $x + 1$ », comme étant une écriture de nombre, qui n'est pas transparente pour les élèves, et qui pose difficulté pour l'extension de l'utilisation de la distributivité avec de telles expressions.

4.1.4 Conclusion

Une première conclusion à l'issue de ces analyses est celle de l'apparition précoce et muette d'extensions de l'utilisation de la distributivité : une fois formalisée en 5e par les égalités $k(a+b) = ka + kb$ et $k(a-b) = ka - kb$, les manuels analysés montrent par exemple, des réductions de sommes de trois termes en début d'apprentissage. Les occasions de telles rencontres sont par ailleurs inégales d'un manuel à l'autre, tout comme certainement dans les classes ainsi que Benjamin le laisse à penser. Les généralisations concernant les catégories des sous-expressions ne sont pas rencontrées au même moment selon les collections, occasionnant éventuellement des ruptures comme pour le manuel Triangle de 4e qui naturalise l'extension à des pseudo-monômes dès la partie « Activités », alors qu'aucune expression de la sorte n'apparaît dans le manuel de 5e. Le manuel Transmath de 5e au contraire, fait rencontrer l'utilisation de la distributivité avec des pseudo-monômes dès le début d'apprentissage. Aucune mise à l'étude n'accompagne les interprétations d'expressions alors nécessaires, en particulier du point de vue de la structure : un produit de trois facteurs comme « $2x(x+5)$ » est ainsi silencieusement interprété comme produit de *deux* facteurs, par ostension, au moment du développement, alors que cela relève d'un choix, qui n'est pas plus explicité que motivé. Nos résultats concordent en un sens avec ceux issus d'autres recherches comme celles de Pilet (2012) ou de Verdugo-Hernandez (2013). L'étude comparative des manuels chiliens et français dans Verdugo-Hernadez (2013) montre par exemple que, contrairement à ce que donnent à voir les manuels français, ces extensions du côté des polynômes sont très présentes et travaillées dans l'institution chilienne, comme au travers de développements de « $5(xy + x^2y)$ » ou de « $(3uv - 2uz + 5zy)\frac{uvz}{2}$ ». Les analyses de manuels de Pilet (2012) révèlent également, que la diversification des expressions est très dépendante des collections, et des niveaux scolaires, et que pour la majorité, les expressions rencontrées sont standardisées au collège, les pseudo-monômes étant globalement peu présents (notons toutefois que la collection Transmath ne fait pas partie des analyses de ces travaux). Leur traitement ne semble pas interrogé, bien qu'il puisse se révéler problématique, comme lorsqu'il s'agit d'élever $5x$ au carré, dans l'utilisation d'une identité remarquable. Pilet (2012) montre en particulier que le type de tâche consistant à réécrire un monôme sous la forme d'un carré n'est presque jamais convoqué dans les manuels. Les études de Croset (2009) attestent que la notion de monôme est présentée par similitude syntaxique, avec des désignations comme « les termes en x ». Ainsi, les analyses de manuels dans ces recherches convergent-elles dans le sens où elles témoignent du fait que les apprentissages liés au travail sur les monômes, existant *de facto* dans les développements ou les factorisations, semblent ignorés, ou interprétés comme allant de soi.

Une seconde conclusion de notre étude tient aux extensions relatives aux catégories des sous-expressions, qui sont les mêmes dans les deux collections que nous avons analysées (même s'il existe une certaine diversité dans les nombres d'occurrences, comme dans les coefficients des monômes, décimaux ou rationnels n'apparaissant pas dans tous les manuels). Ce sont les catégories puissance, pseudo-monôme (ou opposé de), somme ou différence. Ces extensions correspondent à deux enjeux distincts : elles peuvent soit être au cœur de la construction d'un nouveau formalisme pour la propriété, comme en 4e, soit correspondre à des adaptations de techniques pour les genres de tâche de factorisation ou de développement à des « formes » d'expressions plus diverses. Dès lors les substitutions engagées implicitement sont-elles de même nature ? Quelles interprétations en faire ? La première donne un formalisme d'une propriété et porte donc une généralité que la seconde ne porte pas. Cette dernière fait apparaître des expressions du langage algébrique qui n'ont pas la même interprétation, du point de vue du sens comme de la dénotation.

Une troisième conclusion concerne les genres de tâches dans lesquels apparaissent ces substitutions qui ne sont pas les mêmes selon les catégories des substituantes. Ainsi le remplacement de k par une somme n'apparaît pour le développement qu'en 4^{e}, et de façon extrêmement réduite voire isolée pour établir la double distributivité. En revanche, elle est prégnante en 3^{e} pour le genre de tâche de factorisation. Cependant, elle ne concerne que le formalisme de simple distributivité, et pas celui de la double distributivité ni des identités remarquables. L'extension à une somme de plus de deux termes quant à elle, ne concerne que le genre de tâche de réduction. Et il ne s'agit pas d'une opération de substitution, mais d'une extension praxémique accompagnée d'une extension implicite du formalisme. La catégorie Pseudo-monôme apparaît de façon également prégnante pour les genres de tâche de développement ou de factorisation. Or il y a une certaine rupture d'interprétation par rapport au genre de tâche de réduction. En effet, réduire « $3x + 2x$ » demande de considérer les sous-expressions comme relevant des catégories produits, c'est-à-dire, implicitement, de passer des catégories pseudo-monôme en réalité écrite, à produit, ou autrement dit de « $3x + 2x$ » à « $3 \times x + 2 \times x$ » pour factoriser. Au contraire, développer « $2x(x + 5)$ » demande de ne pas interpréter la sous-expression « $2x$ » comme un produit, mais bien comme un pseudo-monôme. Cette subtilité d'une double interprétation qui varie selon le genre de tâche pose la question de la transparence pour les élèves de ce qui est simplement montré par les manuels.

Une dernière conclusion est relative aux ostensifs employés pour accompagner les substitutions qui s'exercent tout au long du collège. Elles n'apparaissent en effet « posées », par des égalités désignant les substituantes, qu'en 3^{e}. Notons de ce point de vue que d'autres collections (comme Phare) ne les présentent jamais ainsi. D'autre part, lorsque c'est le cas, on observe des différences : certains manuels réservent ces ostensifs à des factorisations, d'autres les font apparaître pour les développements aussi. De ce point de vue, il semble que les pratiques puissent être très variables. Quoi qu'il en soit, la question du parenthésage, qu'il soit nécessaire ou non, n'est pas abordée par les manuels autrement que par des mises en gardes portant sur la forme (les crochets, ou le signe – coloré), et non sur le lien avec les priorités opératoires et les structures des expressions. Quelles différences y a-t-il alors, que l'on « pose », ou non la substitution ? On peut supposer qu'elle soit inutile lorsque les expressions ne sont pas trop « compliquées », et que cela explique leur apparition tardive en 3^{e}. Pourtant les manuels ne donnent pas tous la même place à cette désignation des substituantes. Quelle interprétation donner à la fois aux manipulations, aux expressions produites, et à la substitution elle-même ? Car, malgré les égalités posées, les commentaires parlent « d'appliquer » les formules ou « d'utiliser » les identités remarquables, sans mentionner jamais l'idée d'un remplacement, qui demeure implicite. Cela fait écho à la question de la quantification souvent absente dans les formalismes de la propriété de distributivité. Elle semble permettre ces généralisations dans une certaine mesure. En même temps, elles font coexister des interprétations multiples. Que ce soit explicite (le manuel Transmath par exemple déclare : « k, a et b sont des nombres relatifs ») ou non, la construction du formalisme reposant sur les nombres avec une généralisation, une question demeure en filigrane quant à l'interprétation des expressions symboliques qui est véhiculée : « $2x$ » est-il interprétable de façon transparente comme un nombre ? Cette question peut-être d'autant plus vive lorsque l'on observe comme pour la collection Triangle une rupture entre deux niveaux de classe : en 5^{e} les nombres sont seulement écrits avec leur écriture décimale connue, ou avec une lettre désignant un nombre généralisé. N'y a-t-il pas alors un saut d'interprétation lorsque dès les premières activités du manuel de 4^{e}, un pseudo-monôme est considéré comme une écriture de nombre ?

La substitution apparaît donc comme une pratique muette canalisant de nombreux implicites et des modifications multiples dans les interprétations qui ne font pas objet d'étude. Autrement dit, la substitution accompagnant les extensions de l'utilisation de la distributivité apparaît comme une notion protomathématique. L'analyse des manuels laisse penser qu'il puisse néanmoins exister une grande variabilité dans les pratiques enseignantes, et en même temps, peut-être un certain potentiel inexploré lorsqu'ils « posent » en 3^{e}. Les extraits d'entretiens menés auprès des enseignants s'en font l'écho. Ils témoignent également de difficultés d'enseignement liées à cette pratique : Benjamin ne s'autorise pas à aborder certaines généralisations (à plus de deux termes) pour favoriser les reconnaissances fondées sur une certaine analogie scripturale, et Jérôme rend compte des difficultés à se saisir des modifications d'interprétations des écritures accompagnant les extensions véhiculées par cette pratique. Peut-on dès lors envisager un enseignement autour de la notion de substitution, qui puisse à la fois outiller la pratique du calcul algébrique, éviter les écueils des manuels et lever les difficultés évoquées ?

Afin d'apporter des éléments de réponses à cette question, et à l'issue de ces conclusions, nous complétons tout d'abord dans une seconde partie, notre première réflexion épistémologique sur la notion de substitution, avant d'étudier, dans une troisième partie, les potentialités, mais aussi les limites éventuelles de l'introduction véritable de la notion de substitution dans l'enseignement.

4.2. REFLEXION EPISTEMOLOGIQUE SUR LA NOTION DE SUBSTITUTION

Cette partie vise à approfondir notre étude de la notion de substitution. Nous nous appuyons pour cela sur les travaux de Serfati (2005) qui nous permettent de définir et de caractériser la notion. Si les résultats de ces travaux ont principalement nourri cette réflexion, elle n'en demeure pas moins personnelle, dans le sens où la problématique qui nous occupe est tout à fait particulière et oriente notre lecture de l'analyse de l'émergence historique de la notion telle qu'on la trouve dans Serfati (2005).

Notons tout d'abord que nous employons dans cette partie les guillemets à l'instar de Serfati (2005) pour signaler l'usage d'un vocabulaire propre à la symbolique algébrique. Il introduit, en effet, un lexique spécifique du registre combinatoire pour le distinguer du signifié. Ce lexique est extrêmement riche et porte des nuances certaines par rapport à celui de la linguistique que nous avons utilisé jusqu'à présent. Nous ne pourrions les présenter en quelques pages, sans alourdir considérablement notre propos, et sans explorer les dites-nuances pour mettre en regard les différentes approches que nous avons utilisées jusqu'à présent. Pourtant, ce lexique éclaire d'une certaine façon les extensions observées dans les manuels que nous avons analysées plus haut. Nous introduisons donc un certain nombre de termes pour les décrire, mais en éviterons d'autres, quand nous le pourrons. Nous en simplifierons certainement alors les contenus et les liens avec les éléments théoriques que nous avons utilisés jusqu'ici, par souci de restriction du vocabulaire employé pour nos analyses, et donc de lisibilité de l'ensemble. Nous espérons néanmoins ne pas trahir l'essence des concepts en cela, et renverrons, quand cela nous semblera nécessaire, pour certaines subtilités en particulier, à Serfati (2005).

Serfati (2005) distingue le registre qu'il nomme combinatoire, en hommage à Leibniz et à son *Art Combinatoire*, et le registre de la signification. Les termes syntaxique et sémantique plus usuels de la linguistique sont en effet, pour lui, au regard de son exploration épistémologique, anachroniques.

Il distingue également du point de vue des écritures symboliques, autrement dit dans le registre combinatoire, « formes » et « assemblages ». Les « assemblages » correspondent en un sens à ce que Drouhard (1992) nomme les expressions bien formées. Une expression symbolique algébrique telle que « $3 \times x + 2$ » est en cela un « assemblage ». Une « forme » se définit alors lorsqu'un tel « assemblage » est dûment complété, c'est-à-dire lorsqu'il présente tous les signes de délimitation possibles, y compris les parenthèses extérieures. Ainsi en va-t-il de la « forme » associée à l' « assemblage » précédent que l'on écrira « $((3 \times x) + 2)$ ». Cette distinction dans le registre combinatoire trouve son intérêt essentiel dans la distinction correspondante dans le registre de l'interprétation : un « assemblage » s'interprète en effet, pour Serfati (2005), comme une succession d'instructions opératoires élémentaires (décrivant l'arborescence combinatoire), tandis qu'une « forme » s'interprète comme le résultat constitué de ces instructions, que l'exécution puisse ou non se réaliser :

> La « constitution » du résultat consiste dans les faits à disposer de celui-ci comme s'il était virtuellement exécuté, en un bloc constitué, qui pourra lui-même être l'objet de procédures ultérieures. Serfati (2005) p. 92

Il nous semble qu'un parallèle peut être fait ici avec la notion de programme de calcul dans la première étape du processus d'algébrisation. En effet, l'interprétation se rapproche de la notion première de programme de calcul arithmétique qu'exprime une expression algébrique telle que « $3 \times x + 2$ », ce que rhétoriquement l'on peut décrire de la manière suivante : « multiplier par 3 un nombre donné, et ajouter 2 au résultat », même si Serfati (2005) dirait plutôt « Ajouter le nombre de signe 2 au triple de la valeur indéterminée du nombre de signe x ». Pour le même ostensif qu'est l'expression algébrique « $3 \times x + 2$ », la notion de programme de calcul renvoie à la fois à une procédure, et à un objet, lorsqu'on le considère comme « un tout », de la même manière, souligne Serfati (2005), que l'usage en mathématique confond dans une même symbolique, deux interprétations. L'introduction de deux écritures symboliques distinctes, ou en d'autres termes, la création d'un nouvel ostensif pour une nouvelle interprétation des programmes de calcul dans la première étape d'algébrisation, nous paraît revêtir un certain potentiel didactique. Ainsi « $((3 \times x) + 2)$ » pourrait-il rhétoriquement être décrit comme « le résultat constitué de l'instruction : ajouter 2 au triple de la valeur du nombre indéterminé x ». C'est-à-dire que l'on pourrait donner une certaine matérialité à ce changement d'interprétation qui est né historiquement avec Viète, d'une contradiction (entre le un et le multiple) fondatrice, et soutenir une dialectique entre processus et objet[54] (Sfard 1991). Cette dialectique est en réalité plus aisée dans le langage arithmétique où les nombres donnent accès aux dénotés, ces dénotés pouvant alors soutenir l'interprétation du côté de l'objet, et par là-même une certaine dialectique entre programmes de calcul, comme processus, et comme objet (et c'est ce qui émerge de nos analyses de l'ingénierie à laquelle est consacrée la troisième partie de cette thèse). Cette dialectique repose de façon essentielle sur une double lecture pour les élèves pour une même expression : celle d'une écriture de nombre et celle d'une écriture d'un processus. Lorsque l'on s'engage dans le langage algébrique, cette dialectique reste à bâtir, et les dénotés, au sens où Drouhard (1992) l'entend à la suite de Frege, c'est-à-dire les fonctions réelles afférentes, ne sont pas construites, ni accessibles pour les élèves. Dès lors, il nous semble que la création d'un ostensif associé à cette nouvelle interprétation d'une expression comme un « résultat », qui ne va nullement de soi, pourrait être une piste pour soutenir ce passage, dans la première étape du processus d'algébrisation, d'une interprétation de type processus à une interprétation de type objet.

Serfati (2005) ne considère pas, quant à lui, une telle interprétation des écritures. Nous ne décrirons pas ici les raisons qui l'amènent à se détacher des notions de sens et de dénotation (nous renvoyons ici à ses propres discussions, notamment p.187), pour en construire d'autres (celles de substance et de procédure). Pour sa part, le couple formé par les interprétations côté

---

[54] Rappelons que Sfard (1991) distingue les aspects procédural et structural des notions mathématiques. L'aspect structural renvoie à une conception en tant qu'objet, tandis que l'aspect procédural renvoie à une conception opérationnelle, ce qui, pour les expressions algébriques, correspond à une interprétation en termes de processus opératoires. Grugeon (1997) fait reposer en particulier la compétence algébrique sur la capacité à mobiliser selon le contexte, l'une ou l'autre de ces interprétations des objets.

objet (résultat) et processus, respectivement d'une « forme » telle que « $((3 \times x) + 2)$ » et de son assemblage afférent, correspond, en termes modernes, à un certain polynôme réel.

Cette création ostensive correspondant à un résultat constitué, s'accompagne d'un changement de signification pour les parenthèses dont on en étend ainsi l'usage. Tout d'abord, signes de délimitation (ou délimitants), les parenthèses du point de vue combinatoire ont pour fonction de jalonner le texte symbolique. Ensuite, en tant que signe d'agrégation, du point de vue de la signification, elles ont pour fonction de constituer des blocs qui doivent être calculés ensemble. L'emploi des parenthèses permit en effet, historiquement, une codification du résultat lui-même :

> Ainsi donc, ces signes auxiliaires dont la fonction première, sur le plan purement formel, avait été de prescrire, par le moyen de la délimitation, un ordre de succession qui avait fait défaut dans l'écriture symbolique spontanée, se trouvèrent aussi investis en retour, cette fois dans le registre signifiant, d'une fonction d'agrégation (des termes) et d'objectivation (des résultats). Serfati (2005) p. 93

La notion de « forme » nous permet de définir, à la suite de Serfati (2005), la notion de substitution dans la première acception qu'il lui donne[55] :

> Sur le plan combinatoire, toute substitution se caractérise, comme on verra, par un « lieu » donné dans la « ligne », initialement occupé par une « lettre-chiffre », et par une « forme » quelconque donnée, dite *substituante*. La « lettre-chiffre » appartient nécessairement à une « forme » originaire de niveau un, qui deviendra la *substituée*.

Le « lieu » d'un signe dans la « ligne » d'un texte étant défini comme les positions que ce signe vient effectivement occuper dans une écriture symbolique donnée. Ainsi, à partir du « lieu » du signe x dans la forme « $((3 \times x) + 2)$ », et de la substituante « $(x + 1)$ », on obtient la « forme » « $((3 \times (x + 1)) + 2)$ », dont la substituée est donc la « forme » originaire de niveau un « $(3 \times x)$ », dans le sens où une seule instruction compose la procédure de l' « assemblage » correspondant à la « forme ». Etant donné nos analyses de manuels, nous nous limiterons dans un premier temps pour notre étude au « lieu » d'une « lettre » ou d'un « chiffre »[56]. Notons donc tout de suite que l'utilisation que nous avons faite du lexique et des notations au début de cette partie, est tout à fait inappropriée. Nous avons utilisé ainsi les confusions usuelles, dans la forme, que nous opérons dans le langage accompagnant la pratique mathématique, entre « lieu » et « signe », et entre « forme » et « assemblage ». Nous avons en effet parlé plus haut de remplacer k par une somme, alors qu'il eut été plus idoine de parler de remplacer le « lieu » de la « lettre » de signe k par la « forme » « $(a + b)$ ». Nous avons ainsi parlé improprement de substituante pour des écritures qui relevaient d' « assemblages » plutôt que de « formes ». Nous avons choisi cependant de ne pas introduire ce vocabulaire à un moment où il aurait alourdi inutilement les analyses. Toutefois, dans la perspective de clarification qui nous occupe maintenant, ces distinctions nous apparaissent utiles. Elles permettent en effet de préciser ceci : une substitution est une

[55] Cette définition en première approche suffira à notre étude. Il est à noter cependant que d'autres catégories de substitution apparaissant comme vecteur d'invention dans les écritures symboliques conduiront Serfati à raffiner cette définition, afin d'y inclure par exemple des substitutions permettant par exemple à partir de « $x^n + 3 = 0$ » de créer « $(1 + bx)x^n + 3 = 0$ », et par suite, une classe d'équations plus large, dont la première est alors une instantiation (dans le cas où b a pour valeur 0) de la seconde.

[56] Un « chiffre » est une écriture symbolique construite à partir de chiffres, et qui représente un nombre.

opération purement combinatoire, qui opère sur des « formes », et qui, à partir de deux « formes » permet d'en obtenir une troisième. Toute substitution nécessite et engage des interprétations des écritures du côté de constitutions de résultats, ou en d'autres termes, d'objets et non pas de processus. Toute substitution se décrit entièrement par sa substituante et son « lieu » de substitution.

> D'un autre côté, le nombre de signes dans la substituante est, en règle générale, plus important que celui du support, qui n'en contiendra jamais qu'un. Dans ces conditions donc, après substitution, la substituante déborde le plus souvent le « lieu » du support. [Ibid. p. 292]

Ensuite, la substitution revêt un fort pouvoir créateur qui n'engage pas *a priori* de question d'interprétation :

> Les géomètres de la fin du XVIIe siècle envisagèrent ainsi la substitution, à la place de la « lettre » cartésienne, de « formes » arbitrairement composées avec le système symbolique dont ils disposaient. Tous les essais furent ici permis, avant même d'envisager les significations. Et Leibniz fut, après Newton, l'un des premiers à employer le procédé de façon, comme il dit, « combinatoire », c'est-à-dire systématique. Serfati 2005 p. 254

Le lien entre les registres combinatoire et de l'interprétation est historiquement, renversé, et une certaine dialectique se voit ainsi créée par la possibilité offerte par la substitution :

> Avant Leibniz en effet, dans les premiers temps de la constitution des deux registres, les seuls mouvements de pensée reconnus comme légitimes se faisaient dans le sens de la représentation, du registre des significations vers le symbolique. Ni Descartes, ni bien entendu Cardan, ne considérèrent qu'ils pussent recevoir des suggestions provenant du texte symbolique ! Serfati 2005 p. 7

L'interprétation est alors seconde, et se constitue à partir de l'interprétation de la « forme » originaire, c'est-à-dire de la « forme » à partir de laquelle s'opère la substitution, que l'on compose en quelque sorte avec celle de la substituante. Elle nécessite aussi ce que Serfati (2005) nomme des « clés » d'interprétation, qui pour faire court, réfèrent à des quantifications et aux statuts de certaines lettres (donné indéterminé, ou inconnue).

Maintenant ces notions définies, nous allons proposer une certaine réinterprétation des analyses précédentes, tout en explorant les potentialités et les questions qui s'y rapportent, de l'introduction de la notion de substitution dans l'enseignement.

4.3. POTENTIALITES ET LIMITES DE L'INTRODUCTION DE LA SUBSTITUTION

Dans cette partie, nous reprenons la notation de Serfati (2005) pour représenter une substitution comme $x \curvearrowright (x+1)$, pour celle que nous avons décrite plus haut. Par ailleurs, afin de simplifier la notation des « formes » pour les substituantes, nous n'utilisons que les parenthèses extérieures, pour des « assemblages » correspondants, de niveau supérieur ou égal à 1. Dans le cas d' « assemblages » associés de niveau 0 (autrement dit dans le cas où la substituante est par exemple une « lettre ») nous les omettons, tout en précisant ici qu'il s'agit bien de « formes » sur lesquelles nous travaillons, dans le registre combinatoire, avant de poser la question de l'interprétation. De la même façon, afin de ne pas rendre la lecture trop ardue, nous n'écrivons pas les « formes originaires » comme il convient, c'est-à-dire que nous ne parenthésons pas comme il le faudrait pour parler de « formes », celles dans lesquelles s'opèreront les substitutions. Nous conservons les guillemets cependant à l'instar des notations utilisées *supra* pour les transformations de mouvement, afin de placer le travail dans la dimension sémio-linguistique. Etant entendu, nous le répétons, que les écritures sont alors considérées dans le registre symbolique. Nous discuterons dans un second temps du choix du symbolisme que l'on peut alors associer à la substitution dans une perspective didactique, des inconvénients ou des avantages de telle ou telle simplification.

4.3.1 Substitution et formalismes de la distributivité

Nous avons revu plus haut, que la distributivité revêtait des formalismes multiples tout au long du curriculum du collège, ainsi que l'organise le programme. Ce morcellement technologique selon les niveaux de classe, s'accompagne d'une certaine dissymétrie dans l'usage de ces formalismes, selon les genres de tâches du calcul algébrique. Ainsi le formalisme de la double distributivité ne servira jamais qu'au développement. Nous avons vu, en outre, que les différents formalismes ne faisaient pas l'objet d'un travail d'unification. Comment dès lors la substitution pourrait-elle outiller un tel travail et permettre de rendre en partie sa fonction technologique à la distributivité ? c'est-à-dire comment pourrait-elle accompagner la complexification des praxéologies fondées sur chacun des formalismes $T_{\text{dév simple}}$ $T_{\text{dév double}}$ et $T_{\text{dév Identité Remarquable}}$ par exemple ? Ces genres de tâches apparaissent en effet séparés dans les manuels parce qu'associés à des formalismes différents d'une même propriété mathématique. Les cours les montrent dans des paragraphes différents (les manuels Triangle, Transmath de 4^{e}), et les exercices peuvent aussi référer à cette séparation : le manuel Triangle de 4^{e} par exemple consacre une rubrique à « développer » et la suivante à « développer avec la double distributivité ».

Substitution et créations de canons

Rappelons que les formalismes liés à la distributivité qui apparaissent dans les programmes du collège sont au nombre de six et sont les suivants :

- Distributivité simple de la multiplication par rapport à l'addition : $k(a+b) = ka + kb$

- Distributivité simple de la multiplication par rapport à la soustraction : $k(a-b) = ka - kb$
- Double distributivité : $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$
- Identités remarquables : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$et $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Par ailleurs nous avons noté que certains manuels utilisaient implicitement un autre formalisme : $k \times a + k \times b + k \times c = k \times (a+b+c)$

Ces formalismes s'interprètent comme des écritures symboliques de *canons*[57], c'est-à-dire de propriétés universellement valides, étant donné une quantification s'y rapportant. Du point de vue épistémographique, l'on dirait que le dénoté de chaque telles propositions est le même : Vrai, tandis qu'elles n'ont pas le même sens.

Chacun de ces canons peut être construit, dans le registre combinatoire, par substitution[58]. Deux genres de substitutions peuvent alors y être associés. Le premier consiste à substituer au « lieu » d'un « chiffre », une « lettre ».

Ainsi, à partir d'une égalité telle que « $5 \times (10+3) = 5 \times 10 + 5 \times 3$ », ou « $5 \times (10-3) = 5 \times 10 - 5 \times 3$ » peut-on, avec les substitutions partout dans l'écriture $5 \curvearrowright k$, $10 \curvearrowright a$ et $3 \curvearrowright b$[59] obtenir le premier canon « $k \times (a+b) = k \times a + k \times b$ » ou du second « $k(a-b) = ka - kb$ ». Serfati (2005) parle alors de *littéralisation* pour désigner ce genre de substitution. Ce geste dans le registre combinatoire n'a pas d'interprétation en soi. La question de l'interprétation se pose alors après-coup. Tout d'abord, on obtient une extension de la proposition dans L_{Arithm}, soit à partir d'une proposition numériquement spécifiée, ou d'un lot de telles propositions, une proposition à portée *a priori* universelle. Ceci amène deux commentaires. Tout d'abord, la quantification implicite, que l'on est amené à poser (ou à questionner du reste) pour l'interprétation de ces nouvelles propositions, est héritée des spécifications numériques de l'originaire. Par exemple, pour la proposition précédente, les « lettres » pourraient alors être interprétées en première instance, comme nombre indéterminé de l'ensemble des entiers naturels. Ensuite, l'originaire change après coup d'interprétation : il

---

57 Nous reprenons là le terme très usité au XVII^e siècle, et sur lequel Serfati (2005) s'appuie pour les interprétations de propositions. On trouve chez Newton les premières canonisations qui consistèrent à substituer une « lettre » au « lieu » du « chiffre », ce qui permit, à partir de formes comme « $a^2.a^3 = a^{2+3}$ », présentes chez Descartes, de construire le *canon* « $a^p.a^q = a^{p+q}$ ». Leibniz définit ainsi un canon : « j'appelle Canons, des formules générales, qui donnent d'abord ce qu'on demande », d'abord étant à entendre comme immédiatement, c'est-à-dire dont l'interprétation est plus immédiate que l'écriture rhétorique qui en découlerait. (Serfati 2005).

58 Ou plus exactement par métamorphose (Serfati 2005), c'est-à-dire par une exécution de plusieurs substitutions dans un même contexte. Nous confondrons ici métamorphose et substitutions, pour simplifier notre propos. Notons de plus, que nous examinons ici les potentialités de la substitution, et non sa réalisation systématique, c'est-à-dire que la création de canon *peut* se faire ainsi, comme historiquement ce fut le cas, mais aussi autrement, et nous discuterons de ce point dans le paragraphe consacré aux substitutions et transformations de mouvement.

59 Nos écritures sont ici très simplifiées, par soucis de lisibilité, et nous reviendrons sur la question du formalisme des substitutions : pour être plus rigoureux, la substitution portant sur les formes du point de vue combinatoire, nous aurions dû écrire : à partir de la « forme » « $(5 \times (10+3)) = ((5 \times 10) + (5 \times 3))$ », les substituantes, pouvant aussi être parenthésées, conduisent à obtenir la « forme » « $\big(k(a+b)\big) = ((ka) + (kb))$ ».

peut être considéré comme une instanciation de cette nouvelle proposition. Ce qui va de pair avec la question de la quantification. Si la première proposition devient une spécification numérique de cette nouvelle proposition, quelles autres spécifications peuvent-elles s'opérer ? Du point de vue combinatoire, la réponse est en réalité simple : toutes. Mais ensuite, il s'agira d'en observer l'interprétation possible. Lorsque la proposition sert à la construction d'une théorie algébrique, faite d'autant de formalismes de technologies du calcul algébrique, l'interprétation est une condition aux substitutions inverses, c'est-à-dire à celles qui conduisent à partir de propositions comme « $k \times (a + b) = k \times a + k \times b$ » avec les substitutions $k \curvearrowright 7$, $a \curvearrowright 100$ et $b \curvearrowright 2$ de construire « $7 \times (100 + 2) = 7 \times 100 + 7 \times 2$ ». Serfati (2005) parle alors de *chiffrage* pour désigner de telles substitutions où un « chiffre » vient partout remplacer une « lettre ». Ainsi s'organise une dialectique entre *littéralisation* et *chiffrage,* du point de vue combinatoire qui va de pair avec une dialectique entre extension et instanciation numérique du point de vue de l'interprétation.

Mais la *littéralisation* aboutit à un autre phénomène dans le registre de l'interprétation, qui n'est pas *a priori* prévu dans son emploi premier (généralisant) : à partir de spécifications numériques considérées comme contingentes dans un certain contexte, la *littéralisation* crée en réalité un objet mathématique nouveau : une fonction polynôme réelle à trois indéterminées. Nous y reviendrons. Notons cependant qu'étant donné que nous n'explorons pas ici les extensions du côté des ensembles de nombres, nous mettrons de côté la question des valeurs des « lettres » dans les interprétations en nous plaçant d'emblée dans l'ensemble des nombres réels.

La création des autres canons peut alors, à partir de « $k(a + b) = ka + kb$ », s'effectuer dans le registre combinatoire par un autre genre de substitution : celui d'une « forme » au « lieu » d'une « lettre ». Nous avons décrit plus haut les substitutions en question qui existent dans les manuels de façon muette. Nous allons les reprendre pour en étudier le fonctionnement dans le registre combinatoire et de l'interprétation.

Examinons, tout d'abord, la substitution $b \curvearrowright (b + c)$ qui pourrait permettre de construire l'extension de la propriété de la distributivité en en élaborant un nouveau canon, qui est en réalité implicitement utilisé : $k \times a + k \times b + k \times c = k \times (a + b + c)$. L'on pourrait aussi poursuivre les extensions pour des sommes de plus de trois termes. Du point de vue combinatoire, la substitution $b \curvearrowright (b + c)$ dans « $k(a + b) = ka + kb$ » conduit à la « forme » « $k(a + (b + c)) = ka + k(b + c)$ ». A partir de cette « forme », on peut opérer, soit par transformation de mouvement sur une sous-expression, soit par une nouvelle substitution. Cette distinction s'exprime ici par le fait qu'une transformation de mouvement s'opère en articulation avec la dimension mathématique, alors qu'une substitution est isolée dans la dimension sémio-linguistique et s'exerce nécessairement à partir d'une écriture symbolique, nous y reviendrons. Ici simplement, une transformation de mouvement permet directement d'écrire la proposition voulue à partir de la précédente *via* $k(b + c) \xrightarrow[\text{distributivité}]{} kb + kc$, tandis qu'opérer uniquement par substitution, demande tout d'abord dans l'originaire « $k(a + b) = ka + kb$ », d'opérer $a \curvearrowright b$ et $b \curvearrowright c$ pour obtenir « $k(b + c) = kb + kc$ », avant de pouvoir opérer enfin la substitution $(k(b + c)) \curvearrowright (kb + kc)$ dans la

« forme » intermédiaire « $k(a+(b+c))=ka+k(b+c)$ ». Cette dernière substitution est très particulière. D'une part, c'est une substitution d'une « forme » $(kb+kc)$ au « lieu » d'une autre « forme » $(k(b+c))$. D'autre part, elle se fait là au moyen d'une interprétation nouvelle de l'égalité et d'une propriété de la dénotation : la dénotation d'une proposition est conservée par substitution d'une sous-expression par une autre, qui lui est égale. Notons ici une autre différence entre substitution est transformation de mouvement : la transformation de mouvement crée une égalité consécutive, « $k(a+(b+c))=ka+k(b+c)=ka+kb+kc$ », tandis que la substitution reste dans un travail d'une seule égalité, transformée. Ainsi, comme « $k(b+c)=kb+kc$ » s'interprète comme une proposition vraie, alors $(k(b+c))$ $\curvearrowright$ $(kb+kc)$ dans « $k(a+(b+c))=ka+k(b+c)$ » ne modifie pas sa dénotation. D'une certaine manière « $k(b+c)=kb+kc$ » est dotée d'une nouvelle interprétation, c'est-à-dire que chaque membre devient potentiellement substituée ou substituante d'une substitution qui a pour propriété de ne pas modifier la dénotation d'une proposition correspondant à la forme originaire où elle s'opère. Ceci nous amène à une première conclusion : la substitution n'est pas toujours économique. Lorsqu'elle ne l'est pas, elle peut être avantageusement remplacée par une transformation de mouvement. En revanche, dans le cas que nous venons d'examiner, cette transformation de mouvement est bien précédée par une substitution première $b \curvearrowright (b+c)$ essentielle. La question qui se pose alors est celle de l'interprétation de cette première substitution, ou plus exactement de la « forme » obtenue après substitution.

Nous avons vu plus haut que l'interprétation se faisait à partir de celle de la « forme » source. Pour Serfati (2005) cette interprétation se trouve double. Tout d'abord, il s'agit d'une égalité entre deux procédures portant sur des nombres indéterminés, mais fixés arbitrairement. Nous l'avons rapproché de celle des programmes de calcul (ou du sens selon Frege ou Drouhard 1992) dont on dirait là que l'égalité initiale rend compte d'une équivalence de programmes de calculs. Ainsi, faisant usage des termes de la théorie anthropologique du didactique, pourrions nous dire que la « forme » obtenue par substitution s'interprète comme une nouvelle équivalence de programmes de calculs. Ces nouveaux programmes de calculs s'interprètent à partir des anciens, dont la description rhétorique est modifiée par l'enchâssement de l'interprétation de la substituante. C'est-à-dire que dans une description procédurale apparaît une nouvelle procédure, correspondant à la substituante, dont on doit constituer le résultat, pour ensuite l'insérer dans les étapes du programme de calcul initial, autrement dit pour l'utiliser dans la chaîne des instructions.

Dans une seconde perspective d'interprétation, les lettres étant toutes interprétées comme nombre indéterminé, la nature du résultat de la substituante de $b \curvearrowright (b+c)$ est la même que celle de la substituée, soit des nombres d'un même ensemble. Ceci permet alors d'interpréter « $k(a+(b+c))=ka+k(b+c)$ » comme un nouveau canon[60]. L'ancienne « forme » en retour s'interprète comme un cas particulier de celle-ci, où la valeur du nombre de signe c est 0. Ce faisant, la même remarque que pour le cas de la littéralisation apparaît ici : on a une

[60] Le dénoté de la proposition est toujours Vrai.

création de fait, d'un nouvel objet mathématique, extension de l'ancien : une certaine fonction polynôme réelle à quatre indéterminées[61].

Examinons maintenant les substitutions potentiellement à l'œuvre dans la création des autres formalismes liés à la distributivité.

Nous nous intéressons tout d'abord à celle conduisant à la double distributivité. Considérant que la « forme » originaire est « $k(a+b)=ka+kb$ », alors la substitution $k \curvearrowright (a+b)$, doit en réalité être précédée de $a \curvearrowright c$ et de $b \curvearrowright d$, pour constituer « $k(c+d)=kc+kd$ »[62]. C'est en effet sur cette forme que l'on peut alors opérer $k \curvearrowright (a+b)$, pour obtenir la forme « $(a+b)(c+d)=(a+b)c+(a+b)d$ ». Nous nous retrouvons ici devant le même choix que pour le canon précédent. Soit l'on travaille uniquement dans le registre combinatoire par substitution de formes $\big((a+b)c\big) \curvearrowright (ac+bc)$, et $\big((a+b)d\big) \curvearrowright (ad+bd)$, mais de la même manière que précédemment, cela demande un travail considérable sur la forme originaire, qu'il faudra coupler à celle d'une transformation de mouvement fondée sur la commutativité. Ou bien, l'on utilise alors les transformations de mouvement $(a+b)c \xrightarrow[distributivité]{} ac+bc$ et $(a+b)d \xrightarrow[distributivité]{} ad+bd$. Ceci correspond à ce que nous avons observé dans les manuels pour construire le second canon de la double distributivité « $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$ ». En réalité, le jeu du calcul suit une substitution première. L'interprétation par ailleurs est tout à fait similaire à ce que nous avons pu dire pour le canon précédent.

Enfin, avec les substitutions, dans cette dernière « forme », $c \curvearrowright a$ et $d \curvearrowright b$, vient la « forme » « $(a+b)(a+b)=aa+ab+ba+bb$ ». Notons que, d'une part, la transformation de mouvement fondée sur la double distributivité conduit à la même égalité, et que d'autre part, pour aboutir au canon, le recours à d'autres transformations de mouvement fondées sur la commutativité ou encore sur la distributivité pour la réduction, sera à la fois nécessaire et économique. La substitution n'a pas ici de raison de supplanter *a priori* la transformation de mouvement. Du point de vue de l'interprétation, néanmoins, le canon obtenu est une instanciation du précédent, tout comme le seront les canons suivants, dont nous n'examinerons donc plus que certaines obtentions potentielles par substitution, dans le registre combinatoire.

Les deux dernières identités peuvent s'obtenir de différentes manières. L'une d'elles consisterait par exemple à effectuer les substitutions $c \curvearrowright a$ et $d \curvearrowright (-b)$ dans la forme « $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$ ». On obtient « $(a+b)(a+(-b))=aa+a(-b)+ba+b(-b)$ ». Le recours à des transformations de mouvement sera alors nécessaire pour aboutir. Cependant, une autre « forme » source pourrait être envisagée : celle de « $k(a-b)=ka-kb$ » qui, par $k \curvearrowright (a+b)$, donne « $(a+b)(a-b)=(a+b)a-$

[61] Les dénotés des expressions de chaque membre de la proposition.
[62] On pourrait au lieu de la substitution envisager la transformation de mouvement fondée sur la commutativité : « $k(a+b)=ka+kb$ » devient alors « $(a+b)k=ka+kb$ ». Mais, d'une part la substitution $k \curvearrowright (c+d)$ afférente n'est pas celle que l'on trouve dans les manuels, et d'autre part, cela n'est pas plus économique. Nous avons donc fait le choix de nous en tenir à des substitutions proches des pratiques existantes.

$(a+b)b$ ». Ici encore cependant, de nouvelles transformations de mouvement seront utiles et plus économiques que de nouvelles substitutions, pour aboutir.

De la même manière pourrait-on envisager de recourir à la substitution $k \curvearrowright (a-b)$ dans « $k(a-b)=ka-kb$ », pour obtenir la dernière identité remarquable $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$, ou bien $b \curvearrowright (-b)$ dans « $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ ». Dans un cas comme dans l'autre, les substitutions seront avantageusement accompagnées de transformations de mouvement, et en particulier celle reposant sur la propriété selon laquelle soustraire un terme revient à ajouter son opposé. Examinons par exemple la première substitution $k \curvearrowright (a-b)$ dans « $k(a-b)=ka-kb$ », il vient « $(a-b)(a-b)=(a-b)a-(a-b)b$ ». Or, le fait que l'on ait une différence ici, rend notre notation lacunaire, c'est-à-dire non entièrement parenthésée, de la « forme » source problématique. En effet, les parenthèses autour du second terme de la différence constituant le membre de droite de l'égalité sont alors utiles pour ne pas faire d'erreur de signe lors d'une étape ultérieure de calcul. Ainsi la notation complétée de « $\big(k(a-b)\big)=\big((ka)-(kb)\big)$ » permet d'obtenir « $\big((a-b)(a-b)\big)=\Big(\big((a-b)a\big)-\big((a-b)b\big)\Big)$ », l'inconvénient majeur étant que la lecture en est rendue malaisée, bien que sans implicite lié à la hiérarchie des opérations. Ensuite, les transformations de mouvement fondées sur la distributivité permettent, par calcul, d'écrire les égalités $(a-b)^2=(a-b)(a-b)=(a-b)a-(a-b)b=a^2-ba-(ab-b^2)=a^2-ab-ab+b^2=a^2-2ab+b^2$. Notons d'une part que la description des transformations de mouvement ici à l'œuvre nous écarterait de notre propos, et d'autre part, mériterait de s'attarder sur les questions des technologies liées aux signes, qui là encore ne sont pas l'objet de notre recherche[63]. Nous avons donc écrit arbitrairement et rapidement les égalités, simplement pour montrer que l'une seulement correspond à une substitution, et les autres à des transformations de mouvement. Cependant, nous pourrions considérer cette égalité comme issue d'une extension de transformation de mouvement plutôt que d'une substitution. Nous allons revenir sur ce point.

Quoi qu'il en soit, plusieurs éléments émergent de ces premières analyses quant au rôle potentiel de la substitution dans la création de canons. Tout d'abord, elle donne à voir un ensemble de gestes dans le registre combinatoire qui, au contraire des transformations de mouvement, ne donnent lieu à aucune interprétation *a priori*. Elle demande néanmoins un usage idoine, voire complet, de délimitants pour pouvoir travailler aveuglément sur les « formes ». Les interprétations que l'on peut faire après coup des « formes » obtenues peuvent alors conduire à une interprétation du côté d'extensions de transformations de mouvement à des catégories différentes (somme, différence, opposé) pour les fonctions syntaxiques sur lesquelles elles opèrent. Ceci ne nous paraît pas négligeable, dans le sens où la substitution peut éclairer, dans une dialectique entre syntaxique et sémantique, à plusieurs égards (résultat ou PC objet ou structural / PC processus / transformations de mouvement), les extensions de l'usage de la distributivité et de ses formalismes. Toutefois, la substitution n'apparaît pas économique dans bien des cas. Si l'on voulait utiliser les « formes » des canons avec la seule

[63] Nous renvoyons néanmoins ici à Dauriac (2014) en particulier, qui explore les transformations de mouvement à l'œuvre.

substitution comme théorie des écritures, à l'instar de ce que nous avons fait pour $k \times a + k \times b + k \times c = k \times (a + b + c)$, la pratique deviendrait extrêmement lourde et rigide. Si nous envisageons la substitution comme susceptible de soutenir les constructions des différents formalismes, et extensions correspondantes, l'utilisation de transformations de mouvement s'avère toutefois complémentaire, et fort avantageuse selon les cas. Pour cela nous avons supposé que la transformation de mouvement ne soit pas construite seulement à partir du symbolisme, c'est-à-dire que l'on puisse en faire un usage souple (indépendant des spécifications littérales par exemple, que la « lettre » soit a ou c), à partir des fonctions syntaxiques des sous-expressions. Enfin, nous n'avons considéré que des créations à partir d'égalités écrites dans le sens du développement. Dans le cas de la substitution, contrairement aux transformations de mouvement, le sens de l'écriture ne modifie pas la pratique combinatoire, parce qu'on opère dans une « forme », et non pas *sur* une « forme ». En outre, la substitution pourrait conduire encore à augmenter le répertoire des canons, ou, autrement dit, la théorie algébrique disponible sous cette forme. L'on pourrait envisager par exemple, de construire le carré d'un trinôme $(a + b + c)^2$ ou le cube d'un binôme $(a + b)^3$. Dans ce dernier cas en particulier apparaît une catégorie de produit (ou de puissance) pour une substituante qui n'apparaît pas dans les exemples que nous avons traités.

Nous venons d'explorer le rôle potentiel de la substitution dans la construction des formalismes liés à la distributivité, nous allons maintenant nous intéresser à son fonctionnement possible pour utiliser ces formalismes, et outiller des adaptations dans le calcul algébrique.

4.3.2 Substitution et adaptations dans le calcul algébrique

Utilisation des canons

Ainsi que les manuels le donnent à voir, en particulier en 3^{e}, la substitution peut soutenir l'utilisation des canons. Nous avons montré comment elle pouvait outiller un choix d'interprétation pour une expression comme « $3x(x + 5)$ » conduisant à un développement plus économe en étapes de calcul : celui d'une lecture comme un produit de deux facteurs, le premier étant un pseudo-monôme. Les substitutions $k \curvearrowleft (3x)$, $a \curvearrowleft x$ et $b \curvearrowleft 5$ dans la « forme » « $k(a + b) = ka + kb$ » conduisent à la forme « $(3x)(x + 5) = (3x)x + (3x)5$ » qui après calcul, c'est-à-dire transformation de mouvement essentiellement fondée sur la commutativité et l'associativité de la multiplication, donne, « $3x(x + 5) = 3x^2 + 15x$ ». Il nous semble qu'en début d'apprentissage cette pratique explicite puisse outiller les adaptations afférentes. Elle permet, par le jeu d'agrégation, de rendre en partie visible la structure et la pratique combinatoire. Elle peut fournir, à l'instar des pratiques de Leibniz, un grand nombre de « formes » à partir de la même « forme » originaire d'un canon, et ce, même en début d'apprentissage. Notons à ce moment là que le parenthésage, en particulier extérieur est alors précieux, avant d'étudier des calculs supplémentaires comme plus haut. On peut ainsi rapidement, mais sûrement, augmenter la complexité ostensive des « formes » produites selon le niveau de l'assemblage afférent à la substituante. En nous en tenant à la « forme » originaire dont nous restituons les signes de la multiplication pour assurer de respecter les conventions d'écritures dans L_{Alg} « $k \times (a + b) = k \times a + k \times b$ » l'on pourrait donc obtenir :

- « assemblages » de niveau 1 :
  $k \curvearrowright (3+x)$, $a \curvearrowright 5$ et $b \curvearrowright (2x)$ donne « $(3+x)\times(5+(2x)) = (3+x)\times 5 + (3+x)\times(2x)$ »

  $k \curvearrowright (2x)$, $a \curvearrowright 5$ et $b \curvearrowright (3+x)$ donne « $(2x)\times(5+(3+x)) = (2x)\times 5 + (2x)\times(3+x)$ »

- « assemblages » de niveau 2 :

  $k \curvearrowright (3+2x)$, $a \curvearrowright 5$ et $b \curvearrowright (7x)$ donne « $(3+2x)\times(5+(7x)) = (3+2x)\times 5 + (3+2x)\times(7x)$ »

  $k \curvearrowright \big((3+x)(x+1)\big)$, $a \curvearrowright 5$ et $b \curvearrowright x$ donne « $\big((3+x)(x+1)\big)\times(5+x) = \big((3+x)(x+1)\big)\times 5 + \big((3+x)(x+1)\big)\times x$ »

  $k \curvearrowright \big((x+1)^2\big)$, $a \curvearrowright 5$ et $b \curvearrowright x$ donne « $\big((x+1)^2\big)\times(5+x) = \big((x+1)^2\big)\times 5 + \big((x+1)^2\big)\times x$ »

La substitution permet ainsi de créer des propositions dont les membres peuvent rapidement revêtir une certaine complexité ostensive. Nous ne voyons pas là l'occasion de confronter les élèves à des expressions complexes, mais la substitution peut outiller des adaptations, des plus « simples » ou non, portant sur la forme des expressions, ces adaptations pouvant être en réalité assez élaborées. Notons néanmoins que nous avons produit des propositions entièrement par substitution. Or, dans le calcul algébrique, cette opération est en réalité nécessairement précédée par une reconnaissance de forme. Que ce soit pour un développement ou une factorisation, il s'agit au préalable, et à partir des canons connus, d'agréger des sous-expressions potentiellement substituantes. Cependant, un travail sur les « formes » peut, peut-être outiller cette étape. Pour développer $(2x+b+1)^2$ par exemple, l'on serait conduit dans un premier temps, à produire la « forme » correspondante, en complétant l'assemblage par exemple de la manière suivante « $((2x)+(b+1))^2$ » ou bien comme « $(((2x)+b)+1)^2$ ». Remarquons que pour une somme de trois termes, un choix est possible entre deux « formes ». A partir de cette « forme » il s'agit, par analogie, d'y reconnaître une autre « forme », canonique (l'un des membres d'un canon). Alors seulement, les substitutions, par exemple $a \curvearrowright (2x)$ et $b \curvearrowright (b+1)$, permettent de donner une première étape dans le développement, l'étape à introduire pour adapter les techniques de développements connues sur des expressions moins complexes, et ainsi nourrir de nouvelles adaptations comme celle-ci, pour un développement d'un carré d'une somme de trois termes. On obtient ainsi « $\big((2x)+(b+1)\big)^2 = (2x)^2 + 2(2x)(b+1) + (b+1)^2$ ».

Interprétations
La question de l'interprétation de la « forme » obtenue se pose alors, tout comme celle du lien entre la forme propositionnelle originaire et celle-ci. Reprenons l'exemple « $3x(x+5)$ » et les substitutions $k \curvearrowright (3x)$, $a \curvearrowright x$ et $b \curvearrowright 5$ dans la « forme » « $k\times(a+b) = k\times a + k\times$

b ». L'interprétation de la sous-expression obtenue « $(3x) \times x + (3x) \times 5$ » se fait tout d'abord à partir de celle de la « forme » originaire. Si k, a et b sont des signes de nombres donnés, le processus peut être alors décrit « étant donné trois nombres, multiplier l'un par chacun des deux autres, constituer les résultats, puis les ajouter » ce qui donne après substitution, « étant donné un nombre de signe x, le multiplier par 3 et constituer le résultat, puis multiplier ce résultat par chacun des nombres x et 5, constituer les résultats, puis les ajouter ». On voit dans la procédure associée, une modification, étant donné qu'une étape supplémentaire correspondant à la substituante émerge. Les autres substituantes correspondent à des instanciations. La dénotation de la proposition est par ailleurs la même : Vrai. Enfin, la substitution aboutit de la même manière que ce que nous avons vu plus haut, à une création d'un objet mathématique : une fonction polynôme réelle à une indéterminée. Cet objet peut à son tour être interprété comme instanciation des objets précédents : les fonctions polynômes à trois ou quatre indéterminées.

Affectation
La substitution consécutive dans « $3x(x+5)$ » par $x \curvearrowright 2$ aboutissant, en restituant les signes de la multiplication, à « $3 \times 2 \times (2+5)$ », est un chiffrage permettant par suite de calculer le dénoté de l'expression arithmétique ainsi créée. Elle s'interprète comme une affectation d'une « valeur » au « donné » alors déterminé. On obtient une instanciation numérique de l'expression, qui prend donc une certaine valeur.

Avant de conclure quant aux potentialités et aux questions soulevées par la pratique de la substitution, nous allons revenir sur la question du choix des ostensifs afférents.

4.3.3 Quels ostensifs lier à la substitution ?

Signes d'agrégation
Notons tout d'abord que nous avons choisi *a priori* d'utiliser des parenthèses à l'instar de Serfati (2005), comme signes d'agrégation, tout d'abord parce que ce sont historiquement, ceux qui se sont imposés comme signes délimitants essentiels et qui, au moment de la mise en place des premières substitutions avec Leibniz ou Newton, ont conduit à leur assigner une nouvelle fonction de signes d'agrégation. Cette double fonction correspond à une double interprétation des écritures du côté processus et objet que l'expert de la pratique algébrique utilise à bon escient constamment. Cette double interprétation nous paraît susceptible d'être construite en partie, pour les élèves, par une dialectique entre les registres combinatoire et de la signification pour employer les termes de Serfati (2005), ou entre syntaxique et sémantique du point de vue linguistique. Celle-ci serait véhiculée par la substitution et un certain travail sur et avec l'ostensif des parenthèses. La délimitation dont on peut se saisir, entre calcul aveugle dans un premier temps, mais assuré par un travail sur les « formes », et interprétation des écritures, dans un second temps, ne peut-elle pas constituer une étape de cette dialectique ? Nous avons vu que les parenthèses, rendent possible l'exhibition des « formes », et une certaine codification du « résultat » d'une expression : la substitution peut alors s'opérer dans le registre combinatoire, sans se préoccuper de la hiérarchie des opérations en même temps. Notons quoi qu'il en soit que la double fonction des parenthèses coexistera dans le travail syntaxique. Les révéler néanmoins ne peut-il pas être utile en tout début

d'apprentissage, tout comme cela paraît utile aux manuels comme aux enseignants en 3e pour soutenir les factorisations ?

Prenons un exemple en 5e. Supposons que, par exemple au cours d'une résolution d'un problème, après avoir accompli un type de tâche de traduction sous forme symbolique d'un programme de calcul donné (ou construit) sous sa forme rhétorique (donc considéré tout d'abord comme processus), l'on soit conduit à examiner l'expression « $5(2x-1)$ ». Supposons de plus que, pour une raison contingente au problème, l'on souhaite développer cette expression, et que ce soit là la première rencontre avec une extension, pour un pseudo-monôme, de l'utilisation de « $k \times (a-b) = k \times a - k \times b$ ». Un travail dans le registre combinatoire pourrait s'envisager selon les étapes suivantes :

Etape 1 : Travail sur la « forme » source : passer de l' « assemblage » à la « forme », autrement dit, dûment compléter l' « assemblage ».

Notons que l'exhibition des signes × que nous avons été contraints de faire plus haut, et que nous avons posée ici, tient au fait que l'une, au moins, des substituantes est un nombre.

A défaut, dans « $k(a-b) = ka - kb$ », les substitutions non parenthésées $k \curvearrowright 5$, $a \curvearrowright 2x$ et $b \curvearrowright 1$, conduiraient à écrire : « $5(2x-1) = 52x - 51$ ».

Les signes × ont alors une fonction séparatrice nécessaire, compte tenu des règles d'écriture symbolique, qui ne sont pas les mêmes pour le produit, selon les catégories des facteurs de ce produit : la juxtaposition n'étant permise que dans des cas particuliers. Une façon d'éviter ce questionnement est de compléter l'expression en les restituant. Une autre façon consisterait à parenthéser les nombres et les substituantes : dans « $k(a-b) = ka - kb$ », les substitutions cette fois parenthésées $k \curvearrowright (5)$, $a \curvearrowright (2x)$ et $b \curvearrowright (1)$ conduiraient à écrire : « $(5)\big((2x)-(1)\big) = (5)(2x) - (5)(1)$ ». L'inconvénient du surparenthésage apparaît alors, d'autant qu'il nous semblerait quelque peu délicat (et non nécessairement utile) d'introduire une distinction pour les élèves entre « forme » et « assemblage » de niveau 0, la distinction étant subtile entre (5) et 5, et revient à distinguer expression et dénoté.

Considérant donc *a priori* plus idoine la voie de la restitution des signes ×, dans le travail pour passer d'un « assemblage » à une « forme », nous souhaitons également éviter un surparenthésage. Ainsi pourrait-on, envisager de ne pas exhiber pour les « formes » sources, les parenthèses les plus extérieures. A partir de « $k(a+b) = ka + kb$ » on obtiendrait :

« $k \times (a-b) = (k \times a) - (k \times b)$ » (on ne parenthèse pas les « lettres », celles-ci étant des « assemblages » de niveau 0). Mais le choix de ne pas parenthéser les « lettres » conduit alors à parenthéser nécessairement les substituantes, correspondant, du moins, à des « assemblages » de niveau supérieur ou égal à 1. Ce travail de parenthésage se fait à partir des propriétés de priorités opératoires.

Etape 2 : Travail sur la « forme » substituante :

En utilisant l'exemple précédent, on est conduit dans cette étape à écrire $k \curvearrowright 5$, $a \curvearrowright (2x)$ et $b \curvearrowright 1$.

Rappelons néanmoins que ce travail repose nécessairement sur des reconnaissances de formes à partir de l'expression « $5(2x-1)$ ». L'on pourrait envisager de compléter l' « assemblage » (en élidant les parenthèses extérieures à nouveau) de la manière suivante : « $5((2x)-1)$ », à partir des priorités opératoires. La reconnaissance de forme est-elle en ce cas outillée, ou rendue plus malaisée, compte tenu de l'absence de parenthèses autour de la « lettre » a dans la « forme » source que nous avons choisie ? En réalité cette « forme » apparaîtra de toute façon si l'on parenthèse les substituantes en opérant la substitution dans la « forme » choisie, ce qui laisse, selon nous la question finalement ouverte. L'assemblage ainsi complété fait en outre passer d'une interprétation du côté processus (du programme de calcul afférent) au côté objet. Si l'interprétation n'a lieu qu'ultérieurement, on peut se demander comment dès lors donner du sens à ces manipulations, et si elles ne sont pas rendues opaques par le surparenthésage.

Etape 3 : Substitution

« $k\times(a-b)=(k\times a)-(k\times b)$ » et $k \curvearrowright 5$, $a \curvearrowright (2x)$ et $b \curvearrowright 1$ permettent d'écrire : « $5\times((2x)-1)=((2x)\times 5)-((2x)\times 1)$ ». Le travail est alors « aveugle », uniquement combinatoire.

Etape 4 : Interprétation - passage d'objet[64] à processus et de « forme » à « assemblage » -

A strictement parler, les « formes » s'interprètent comme résultat. Cela pose la question de considérer les interprétations plus tôt, en amont, avec un travail sur l'expression « $5(2x-1)$ ». Sur quelle interprétation des écritures et des parenthèses s'appuie-t-on lorsqu'on enlève les parenthèses inutiles ? A quel moment supprimer les parenthèses inutiles pour l'étape suivante de transformations de mouvement, autrement dit, de calcul algébrique ?

L'on serait tenté d'enlever toutes les parenthèses ici ; il en irait pourtant autrement dans le cas d'une factorisation utilisant la même « forme » source, avec $k \curvearrowright (5x+3)$, $a \curvearrowright (2x)$ et $b \curvearrowright 4$ aboutissant à : « $(5x+3)\times\big((2x)-4\big)=\big((5x+3)\times(2x)\big)-((5x+3)\times 4)$ ». Les parenthèses autour du produit $((5x+3)\times 4)$ sont en effet utiles pour pouvoir développer sans se préoccuper des questions de signes liées au fait que ce produit soit le deuxième terme d'une différence.

D'un autre côté, si l'on n'enlève pas les parenthèses, il faut pouvoir opérer sur des pseudo-monômes, c'est-à-dire que l'on doit pouvoir effectuer $(2x)\times 5$, avec un canon comme « $(ax)\times b=((ab)x)$ » par exemple. Ou bien on travaille par transformation de mouvement (fondée sur la commutativité et l'associativité de la multiplication) en interprétant l'écriture comme celle d'un produit, et en passant de la catégorie de Pseudo-monôme à Produit, avant de calculer. Mais alors, on perd cette interprétation de pseudo-monôme, qui peut être nécessaire dans une transformation ultérieure. Ceci rejoint du reste aussi la question de l'idonéité du parenthésage pour la substitution que nous avons écrite de façon lacunaire : $k \curvearrowright (5x+3)$, c'est-à-dire sans le parenthésage du pseudo-monôme.

---

[64] Nous signalons ici que le terme objet renvoie à Sfard, dans une distinction processus / objet, et se rapproche de la définition de Douady que nous avons employée pour des objets plus larges, mais en aucun cas à « objet » au sens de Serfati, que nous n'avons pas souhaité introduire. Nous renvoyons ici le lecteur à Serfati (2005) qui parlerait en ce cas de substance et procédure.

Ces questions liées au parenthésage, total ou partiel, utile ou non, nous semblent en réalité seulement effleurées. Elles demanderaient une exploration ici tout juste amorcée, qui s'accompagne de questions quant à l'organisation d'une dialectique entre combinatoire et interprétation. Peut-on par exemple trouver un ensemble d'étapes, les mêmes, dans ce travail pour les substitutions et les parenthèses, selon les types d'expressions, les formes sources et les niveaux de classes du collège ? Le risque peut-être grand de créer un ensemble de règles formelles surnuméraire.

Pourtant, les parenthèses offrent une codification du résultat qui nous semble permettre d'accompagner cette extension de l'usage d'un canon, quantifié par des « valeurs » de nombres, ce qui, peut-être, pourrait permettre de penser « $(2x)$ » ou « $(x + 1)$ » comme un nombre. En même temps, lorsqu'on enlève les parenthèses on passe de « forme » à « assemblage », donc d'objet à processus, alors que dans une transformation de mouvement on opère sur les fonctions syntaxiques qui demandent une interprétation structurale des expressions. C'est-à-dire qu'alors, dans un canon où les variables sont typées en début d'apprentissage comme nombre, déterminé ou non, une nouvelle quantification apparaît : les variables sont à la fois typées nombres, et de façon plus générale, expression symbolique algébrique. Ce jeu dialectique peut-il être enseigné sans devenir une usine à gaz ? Peut-il permettre justement de créer, et à terme de conserver, la double interprétation sur des écritures non dûment complétées, telle que l'expert peut la pratiquer ?

Codification de la substitution

Par ailleurs, on peut aussi poser la question des ostensifs indiquant substituée et substituante. Nous avons choisi une flèche arrondie, à l'intar de Serfati (2005), tandis que le signe = est habituellement employé pour les chiffrages. Ainsi dit-on « si $x = 2$ », pour annoncer une substitution d'un « chiffre » à un lieu d'une « lettre ». De même, l'on voit apparaître l'utilisation de l'égalité comme dans certains manuels de 3^{e}. Tout d'abord, nous pensons que l'utilisation des parenthèses pour la substituante, que l'on choisisse le signe = ou le signe $\curvearrowright$ s'avère utile, comme nous l'avons dit, pour remplacer une « forme » sans se préoccuper alors des opérations, c'est-à-dire d'interprétation, ou plus exactement, pour repousser l'interprétation. Peut-être l'usage d'un signe intermédiaire en première instance, peut-il permettre de ne pas rencontrer d'emblée toutes les ruptures et extensions quant à l'utilisation du signe =, qui, comme on a pu l'entrevoir lors des analyses de notre ingénierie, sont difficiles. Dans une substitution, en effet, le signe est orienté, de gauche à droite. Plus encore un signe comme $\curvearrowright$ peut peut-être s'avérer moins conflictuel et permettre une substitution, comme $x \curvearrowright x + 1$, assez rare au collège, mais qui deviendra prégnante au lycée avec les suites. Enfin, « poser » la substitution nous semble être une piste qui mérite d'être explorée en début d'apprentissage, même dans le cas de substitutions considérées simples, pour pouvoir être à nouveau convoquées pour des substitutions plus complexes, c'est-à-dire à l'occasion d'adaptations nouvelles. Les substitutions à la « lettre » étaient ainsi usuellement annoncées par Leibniz par la mention « on pose » (*ponatur*) (Serfati 2005), même si le signe utilisé était celui de l'égalité =.

4.4. DE NOUVEAUX ENJEUX FORMALISATEUR, UNIFICATEUR ET GENERALISATEUR ?

Au terme de notre étude, un certain nombre de potentialités relatives à l'utilisation de la substitution à des fins d'enseignement, nous semblent émerger, d'autant que nos analyses de manuels et de discours d'enseignants confirment qu'elle existe, bien qu'elle relève, en l'état, d'une pratique essentiellement muette, accompagnant une extension tout aussi silencieuse du côté des polynômes.

Tout d'abord, cette notion paraît *a priori* permettre de penser un travail sur les formalismes nouveaux, selon les niveaux de classes, de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition et ainsi unifier les différentes formes de cet élément technologique. Nos analyses de manuels et des programmes montrent en effet que les formalismes (simple, double puis les identités remarquables) sont faiblement mis en relation. Par exemple, les identités remarquables ne sont démontrées que dans le sens du développement, la distributivité simple n'est pas toujours utilisée pour démontrer la double, et lorsqu'elle l'est la substitution à l'œuvre est passée sous silence. Notre étude épistémologique permet d'envisager que la substitution pourrait au contraire soutenir à la fois ces généralisations de l'utilisation des formalismes anciens, et l'émergence de nouveaux canons, et ainsi renforcer le lien qui les unit.

Un deuxième élément émergeant est celui d'une nouvelle unification de pratiques existantes, mais muettes et en partie ignorées, dans la dimension sémio-linguistique, qui accompagnent le double mouvement de généralisation orchestré par la distributivité lié aux systèmes de nombres. Il s'agit des gestes de littéralisation et de chiffrage. Le premier correspond à un formalisme portant une généralisation. Il permet la création de canons, comme « $k \times (a+b) = k \times a + k \times b$ », à partir de « $27 \times (100+5) = 27 \times 100 + 27 \times 5$ » où l'on a remplacé les nombres par des lettres, ce que l'on pourrait aussi rapprocher de techniques de modélisation permettant de créer un modèle. Le second, relève d'instanciations, ou de l'utilisation de ces canons, dans le domaine numérique. Ces deux formes de substitutions nous paraissent pouvoir éclairer autrement, dans la dimension sémio-linguistique, la dialectique entre numérique et algébrique. Ces substitutions se prolongent par des substitutions de « formes » au lieu de la « lettre », comme lorsque « $(2x)$ » peut remplacer « k », en véhiculant une généralisation de la propriété de distributivité que nous avons dite « du côté des polynômes ». La notion de substitution nous paraît ainsi revêtir un certain caractère unificateur et généralisateur.

Un dernier élément émergeant, en lien avec ces dernières substitutions, concerne les potentialités vis-à-vis des adaptations de techniques dans le calcul algébrique. Comme nous l'avons vu, la substitution peut outiller des pratiques nouvelles, y compris en début d'apprentissage, et pour des expressions assez complexes du point de vue des ostensifs, avec un calcul aveugle « sûr », au sein des « formes ». Elle pourrait également participer à unifier les genres de tâches de factorisation et de développement, actuellement traités de façon séparée dans les manuels, dans la mesure où elle les outillerait *également*, c'est-à-dire l'un comme l'autre. Dans les manuels actuels en effet, lorsqu'elle apparaît peu ou prou, elle est consacrée aux factorisations en 3e. Ainsi les substitutions $k \curvearrowright (3+2x)$, $a \curvearrowright 5$ et $b \curvearrowright (7x)$ dans le canon précédent donnent « $(3+2x) \times 5 + (3+2x) \times (7x) = (3+2x) \times (5+(7x))$ ». Cette puissance de l'écriture symbolique repose néanmoins sur certaines reconnaissances nécessaires au préalable pour déterminer des substituantes possibles comme « $(3+2x)$ », mais aussi, et de façon essentielle, sur un travail de parenthésage des expressions. Celui-ci est à la fois intéressant dans le sens où il permet une codification du résultat, mais aussi parce qu'il permet de distinguer les interprétations côté processus et objet. Toutefois, ce travail présente aussi certainement un coût non négligeable. Les questions liées à l'interprétation repoussée, sont également difficiles, et se conjuguent à la multiplicité des fonctions des parenthèses.

Ces limites s'accompagnent de la question de la rigidification qu'apportent les substitutions dans la pratique du calcul algébrique, au contraire des transformations de mouvement. Une substitution n'est pas une transformation de mouvement car elle ne porte pas sur des fonctions syntaxiques, mais sur des « formes ». Elle n'est pas couplée à une propriété mathématique : une substitution peut s'effectuer en dehors de toute interprétation. Comme nous l'avons montré, une substitution est plus rigide qu'une transformation de mouvement, pour ce qui est de l'utilisation de canons. Par exemple, la place des facteurs ou des termes ne peut pas être changée dans une substitution, de sorte que la forme source doit être extrêmement proche du point de vue ostensif, des formes que l'on trouve dans les canons disponibles. Néanmoins la substitution est une théorie des écritures qui peut soutenir les extensions de transformations de mouvement et, dans une certaine mesure, les adaptations de techniques du calcul algébrique. Penser un enseignement de la substitution ne saurait donc se faire qu'en articulant substitution et transformation de mouvement.

En outre, cette technique peut pallier les limites du rhétorique, pour décrire par exemple des transformations de mouvement plus complexes. Historiquement l'écriture symbolique algébrique de Descartes conduisit à « la rupture progressive avec l'écriture rhétorique, dont le maintien se révéla dans les faits intenable, dès que la hiérarchie des instructions en vint à contenir deux niveaux au moins » (Serfati 2005). L'expression rhétorique demande d'introduire une étape, une désignation des résultats intermédiaires, pour les constituer comme objets d'exécution ultérieure. Les noms « premier résultat » ou « second résultat » par exemple, ne restituent pas la mémoire des contenus des exécutions antérieures, autrement dit des processus de leur obtention. Or, pour des assemblages quelque peu élaborés, il peut y avoir de nombreux résultats partiels.

La substitution, pour l'expert en algèbre élémentaire ne se pose que lorsqu'un certain besoin se fait ressentir, face à une expression un peu complexe, ou une difficulté, liée par exemple à des gestions de signes nombreuses. Le besoin dépend, bien sûr, de la culture des expressions que l'on possède. L'explicitation consiste alors à poser, et à produire un calcul *formel*, c'est-à-dire un calcul qui repose sur du tout explicite, -ou du moins sur du « plus » explicite-, à l'instar du calcul en informatique, dont les vérifications et reconnaissances catégorielles s'effectuent par pattern-matchnig. Le calcul algébrique, quant à lui, est *a priori* de nature plus souple, parce que les mécanismes de reconnaissances prototypiques reposent sur des prises d’indices ostensifs, et des implicites fondés sur l’expérience, c’est-à-dire que la reconnaissance passe par des moyens que le débutant n’a pas, avant d’explorer les catégories et fonctions syntaxiques, pour s’en assurer tout en essayant de produire la transformation de mouvement visée.

L’objectif de la substitution ne serait pas de lever des implicites parce qu’il y en aurait trop, mais bien d’apprendre aux élèves à les reconnaître, et à travailler avec. L’explicitation en début d’apprentissage paraît revêtir un potentiel certain pour outiller les élèves afin qu’ils puissent *convoquer* une pratique explicite face à des adaptations nouvelles, éventuellement problématiques, ou face à des besoins de contrôle, selon l’enjeu, et ce d’autant que les outils de vérification (évaluer des expressions, compter le nombre de termes, ou recommencer un développement …) sont peu nombreux en collège, voire peu efficaces, et surtout coûteux.

Ces explicitations et le travail qui les accompagne, auraient un caractère *provisoire*, en début d’apprentissage, avec pour finalité de s’en détacher. Le langage algébrique est extrêmement souple, en particulier grâce aux implicites qu’il véhicule, et économe : on utilise ainsi des même lettres pour des choses différentes. Mais l’apprentissage s’en trouve alors difficile, en partie en raison de ces implicites, et des extensions des usages qui les accompagnent, qui font que les expressions sont toutes typées avec plusieurs types, et que ces types évoluent tout au long de la scolarité.

Il existe un apprentissage nécessaire de la grammaire, purement syntaxique (sans sens) qui accompagne le travail des techniques de transformation, parce qu’il faut une grammaire correcte pour produire des expressions correctes.

La substitution experte se passe d’ostensifs. Toutefois la notion de substitution paraît constituer une étape dans l’apprentissage, utile, voire peut être nécessaire, y compris au début, puisque justement, l’expérience est absente et se construit. Ceci nous paraît faire écho aux résultats des analyses de manuels de Pilet (2012) dont la comparaison entre les expressions rencontrées au collège et celles apparaissant au lycée conduit l’auteure à conclure que si les techniques fondées sur des reconnaissances de forme peuvent suffire au collège, il ne saurait en être de même au lycée. Les substitutions paraissent en outre avoir un avenir pour les résolutions d’équations, mais aussi pour l’étude de suites ou pour les calculs de dérivées ou de primitives. La substitution nous paraît donc constituer une perspective de recherche pour fonder un prolongement possible du point de vue formalisateur, unificateur et généralisateur adopté sur l’enseignement de la distributivité dans cette thèse, afin de poursuivre l’élaboration d’une ingénierie didactique visant à enseigner le calcul algébrique tout au long du collège, et même par la suite. Elle permettrait en effet de construire, et de prolonger une nouvelle étude des formalismes, et de leur emploi, d’unifier en même temps certaines pratiques dans la dimension sémio-linguistique, et enfin d’accompagner les généralisations du côté des polynômes, en complément des transformations de mouvement. L’étude des questions de formalismes que nous avons soulevées ne nous semble cependant qu’amorcée, et les difficultés entrevues tout comme le coût, non négligeables. Si nous restons assez convaincue à l’issue de notre étude épistémologique que la substitution serait un élément incontournable à penser pour l'enseignement du calcul algébrique, la manière dont elle pourrait être appréhendée est une question qui reste ouverte.

Conclusions et perspectives

Au terme de notre étude, deux référents majeurs nous semblent émerger pour l'élaboration d'une alternative quant à l'enseignement du calcul algébrique au collège. Le premier est celui de la modélisation didactique du calcul algébrique comme un ensemble de transformations de mouvement. Une transformation de mouvement est une application sur un langage, qui repose sur une propriété mathématique, et qui associe à une expression donnée, une expression qui lui est égale. Elle correspond à l'activité dans la dimension sémio-linguistique engagée par les techniques. Le second référent est plus spécifique à la dimension mathématique. Il s'agit des caractères formalisateur, unificateur et généralisateur de certains savoirs à enseigner relatifs au calcul algébrique. Nous proposons pour conclure d'en dresser les potentialités au travers de nos résultats, mais aussi des perspectives qui se dessinent pour poursuivre le travail déjà engagé.

Calcul algébrique et transformations de mouvement

Dans le premier chapitre de notre thèse, nous donnons un aperçu global de la modélisation didactique du calcul algébrique en termes de transformations de mouvements. Celle-ci permet tout d'abord de penser les dialectiques qui se jouent entre les dimensions sémio-linguistique et mathématique dans les manipulations d'ostensifs, dans une perspective complémentaire aux praxéologies de modélisation, envisagées dans la recherche.

Notre étude des situations de modélisation s'inscrit dans une recherche de savoirs opérationnels pour le calcul algébrique à même de mieux outiller les pratiques dont de nombreuses recherches montrent les dysfonctionnements. Elle nous permet de conclure que, même dans ce cadre favorable d'un enseignement fonctionnel, donnant du « sens », le passage d'un processus de modélisation, à l'émergence du calcul algébrique, pour le travail au sein du modèle, ne va pas de soi, pour la construction d'une théorie du calcul algébrique qui outille en même temps les techniques et les gestes qui la composent. Nous montrons que dans ces praxéologies de modélisation, dont l'enseignement apporte par ailleurs des connaissances riches et nécessaires, les transformations de mouvement ne sauraient advenir d'elles-mêmes, en particulier parce que les constructions des égalités ne s'y font pas dans un *calcul*, autrement dit, dans une transformation portant *sur* les écritures. Ce travail est donc un *autre* travail, que nous n'envisageons certainement pas en concurrence mais comme complémentaire.

Nos analyses nous conduisent à envisager une nouvelle interprétation des égalités entre expressions algébriques. Dans les praxéologies de modélisation telles qu'elles sont envisagées, en effet, le sens de l'égalité de deux expressions est donné par l'équivalence de programmes de calcul associés (qui font le sens des dites expressions). Dans les praxéologies de calcul algébrique, l'égalité n'est pas construite à partir d'une double modélisation (par exemple de deux façons différentes de compter un même nombre d'objet à une étape donnée), mais comme résultante d'une transformation de mouvement : le membre de droite est l'image du membre de gauche par une transformation de mouvement. Les transformations de mouvement portent une modification profonde de l'interprétation de l'égalité, complémentaire, mais indispensable à l'émergence de ce que nous avons appelé un praxème de calcul, et qui peut ne pas aller de soi. Ainsi en témoigne un épisode de classe où l'invention du geste idoine (productif d'une expression à partir d'une autre) n'aura pas lieu face à une égalité assurée par une exploration numérique étendue. Nos analyses des relations entre système et modèle dans les praxéologies modélisation montrent qu'elles ne sont pas en réalité de nature à faire émerger d'elles-mêmes des transformations de mouvement. Le sens des expressions alors construit (et leur dénotation) ne règle pas tout, du point de vue des aspects syntaxiques de la pratique, et des indices ostensifs pertinents dans le calcul algébrique. Les transformations de mouvement permettent de s'y attaquer.

Elles donnent les moyens d'envisager une rhétorique nécessaire articulant les dimensions sémio-linguistique et mathématique (avec le sens et la dénotation). En particulier, le modèle des expressions symboliques algébriques permet d'assurer que leur description rigoureuse est possible à partir des fonctions syntaxiques des sous-expressions, qui en sont les invariants. Ceci conduit à envisager un discours qui puisse accompagner des généralisations portant sur les catégories de ces sous-expressions : nombre, somme, produit, pseudo-monôme par exemple.

L'ingénierie que nous avons construite et expérimentée montre qu'il est possible que les élèves se saisissent d'un tel discours, et qu'ils construisent et identifient les transformations de mouvement afférentes, au moment de l'introduction de la propriété de distributivité en classe de 5^{e}. Elèves et professeur l'élaborent dans un véritable effort collectif. Les difficultés langagières sont importantes, et les interventions didactiques du professeur prévisibles, apparaissent avec toutes leurs maladresses. Pourtant, la mémoire du milieu de référence bâti autour de calculs de produits, ainsi que celle de la situation de production d'égalités, jouent un rôle déterminant pour permettre des interprétations multiples des égalités et des expressions mises à l'étude, et une évolution des discours en construction. Ces discours prennent du temps, et nécessitent de nombreuses reprises faites de décontextualisations et de recontextualisations. Les interventions des élèves se nourrissent les unes des autres. Celles-ci jouent cependant un rôle essentiel dans la construction de dialectiques fines entre les dimensions sémio-linguistique et mathématiques qui se donnent à voir.

Dans la situation de formulation et d'institutionnalisation qui voit émerger une propriété commune, les élèves passent de l'identification spontanée d'ostensifs communs à la recherche d'une transformation de mouvement associée au type de tâche de production d'égalité. Le choix des variables didactiques liées aux produits donnés à effectuer s'avère un point d'appui essentiel pour disposer d'écritures d'égalités d'une certaine diversité, et assurer l'identification des invariants par les fonctions syntaxiques plutôt que par les localisations géographiques des sous-expressions.

L'un des résultats de cette expérimentation réside sans doute dans la souplesse des écritures qui s'y crée de façon assez remarquable. Elle s'explique tout d'abord par le choix des variables didactiques portant sur les produits donnés à effectuer aux élèves dans la première situation, et qui a été généré par les enjeux d'unification et de généralisation visés. En effet, il s'agissait de pouvoir unifier toutes les formes de connaissances anciennes possibles (ou du moins une grande partie) au moyen de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition ou à la soustraction. Les égalités produites par les élèves montrent à la fois le sens du développement comme de la factorisation, des distributivités à gauche ou à droite, des décompositions de facteurs sous la forme de somme de deux, trois ou quatre termes. Les localisations géographiques des termes et des facteurs sont variables. Cette diversité des écritures s'est avérée un point d'appui essentiel pour construire d'une part, une propriété dont les formalismes intègrent ces instanciations possibles et en même temps un certain domaine d'application, et d'autre part, les transformations de mouvement afférentes. La souplesse des écritures persistant dans les manipulations rend compte de leur émergence lors des situations, et de leur existence véritable, d'autant qu'elles demeurent, pour certains élèves du moins, plus tard au moment de l'évaluation. Les transformations de mouvement reposent en effet sur les fonctions syntaxiques, qui sont les invariants des sous-expressions.

Enfin, un dernier résultat, sans doute le plus saillant, est celui de l'émergence de dialectiques fines entre les dimensions sémio-linguistique et mathématique véhiculées par les transformations de mouvement, et qui accompagnent les réorganisations praxéologiques conduisant à ce que la distributivité occupe une place dans la composante technologique tout en s'articulant avec un travail sur et avec les ostensifs. Les interprétations des écritures dont s'emparent les élèves relèvent à la fois de celles d'écritures de nombres (dénoté) comme de programmes de calcul (processus), ou de facteur d'un produit. Ainsi 10+2 est-il interprété de la sorte selon qu'il est pris dans une description de technique, dans une vérification d'équivalence, ou dans une transformation de mouvement. De telles dialectiques prennent du temps, et occasionnent des reprises nombreuses, tant les difficultés langagières sont importantes, à la fois pour démêler les discours, pour s'approprier de nouveaux formalismes rhétoriques (d'équivalence de programmes de calcul), et pour identifier les moyens d'unifier et de généraliser les égalités produites. Les interventions didactiques du professeur sont importantes. Il n'en demeure pas moins que les discours s'élaborent dans un véritable effort collectif, se nourrissant des interventions des uns et des autres, et des interprétations multiples des écritures. Les nouveaux formalismes adviennent et augmentent la teneur théorique des discours, d'autant que les praxéologies construites s'appuient également sur la théorie de l'addition itérée qui vient légitimer du côté mathématique la généralisation première à l'ensemble des nombres entiers de ce que l'on observe par l'unification cherchée. Ainsi voit-on une élève légitimer une égalité en s'exclamant « c'est le théorème qui le dit ».

La construction d'un tel discours présente également des limites, qui sont notamment celles des descriptions rhétoriques. Elles sont coûteuses dès que les expressions deviennent un peu complexes, avec éventuellement une nécessité de désigner des résultats intermédiaires pour pouvoir opérer dessus, ce qui ne donne plus accès à leur mode de calcul.

La substitution paraît une pratique complémentaire aux transformations de mouvement pour soutenir de possibles adaptations de techniques de calcul, comme par exemple le développement d'un produit dont l'un des facteurs est une somme de trois termes. Elle paraît complémentaire pour l'utilisation des formalismes associés à la distributivité. Toutefois, les entretiens que nous avons menés auprès d'enseignants mettent à jour de possibles effets d'auto-censure liée à la substitution, en l'absence de transformations de mouvement. Ainsi l’un d’entre eux ne s’autorise-t-il pas à proposer de tels développements dans ces classes pour favoriser des reconnaissances ostensives : il écrit et fait écrire, les formules de la distributivité sous les expressions à développer ou à factoriser mais se trouve démuni pour les adapter sans véritable enseignement pensé de la substitution, qui rigidifie les techniques par rapport aux transformations de mouvement.

Une alternative d’enseignement : formaliser, unifier, généraliser

La recherche de savoirs opérationnels du côté des systèmes de nombres nous a amenée à fonder notre étude sur les caractères formalisateur, unificateur et généralisateur d’une composante technologique centrale dans le calcul algébrique : la distributivité de la multiplication par rapport à l’addition.

Notre second chapitre montre qu’une transposition du savoir au regard de ces aspects est possible, voire même parfois semble en arrière plan des programmes, et en même temps qu’elle ne vit pas réellement en l’état dans l’enseignement. Il existe pourtant des pratiques numériques anciennes fondées sur la distributivité. Certaines techniques de calcul mental de produits de nombres entiers comme 28×102, tout comme la technique de calcul posée usuellement enseignée dans les classes de primaire, reposent sur une utilisation implicite de cette propriété. Manuels et documents d’accompagnement en témoignent. Les deux types de tâches afférents sont, par nature traités de façon séparée, puisqu’ils s’excluent *a priori* l’un l’autre. Dans l’état actuel de l’organisation des savoirs à enseigner, la distributivité revêt donc un caractère unificateur. Elle complète les praxéologies correspondantes, en se constituant comme technologie dans le domaine numérique.

Pourtant, notre étude de la transposition standard des savoirs à enseigner et enseignés montre que de multiples incomplétudes peuvent faire obstacle et conduit à penser que cette unification n’est pas envisagée dans l’enseignement. Lorsque les techniques de calcul mental ou de calcul posé de primaire sont reprises en 6^{e}, les discours mettent l’accent sur les technologies liées à la numération décimale de position, affaissant ainsi les descriptions, même lacunaires, fondées sur l’utilisation en acte de la distributivité. Par ailleurs, lorsqu'elle est mise à l'étude explicitement en 5^{e}, les manuels n’organisent pas les unifications possibles entre les praxis anciennes du primaire de calcul mental et de calcul posé. Lorsqu’ils cherchent à compléter les techniques de calcul mental sur les entiers, les maladresses (le choix des nombres comme pour 13×11, conduit par exemple à ce que la théorie de l’addition itérée supplante la distributivité) ou la méconnaissance des pratiques antérieures minorent les difficultés ou les obstacles. Nos analyses montrent en cela que la distributivité a des conditions de vie particulières en primaire : elle peut être couplée à de nombreux autres éléments technologiques dans la pratique du calcul mental, comme la commutativité ou l’associativité de la multiplication, ou encore, des connaissances de nombres, ou de numération pour multiplier par des puissances de 10. Elle n’est utilisée que dans le sens du développement, et l’addition est prégnante par rapport à la soustraction. Elle peut n’être qu’évanescente dans les descriptions de techniques par rapport aux éléments liés à la numération et le travail ne s’effectuer que dans la dimension sémio-linguistique. Nos analyses *a priori* et *a posteriori* de la première situation de calcul de l’ingénierie expérimentée, montrent en quoi la recomposition de ces techniques et de leur description du côté de la distributivité est loin d'être évidente si elle n'est pas enseignée, et pourtant se révèle essentielle pour donner accès à une possible unification et une certaine généralisation. Ainsi voit-on un élève très clairement expliquer qu'ayant posé dans sa tête, il a mis le 24 à côté du 6 et qu'il n'a pas additionné. La pratique des retenues est un obstacle non négligeable pour passer à une description en termes de programmes de calcul portant sur des nombres, et non sur des transformations portant sur des chiffres. Une telle recomposition du savoir autour des techniques anciennes est pourtant indispensable pour faire émerger des discours débarrassés d'autres composantes technologiques et à même de dévoiler la distributivité. Ceci va de pair avec l'émergence d'une nouvelle forme de justification qu'est l'équivalence. Les descriptions des techniques anciennes ne réfèrent qu'à l'un des programmes de calcul, et éventuellement à une décomposition d'un facteur, qui ne correspond qu'à une partie de l'autre.

Nos analyses de pratiques enseignantes déclarées tendent, comme certains épisodes observés par d'autres recherches (Mok 2010), à montrer que l'unification après-coup ne va pas de soi. L'une des enseignants interrogés témoigne du fait que ses élèves ne « voient pas le lien avec le calcul littéral […] pour cette application, là pour eux, c'est pas du développement, même si tu leur apprends ».

De celles-ci émergent plusieurs conditions pour assurer la prise en compte des praxis numériques anciennes pour le calcul de produits. Tout d'abord le choix des nombres doit pouvoir conduire à utiliser la distributivité : si, en décomposant l'un des facteurs en somme, on obtient un terme égal à 1, l'addition itérée la supplante. Celle-ci peut pourtant prendre la place de théorie dans le cas des nombres entiers, et compléter les praxéologies de façon intéressante. Cela paraît même une nécessaire articulation afin de réorganiser les connaissances anciennes. Enfin, une autre condition émergeant de l'étude d'un projet fondé sur le calcul mental d'un enseignant, est celle de la construction de transformations de mouvement, afin de créer une dialectique entre les dimensions sémio-linguistique et mathématique dans le cadre numérique, comme dans le cadre algébrique, qui autrement, semble ne pas se créer. Ceci fait écho au caractère formalisateur de la distributivité.

Or, l'analyse des complexifications praxéologiques que demande la prise en compte à la fois de l'unification et de l'émergence de nouveaux formalismes (rhétorique comme symbolique dans le cadre numérique) rend compte d'évolutions notables dans les composantes techniques et technologiques. S'engager dans un enseignement des formalismes demande un jeu subtil entre les praxéologies mathématiques, protomathématique, et sémio-linguistique. Celles-ci se nourrissent les unes les autres, en se construisant, et en construisant la technologie de la distributivité qu'elles intègrent comme telle dans leur organisation au fur et à mesure des situations. En particulier, le type de tâche consistant à écrire une égalité doit être à la fois lié à une description de technique ancienne de calcul de produits, dont l'égalité porte un nouveau formalisme. Il doit aussi constituer un élément technologique des praxéologies de calcul, justifiant la technique par une équivalence.

L'un des résultats de l'expérimentation de l'ingénierie que nous avons construite réside dans l'élaboration d'un formalisme nouveau susceptible de dévoiler la distributivité, et la rupture de contrat correspondante dont s’emparent les élèves à propos du statut du signe =. Elles s’avèrent difficiles et résistantes, car l’égalité doit prendre un statut de relation d’équivalence inédit, et les écritures symboliques arithmétiques doivent se constituer comme nouvelles descriptions de techniques de calcul. Les obstacles de la numération existent, mais si les productions des égalités par les élèves montrent qu’ils parviennent à s’emparer à la fois de l’équivalence, et de la recomposition des techniques sous la forme de programmes de calcul, elles demandent de construire des situations qui les y confrontent. L’expérimentation que nous avons conduite montre que le caractère formalisateur peut être assumé. Certaines interventions des élèves comme les productions lors de l’évaluation laissent à penser qu’ils se sont saisis de ces nouvelles organisations et des dialectiques qui les accompagnent, et par suite de l’unification attenante.

D’autres unifications, qui paraissent pourtant comme passages obligés dans la transposition des savoirs à enseigner, ne semblent que peu organisées dans l’état actuel de l’enseignement : celles des genres de tâche de développement et de factorisation qui s’avèrent cloisonnés par les manuels avec une technologie aux divers formalismes, morcelée par les programmes.

Nos analyses des savoirs à enseigner et enseignés nous permet de mettre à jour un double mouvement de généralisation lié aux systèmes de nombres tout au long de la scolarité obligatoire. Dans un premier mouvement l’utilisation de la distributivité s'étend des nombres entiers (en lien avec l'addition itérée support de la définition de la multiplication) aux nombres décimaux (par préconstruction) et aux nombres rationnels (c’est admis mais cela permet de démontrer les règles d’addition de deux nombres en écriture fractionnaire). Ce premier mouvement de généralisation concerne les ensembles de nombres pour lesquels les lois et leurs propriétés se transmettent. Dans un deuxième mouvement, l'extension se poursuit au moment de la construction de la règle de multiplication sur les nombres relatifs. Il s’agit alors d’un autre mouvement de généralisation car la distributivité est axiome : la règle est construite de façon à ce que la multiplication demeure distributive par rapport à l'addition. L'extension se poursuivra encore sur certains nombres irrationnels et sur les réels plus généralement. Ces généralisations répondent à un nouvel enjeu de construction d’opérations sur de nouveaux nombres. Cependant, cet enjeu est faiblement exploré dans les manuels, et les preuves de la distributivité au moment de sa construction n’apparaissent pas davantage. Les extensions silencieuses sont présentées comme allant de soi.

De façon concomitante, nos résultats d’analyse montrent qu’il existe une extension muette et précoce du côté des polynômes dans les usages que l'on fait des écritures algébriques.

En cela la construction curriculaire que nous envisageons est une alternative.

Les enjeux formalisateur, unificateur et généralisateur offrent des motivations au savoir dans un élargissement certain, mais cependant porteurs d’effets intéressants. L’ingénierie que nous avons construite et expérimentée en 5^{e} montre un certain nombre de potentialités pour le début d’une telle ingénierie curriculaire. Elle n’est pas la seule envisagée. Notre étude en effet s’est également attachée à explorer la situation des rectangles héritée des Eléments d’Euclide comme telle. Cette situation peut en effet porter unifications (du développement, de la factorisation), et généralisations (à des sommes de plusieurs termes, aux différents systèmes de nombres selon les découpages de la longueur), et soutenir des adaptations (Verdugo-Hernandez 2003), d'autant que les changements de cadres portent des connaissances intéressantes. Cependant, les limites liées à la généralisation du côté des nombres relatifs en particulier nous ont conduite à choisir une autre voie, qui est celle d'une généralisation des systèmes de nombres fondée par les pratiques numériques pré-existantes de calcul. Nous n'avons exploré au travers de l'expérimentation menée, que le premier mouvement de généralisation. Toutefois, l'intérêt d'une telle approche nous paraît significatif pour les nombres relatifs, dont la généralisation semble inaccessible autrement, c'est-à-dire à partir de situations de modélisation comme celles liées aux rectangles. Plusieurs travaux de recherche récents semblent d'ailleurs montrer l'intérêt voire la nécessité de considérer les liens entre le système des nombres relatifs et la théorie des polynômes (Dauriac 2014 ; Vlassis 2013).

L'ingénierie que nous avons élaborée dans le cadre de cette thèse est en réalité une première étape du projet global d'élaboration d'une alternative pour l'enseignement du calcul algébrique au collège. Les potentialités des enjeux formalisateur, unificateur et généralisateur que notre étude a mis à jour nous conduisent à penser la suite de cette élaboration dans cette perspective. Les articulations nécessaires entre les dimensions sémio-linguistiques et mathématiques donnent des pistes et des jalons pour envisager un enseignement du calcul algébrique au collège, lié à la distributivité, et même au-delà. L'exploration d'un mouvement de généralisation du côté des polynômes, que nos analyses de manuels révèlent, dans l'usage de la distributivité qui est fait tout au long du collège, nous a amené à envisager une nouvelle notion susceptible d'accompagner ces extensions : la substitution. Celle-ci a fait l'objet de notre dernier chapitre, qui en propose une étude épistémologique en amont de cette poursuite d'ingénierie.

Cette étude met tout d'abord à jour des extensions dans l'utilisation de la distributivité qui s'exercent silencieusement dans l'institution, et qui s'accompagnent de substitutions muettes, ou présentées comme allant de soi, dans les manuels comme dans les pratiques enseignantes déclarées. Elles concernent des pseudo-monômes comme des sommes, ou plus généralement des expressions symboliques de programmes de calcul. Elles peuvent apparaître dès les débuts de l'enseignement du calcul algébrique, en classe de 5^{e}. L'analyse épistémologique que nous avons menée en appui sur les travaux de Serfati (2005) nous a permis d'élaborer des fondements épistémologiques pour un enseignement de la substitution ainsi que des potentialités formalisatrice, unificatrice et généralisatrice.

La substitution pourrait tout d'abord s'avérer un moteur des constructions canoniques accompagnant les formalismes de la distributivité et leur articulation tout au long du collège. Elle permettrait à la fois de passer du formalisme simple, au double, et inversement, mais aussi aux identités remarquables, dans le sens du développement comme de la factorisation.

Elle pourrait également unifier les pratiques qui accompagnent certaines généralisations qui passent par des substitutions d'une certaine nature : les littéralisations. Celles-ci consistent à remplacer une « lettre » au lieu d'un « chiffre ». Inversement, les instanciations relèvent de substitutions particulières que sont les « chiffrages ».

En outre, la substitution nous paraît pouvoir être complémentaire aux transformations de mouvement pour soutenir de possibles adaptations, existantes ou nouvelles comme le développement d'un carré d'une somme de trois termes. Nous l'envisageons comme complémentaire, car son exercice dans la dimension sémio-linguistique rigidifie en partie la pratique, notamment par le travail sur les formes et le parenthésage qu'elle engage. La substitution experte, dans le calcul algébrique élémentaire se passe d'ostensifs. Cependant elle paraît outiller la pratique en début d'apprentissage, au moment où l'expérience des formes fait défaut, d'autant qu'une telle pratique affleure dans les pratiques de collège, y compris pour d'autres types de tâche algébriques comme la résolution de systèmes d'équations. Elle s'avère avoir de l'avenir dans les types de tâches au lycée, où elle apparaît posée pour le calcul différentiel ou intégral en analyse par exemple.

Les transformations de mouvement, comme la substitution sont envisagées pour le travail des formalismes, nécessaire dans toute pratique d'un langage symbolique. Elles permettent d'aborder un enseignement des articulations entre dimensions sémio-linguistique et mathématique à penser. Elles sont complémentaires aux autres voies explorées par la recherche autour de la modélisation, c'est-à-dire qu'elles apparaissent pouvoir faire le lien entre ces praxéologies et celles du calcul algébrique, pour sa construction.

Le travail que nous avons exposé ici fonde et amorce l'élaboration d'une alternative d'enseignement tout au long de la scolarité obligatoire, qui nous l'espérons, permettra de faire évoluer les savoirs à enseigner, les savoirs enseignés et les pratiques d'enseignement liées au calcul algébrique en vue d'en améliorer les apprentissages. La démarche que nous avons suivie s'inscrit dans la voie de recherches « au plus près des pratiques enseignantes et de l'activité des élèves » ouverte par Coulange (2012), en prenant comme point de départ les analyses de savoirs appris et enseignés dans les classes ordinaires au travers de travaux antérieurs. Les analyses que nous avons conduites à la suite n'ont eu de cesse de se nourrir de ces résultats, tout en les complétant à des fins de *design* didactique, et en explorant les potentialités de l'existant avant d'en envisager ce que l'on pourrait appeler de petites perturbations, pour reconstruire un enseignement autour du calcul algébrique.

Au-delà de l'ingénierie expérimentée, la construction d'un discours empreint des aspects unificateur, généralisateur et formalisateur, autour du calcul algébrique, paraît avoir un certain avenir. Il semble se dessiner, à l'aune des analyses d'entretiens que nous avons menées auprès des professeurs, un manque et un besoin d'un tel discours dans les classes, ce qui laisse à penser que les résultats de cette recherche puissent donner lieu à une certaine diffusion dans les pratiques. Cependant, les conditions d'une telle diffusion restent une perspective à explorer. Comment en effet en assurer ou en penser la diffusion ? Ce qui nous semble porteur dans l'ingénierie élaborée, relève à la fois de la recomposition des connaissances anciennes, de l'introduction d'un nouveau formalisme au moyen d'écritures d'égalités, véhiculant une rupture par rapport au sens de son emploi en primaire, et de la construction d'un discours qui, tout en unifiant et en permettant de « faire parler » les formalismes, peut être de nature à rendre sa fonction technologique à la distributivité au sein du calcul algébrique. Toutefois les interventions importantes de l'enseignant posent question, ce qui pourrait poser difficulté à la reproduction d'une telle ingénierie et de ce point de vue l'analyse de la deuxième expérimentation menée pourrait éclairer les conditions et les contraintes à envisager.

Les perspectives que nous envisageons du côté des pratiques ne consistent pas tant selon nous à diffuser l'ingénierie telle qu'elle a été élaborée, mais les résultats de notre étude sur la transposition didactique des savoirs à enseigner et enseignés afin de diffuser un projet global, rendant explicites, ou du moins visibles, les enjeux relatifs entre systèmes de nombres et calcul algébrique en vue d'enrichir les pratiques enseignantes en ce sens. Enfin, les résultats issus de notre étude de la substitution nous paraissent également intéressants compte tenu de l'existence de pratiques « muettes » de calcul algébrique qui convoquent des substitutions. La prise de conscience des difficultés d'élèves et d'enjeux ignorés d'apprentissage relatifs peut s'avérer utile. Il reste toutefois une réflexion à conduire pour envisager ce qui doit être enseigné sur la substitution, et à quel moment ou sous quelles conditions, en vue d'améliorer les apprentissages liés au calcul algébrique.

Bibliographie

ABOU RAAD N. (2003), *Difficultés rencontrées par les élèves de la classe de E.B.8 à la fin de l'apprentissage de la factorisation*. DEA, Université Libanaise, Faculté de Pédagogie.

ABOU RAAD N. (2004), *Les Identités Remarquables fonctionnent-elles comme un théorème ou comme un règle d'action dans le sens de la factorisation pour les élèves de la classe de troisième en France.* DEA, Université Lumière Lyon II, Didactiques et Interactions.

ABOU-RAAD N. (2006), Le calcul algébrique en France et au Liban. Etude comparée de l'enseignement de la factorisation et des erreurs des élèves. *Thèse d'université.* Université Aix-Marseille I.

ABOU-RAAD N., MERCIER A. (2009) Etude comparée de l'enseignement de la factorisation par un facteur commun binôme, en France et au Liban. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 29(2) 155-288.

ARTIGUE, M. (1990). Epistémologie et didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10, 2-3 : 241–286.

ASSUDE T., MERCIER A., SENSEVY G. (2007), L'action didactique du professeur dans la dynamique des milieux. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 27(2) 221-252

ASSUDE T., COPPE S., PRESSIAT A. (2012) Tendances de l'enseignement de l'algèbre élémentaire au collège : atomisation et réduction. In Coulange L., Drouhard J.P., Dorier J.L. et Robert A*., Enseignement de l'algèbre élémentaire, Bilan et Perspectives, Recherches en Didactique des Mathématiques, Hors série* (pp.35-56). Grenoble : La Pensée Sauvage.

BARDINI C. (2003), Le rapport au symbolisme algébrique : une approche didactique et épistémologique. Thèse de l'université Paris 7.

BARDINI C. (2001), Le rapport des élèves à la factorisation en fin de Troisième. *Cahier Didirem 35.* IREM Paris 7.

BEN NEJMA S. (2009), *D'une réforme à ses effets sur les pratiques enseignantes – une étude de cas : l'enseignement de l'algèbre dans le contexte scolaire tunisien*. Thèse de doctorat, Université Paris Diderot.

BEN NEJMA S., COULANGE L. (2009), A propos des effets d'une réforme sur les pratiques enseignantes, une étude de cas au niveau du secondaire en Tunisie. In Kuzniak A., Sokhna M. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et développement, enjeux de société et de formation. Actes du colloque EMF 2009*. *Revue internationale Francophone, numéro spécial*.

BRIDOUX S. (2011), *Enseignement des premiers notions de topologie à l'université – une étude de cas*. Thèse de doctorat, Université Paris 7.

BOSCH M., CHEVALLARD Y., (1994), Ostensifs et non-ostensifs dans l'activité mathématique. *Actes du Séminaire de l'Associazione Mathesis*. 1993-1994, pp. 190-200.

BOSCH M., CHEVALLARD Y.(1999), La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs : objet d'étude et problématique. Recherches en didactique des mathématiques 19(1) 77–124.

BOSCH M., FONSECA C., GASCON J. (2004), Incompletitud des las Organizaciones Matematicas locales en las instituciones escolares. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 24-2-3, 205-250.

BOSCH M., GASCON J. (2005), La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. In Mercier, A., Margolinas, C. (eds), Balises pour la didactique de mathématiques (pp. 107-122). Grenoble : La Pensée Sauvage.

BRIDOUX S. (2011), *Enseignement des premières notions de topologie à l'Université – une étude de cas.*Thèse de doctorat, Université Paris 7.

BRONNER A. (1997), *Etude didactique des nombres réels : i-décimalité et racines carrées*, Thèse de doctorat, Université de Grenoble.

BROUSSEAU G. (1982), D'un problème à l'étude *a priori*, *Actes de la 2e Ecole d'été de didactique des mathématiques (pp.39-60*). Olivet 1982, IREM d'Orléans.

BROUSSEAU G. (1984), Le rôle du maître et l'institutionnalisation ; in Recueil de textes et comptes rendus ; *Actes de la IIIème école d'été de didactique des mathématiques 2-13 juillet 1984 ; Olivet (Orléans),* équipe de didactique des mathématiques et de l'informatique Université 1 de Grenoble et CNRS Institut IMAG , Saint Martin d'Hères.

BROUSSEAU G. (1998) *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

BROUSSEAU G. (1997), La théorie des situations didactiques. (Cours donné lors de l'attribution du titre de Docteur Honoris Causa de l'Université de Montréal). *Interactions didactiques*. Genève.

BROUSSEAU G. (2005), Situations fondamentales et processus génétiques de la statistique. In A. Mercier & C. Margolinas (dir.). *Balises en didactique des mathématiques : Cours de la 12e Ecole d'été de didactique des mathématiques (pp. 165-249).* Grenoble : La Pensée sauvage.

CASTELA C. (2008), Travailler avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissage ignorés par les institutions d'enseignement. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 28-2, 135-182.

CASTELA C. (2011), *Des mathématiques à leurs utilisations, contribution à l'étude de la productivité praxéologique des institutions et de leurs sujets / Le travail personnel au cœur du développement praxéologique des élèves en tant qu'utilisateurs de mathématiques.* Note de synthèse présentée en vue de l'Habilitation à Diriger des Recherches, Université Paris Diderot.

CASTELA C., ELGUERO C. (2013), Praxéologie et institution, concepts clés pour l'anthropologie épistémologique et la socioépistémologie. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 33(2), 123-162.

CASTELA C., ROMO VAZQUEZ A. (2011), Des mathématiques à l'automatique : étude des effets de transposition sur la transformée de Laplace dans la formation des ingénieurs. *Recherches en Didactique des Mathématiques* Vol 31-1,79-130.

CHEVALLARD Y. (1997) Familière et problématique, la figure du professeur. *Recherches en didactique des mathématiques ;* 17(3) 17-54.

CHEVALLARD Y. (1985), *La transposition didactique - Du savoir savant au savoir enseigné*. La Pensée sauvage, Grenoble. Deuxième édition augmentée en 1991.

CHEVALLARD Y., (1989), Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. *Petit x* 19, 43-72.

CHEVALLARD Y. (2007), *Séminaire PCL2, année universitaire 2006-2007*. Disponible sur l'internet : http://yves.chevallard.free.fr/spip.IMG/pdf.Seminaire_2006-2007.pdf

CHEVALLARD Y. (2011), La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD. In Margolinas C., Abboud-Blanchard M., Bueno-Ravel L., Douek N., Fluckiger A., Vanderbrouck F., Wozniak F. (Eds.) *En amont et un aval des ingénieries didactiques* (pp. 81-108). Grenoble : La Pensée Sauvage.

CHEVALLARD Y., BOSCH M. (2012), L'algèbre entre effacement et réaffirmation aspects critiques de l'offre scolaire d'algèbre. In Coulange L., Drouhard J.P., Dorier J.L. et Robert A., *Enseignement de l'algèbre élémentaire, Bilan et Perspectives, Recherches en Didactique des Mathématiques, Hors série* (pp. 13-33). Grenoble : La Pensée Sauvage.

COMBIER G., GUILLAUME J.-C., PRESSIAT A. (1996), *Les débuts de l'algèbre au collège*. INRP.

CONSTANTIN C. (2008*), Des fragilités du collégien aux difficultés du lycéen en mathématiques, deux études de cas : Yoan et Joanna,* Mémoire de Master 2 Recherche, Université de Paris 7.

CONSTANTIN C., COULANGE L. (2010) Des fragilités du collégien aux difficultés du lycéen en mathématiques. *Séminaire franco-italien* SFIDA 34, Nice.

CONSTANTIN C., COULANGE L. (2012), In search for a specific algebraic task design or how to elaborate a situation highlighting algebraic techniques in second grade. *e-proceedings of ICME 12*, Séoul, Corée.

COULANGE L. (2012), *L'ordinaire dans l'enseignement des mathématiques, les pratiques enseignantes et leurs effets sur les apprentissages des élèves*. Note de synthèse présentée en vue de l'Habilitation à Diriger des Recherches, Université Paris Diderot.

COULANGE L., BEN NEJMA S., CONSTANTIN C., LENFANT-CORBLIN A.(2012), Des pratiques enseignantes aux apprentissages des élèves en algèbre à l'entrée au lycée. In Coulange L., Drouhard J.P., Dorier J.L. et Robert A., *Enseignement de l'algèbre élémentaire, Bilan et Perspectives, Recherches en Didactique des Mathématiques, Hors série* (pp. 57-79). Grenoble : La Pensée Sauvage.

COULANGE L., GRUGEON B. (2008) Pratiques enseignantes et transmissions de situations d'enseignement en algèbre, *Petit x* 78 5-23.

COULANGE L., DROUHARD J.P., DORIER J.L. ET ROBERT A. (2012), *Enseignement de l'algèbre élémentaire, Bilan et Perspectives, Recherches en Didactique des Mathématiques, Hors série* (pp. 159-175). Grenoble : La Pensée Sauvage.

CROSET M-C. (2009) *Modélisation des connaissances des élèves au sein d'un logiciel éducatif d'algèbre. Etude des erreurs stables inter-élèves et intra-élève en termes de praxis-en-acte.* Thèse de doctorat, Université de Grenoble.

DAURIAC P. (2014*), Entre relatifs et calcul algébrique en 4*[e]. Mémoire de Master 2, Université de Bordeaux.

DORIER J-L. (1997), *Recherches en histoire et en didactique des mathématiques sur l'algèbre linéaire - Perspective théorique sur leurs interactions.* Note de synthèse en vue de l'obtention d'une Habilitation à Diriger des Recherches, Université de Grenoble.

DOUADY R. (1992), Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement, *Repères IREM 6*, 132-158.

DUVAL R. (1995), *Sémiosis et Pensée Humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne : Peter Lang.

DROUHARD J.-P. (1992), *Les écritures symboliques de l'Algèbre élémentaire*. Thèse de l'université Paris 7.

DROUHARD J.-P. (1995), Algèbre, calcul symbolique et didactique. In Noirfalise R., Perrin-Glorian M.-J. (Eds.) *Actes de la 8ème Ecole d'été de la Didactique des mathématiques* (pp. 325-344). Clermont-Ferrand : IREM.

DROUHARD J.-P. (2012), L'épistémographie, un outil au service de la didactique des mathématiques. In Abboud-Blanchard M. & Flückiger M. (Eds.) *Actes du Séminaire national de didactique des mathématiques - Année 2011* (pp. 129-133). IREM de Paris 7 – Université Paris Diderot.

DROUHARD J.-P (2012) Le Séminaire Franco-Italien de Didactique de l'Algèbre. In Coulange L., Drouhard J.P., Dorier J.L. et Robert A., *Enseignement de l'algèbre élémentaire, Bilan et Perspectives, Recherches en Didactique des Mathématiques, Hors série* (pp. 179-186). Grenoble : La Pensée Sauvage.

DROUHARD J.-P., PANIZZA M. (2012), Hansel et Gretel et l'implicite sémio-linguistique en algèbre élémentaire. In Coulange L., Drouhard J.P., Dorier J.L. et Robert A., *Enseignement de l'algèbre élémentaire, Bilan et Perspectives, Recherches en Didactique des Mathématiques, Hors série* (pp. 203-229). Grenoble : La Pensée Sauvage.

DROUHARD J.-P. (2013), El análisis epistemográfico : un análisis multidimensional de los saberes para la didáctica de la matemática. *Comunicación en las XXIV Jornadas de Epistemología e Historia de la Ciencia, La Falda, Cordoba*. Area Lógico-Epistemológica de la Escuela de Filosofia y Centro de Investigaciones de la Facultad de Filosofía y Humanidades de la Universidad Nacional de Córdoba.

ERDOGAN A. (2006), Le diagnostic de l'aide à l'étude, en mathématiques : Analyse didactique des difficultés relatives à l'algèbre et aux fonctions en Seconde. Thèse de l'Université Paris Diderot.

FERRATON G., CHAACHOUA H. (2013), Rapport institutionnel au calcul littéral au collège. État des lieux et perspectives. *Petit x* 91, pp. 49-67.

GLAESER G. (1981), Epistémologie des nombres relatifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 2(3), 303-346.

GRUGEON B. (1997), Conception et exploitation d'une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire., *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 17(2), 167-210.

KIRSHNER D. (2004), Visual salience of algebraic transformations, Journal for Research in Mathematics Education, 35 pp. 224-257

KRYSINSKA M., MERCIER A., SCHNEIDER M. (2009), Problèmes de dénombrement et émergence de premiers modèles fonctionnels. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 29(3), 247-304.

KRYSINSKA M., SCHNEIDER M. (2010), *Emergence de modèles fonctionnels*. Editions de l'Université de Liège. Coll. Si les mathématiques m'étaient contées.

LENFANT-CORBLIN (2002), *De la position d'étudiant à la position d'enseignant : l'évolution du rapport à l'algèbre de professeurs stagiaires.* Thèse de doctorat, Université Paris 7.

MALARA N., NAVARRA G. (2006), Approaching the distributive law with young pupils, In M. Bosch (Ed.), Proceedings of the fourth congress of the European Society for Research in Mathematics. Education 363-373.

MATHERON Y. (2010), Contribution à l'étude du travail de la mémoire dans les processus d'enseignement et d'éducation. Note de synthèse présentée en vue de l'Habilitation à Diriger des Recherches, Université de Provence, Aix-Marseille I.

MERCIER A. (1992), *L'élève et les contraintes temporelles de l'enseignement, un cas en calcul algébrique*. Thèse du troisième cycle, Université de Bordeaux I.

MERCIER A. (1995), Approche biographique de l'élève et des contraintes temporelles de l'enseignement : un cas en calcul algébrique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 15-1. 97-142.

MERCIER A. (2012), Vous avez dit algèbre ? In Coulange L., Drouhard J.P., Dorier J.L. et Robert A., *Enseignement de l'algèbre élémentaire, Bilan et Perspectives, Recherches en Didactique des Mathématiques, Hors série* (pp. 159-175). Grenoble : La Pensée Sauvage.

MERCIER A., SCHUBAUER-LEONI M.-L., SENSEVY G. (2002), Vers une didactique comparée. *Revue Française de Pédagogie*, 141, 5-16.

MOK I.A.C. (2010), Students' algebra sense via their understanding of the distributive law. *Pedagogies : an international journal*, 5(3), 251-263.

PILET J. (2012), *Parcours d'enseignement différenciés appuyés sur un diagnostic en algèbre élémentaire à la fin de la scolarité obligatoire : modélisation, implémentation dans une plateforme en ligne et évaluation*. Thèse de doctorat, Université Paris Diderot.

ROBERT A. (1983), L'enseignement de la convergence des suites numériques en DEUG, *Bulletin de l'APMEP, 340*, 431-449.

ROBERT A. (1998), Outils d'analyses des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université, *Recherche en didactique des mathématiques,* 18(2), 139-190.

ROBERT A. (2005) Deux exemples d'activités en formation des enseignants de mathématiques du second degré. *Petit x,* 67, 63-76.

ROBERT A. (2008), Problématique et méthodologie communes aux analyses des activités mathématiques des élèves en classe et des pratiques des enseignants de mathématiques. In Vandebrouck (Ed), *La classe de mathématiques activités des élèves et pratiques des enseignants* (pp.31–68), Octarès.

ROBERT A. (2011), Des recherches de types d'ingénierie. In Margolinas et al.(Eds) *En amont et en aval des ingénieries didactiques, XVème école d'été de didactique des mathématiques,* (pp 207-222), Grenoble : La Pensée sauvage.

RUIZ-MUNZON N., MATHERON Y., BOSCH M., GASCON J. (2012), Autour de l'algèbre : les entiers relatifs et la modélisation algébrico-fonctionnelle In Coulange L., Drouhard J.P., Dorier J.L. et Robert A., In Coulange L., Drouhard J.P., Dorier J.L. et Robert A.*, Enseignement de l'algèbre élémentaire, Bilan et Perspectives, Recherches en Didactique des Mathématiques, Hors série* (pp. 81-100). Grenoble : La Pensée Sauvage.

RUIZ-MUNZÓN N. (2010), *La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional.* Thèse de l'Université Autonome de Barcelone.

SACKUR C., DROUHARD J.-P., MAUREL M., PECAL M. (1997), Comment recueillir des connaissances cachées en algèbre et qu'en faire ? *Repères-IREM,* 28, 37-68.

SCHNEIDER M. (2011), Ingénieries didactiques et situations fondamentales Quel niveau praxéologique ? IN Margolinas et al. (Eds) *En amont et en aval des ingénieries didactiques, XVème école d'été de didactique des mathématiques (pp 173-205).* Grenoble : La Pensée sauvage.

SERFATI M. (2005), *La révolution symbolique, la constitution de l'écriture symbolique mathématique.* Editions PETRA.

SFARD A. (1991), On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1–36.

TONNELLE J. (1979) *Le monde clos de la factorisation au premier cycle*. Mémoire de DEA des Universités de Bordeaux I et d'Aix-Marseille 2. Marseille : IREM d'Aix-Marseille.

VLASSIS J. (2013), Utilisation du signe négatif et activités de modélisation, *Education et Formation*, pp. 39-50.

VERDUGO-HERNANDEZ P. (2013), *Enseignement et apprentissage de l'algèbre élémentaire en France et au Chili*. Mémoire de Master 2, Université de Bordeaux II et Bordeaux IV.

WOZNIAK F. (2012). Des professeurs des écoles face à un problème de modélisation : une question d'équipement praxéologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques 32(1)*

LES MANUELS

BOURGEAT F., BRUSTEL A., CARLOD V., JACQUEMOUD D., KELLER A., MAZE M., PLANTIVEAU A., PUIGREDO F., VERDIER F. (2013) 6^E COLLECTION TRANSMATH, EDITIONS NATHAN.

BOURGEAT F., CARLOD V., JACQUEMOUD D., KELLER A., MAZE M., PLANTIVEAU A., PUIGREDO F., VERDIER F. (2014) 5^E COLLECTION TRANSMATH, EDITIONS NATHAN.

BRAULT R., DARO I., FERRERO C., PERBOS-RAIMBOURG C., TELMON C. (2009), MATHEMATIQUES 6^E COLLECTION PHARE, EDITIONS HACHETTE.

BRAULT R., DARO I., FERRERO C., PERBOS-RAIMBOURG C., TELMON C. (2010), MATHEMATIQUES 5^E COLLECTION PHARE, EDITIONS HACHETTE.

BRAULT R.., CIPOLIN M.-C., CUQ S., DARO I., FERRERO C., POUPAS S., RIPAUD B. (2011), MATHEMATIQUES 4^E COLLECTION PHARE, EDITIONS HACHETTE.

BRAULT R.., CIPOLIN M.-C., CUQ S., DARO I., FERRERO C., MARFAING I., RIPAUD B. (2012), MATHEMATIQUES 3^E COLLECTION PHARE, EDITIONS HACHETTE.

BRAULT R., CIPOLIN M.-C., CUQ S., DARO I., FERRERO C.,MARFAING I., RIPAUD B. (2014), MATHEMATIQUES 6^E COLLECTION PHARE, EDITIONS HACHETTE.

BRIAND J., NGONO B., PELITIER M.-L.., VERGNES D. (2009), EUROMATHS CM2, EDITIONS HATIER.

MALAVAL J., COURBON D., CARLOD V., FUNDAKOWSKI M., MAZE M., PLANTIVEAU A., PUIGREDO F., WALLON P. (2010) 5^E COLLECTION TRANSMATH, EDITIONS NATHAN.

MALAVAL J., CHAPUT A., CARLOD V., FUNDAKOWSKI M., MAZE M., PLANTIVEAU A., PUIGREDO F., QUAIRE S., WALLON P. (2011) 4^E COLLECTION TRANSMATH, EDITIONS NATHAN.

MALAVAL J., CARLOD V., ESTEVENS F., FUNDAKOWSKI M., KELLER A., MAZE M., ODOR F., PLANTIVEAU A., PUIGREDO F., WALLON P. (2012) 3^E COLLECTION TRANSMATH, EDITIONS NATHAN.

CHAPIRON G., MANTE M., MULET-MARQUIS R., PEROTIN C. (2009) MATHEMATIQUES 6E COLLECTION TRIANGLE, EDITIONS HATIER.

CHAPIRON G., MANTE M., MULET-MARQUIS R., PEROTIN C. (2010) MATHEMATIQUES 5E COLLECTION TRIANGLE, EDITIONS HATIER.

CHAPIRON G., JAFFARD M., JAFFARD R., MANTE M., MULET-MARQUIS R., PEROTIN C. (2011) MATHEMATIQUES 4E COLLECTION TRIANGLE, EDITIONS HATIER.

CHAPIRON G., JAFFARD M., JAFFARD R., MANTE M., MULET-MARQUIS R., PEROTIN C. (2012) MATHEMATIQUES 3E COLLECTION TRIANGLE, EDITIONS HATIER.

DUSSUC M-P. MADIER D., COMBIER G., CHARNAY R. (2010) MATHEMATIQUES CM2 COLLECTION CAP MATHS, EDITIONS HATIER.

GROS P., REALE-BRUYAT F., FREY-TOURNIER M.L. (2012) OUTILS POUR LES MATHS CE2, EDITIONS MAGNARD.

JACOB N., SITBON I., VISSIO J., XOUAL J. (2010) 5E NOUVEAU PRISME, EDITIONS BELIN.

SESAMATH (2010), LE MANUEL SESAMATH ET SES COMPLEMENTS NUMERIQUES 5E.

SESAMATH (2011), LE MANUEL SESAMATH ET SES COMPLEMENTS NUMERIQUES 5E.

PROGRAMMES ET DOCUMENTS D'ACCOMPAGNEMENT

MEN (2006), Les nombres au collège, Ressources pour les classes de 6e, 5e, 4e et 3e, Direction Générale de l'enseignement scolaire.

MEN (2007), Le calcul numérique au collège, Ressources pour les classes de 6e, 5e, 4e et 3e, Direction Générale de l'enseignement scolaire.

MEN (2007), Grandeurs et mesures au collège, Ressources pour les classes de 6e, 5e, 4e et 3e, Direction Générale de l'enseignement scolaire.

MEN (2008), Programmes du collège : BO spécial n° 6 du 28 août 2008

MEN-CNDP (2012), *Calcul et conceptualisation* (Butlen et Masselot), Le nombre au cycle 3, Apprentissages numériques, Collection « Ressources pour faire la classe ».

ANNEXES

Sommaire

Annexes du chapitre 1

Une pré-expérimentation en cinquième

Au cours de l'année scolaire 2010-2011, nous avons mené une pré-expérimentation dans une classe de 28 élèves de 5e où nous sommes nous-même l'enseignante. Celle-ci concerne deux séquences visant à introduire la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition et à la soustraction, dans le cadre numérique, puis dans le cadre algébrique. Nous l'avons élaborée en cherchant à nous appuyer sur des praxis anciennes de calcul mental, afin de les unifier et de les généraliser dans le cadre numérique, puis dans le cadre algébrique. Il s'agissait à la fois de faire émerger la propriété de distributivité, et d'élaborer un discours à même de soutenir les manipulations algébriques. La séquence envisagée a été modifiée au fur et à mesure des interventions des élèves, ou de leurs questions dont une en particulier a conduit à envisager un Parcours d'Etude et de Recherche comme nous le verrons. L'analyse de cette pré-expérimentation est publiée dans Constantin & Coulange (2012) dont on peut trouver le texte à l'adresse suivante : http://www.icme12.org/upload/UpFile2/TSG/1112.pdf, et dont nous reproduisons un extrait. Nous présentons ensuite deux épisodes de classe complémentaires, ainsi que les conclusions qui ont nourri notre recherche.

IN SEARCH FOR A SPECIFIC ALGEBRAIC TASK DESIGN OR HOW TO ELABORATE A SITUATION HIGHLIGHTING ALGEBRAIC TECHNIQUES IN SECOND GRADE

[…] The distributive law of multiplication is used in primary school in France for mental arithmetic, and that seemed, to a certain extent, a good first material to lead to algebraic techniques.

It was then used in the class before the experiment took place, and raised questions quite soon. Thus, when examining the procedures to calculate $12 \times 13 + 12 \times 7$, 13 year-old Valentin questions the answer given by others : "We calculate $13 + 7$ it makes 20 then, we do 12×20 », "Why don't we do $13 + 7 = 20$ and $12 + 12 = 24$ and 20×24 ?". Without any technological component that justifies it, he can use this wrong procedure or the correct one indifferently. His case is not isolated and shows the co-existence of different procedures in a mathematical organization lacking the logos component. Moreover, writing such an equality as: $12 \times 13 + 12 \times 7=12 \times (13 +7) = 12 \times 20 = 240$ is only seen by students as notes showing the procedure they use. The calculation used is indeed different from the calculation asked, but as it gives the same result, the = sign can be written between the two first expressions. Pupils do not consider here the idea of a transformation which could underlie the writing of the first equality, and then ensure that the calculation really done is equivalent.

Those questions were only raised about factorisation; expansions seemed more "natural" as much more used in primary school. That shows that the two techniques linked to the same technology (the distributive law) do not have the same potential to highlight the rationale of their numeric strategies and thus to emerge from arithmetic calculation for the pupils at this level.

The experiment consisted then in different R&S[65] activities initiated by students with crucial questions they produced, such as : “is addition distributive over multiplication?” or “is multiplication distributive over multiplication” (interesting towards pupils that sometimes calculated $2 \times 3 \times 5$ doing 6×10). Our goal was not only to produce a pattern and a way of expressing the technology of the distributive law, but also to make more sense about the notion, considering that particular law as a property of multiplication. Finding the pattern was of course an enormous difficulty for most of the students, and hard to express by them as by the teacher.

Let’s examine the first R&S activity here: “Is subtraction distributive over multiplication?”.

Students at this time of the year only had been confronted to numeral expressions written to illustrate the distributive law. The clear idea shared by all was that to answer the question, they had to produce two types of calculation, with the same numbers, that should give the same result. But the structure of the expressions had never been elaborated, and proved of course not obvious. They used as a base the equalities written to exemplify the distributive law, earlier in the year : $18{,}1 \times 3 + 18{,}1 \times 6 = 18{,}1 \times 9$ and tried to adapt (crossing the × signs to replace them with -). A pupil writes : $18{,}1\text{-}3 + 18{,}1 - 6$ and compares to $18{,}1 - 9$.

Another one writes $27 : 3 + 27 : 2$ and compares to $27 : 5$. Some wrote the exact same calculations, not seeing that the sentence was ordered.

And a few more offered to compare : $(13 - 5) \times 10$ and $13 \times 10 - 5 \times 10$, exchanging the orders of the factors usually written : $10 \times (13 - 5) = 10 \times 13 - 10 \times 5$.

Those trials show how difficult the analysis of the sentence and of the ostensive linked to the distributive law may be.

When analysed by the class, pupils will be able to say that the sentence refers to multiplications and subtractions, and then easily reject the two first proposals here. But, the third proposition shows indeed a change of the order of the operations, as in the sentence, and the teacher was deprived of any material to explain that this was not the pattern corresponding to the question, but rather to the known distributive law of multiplication over subtraction.

Another pupil offered to replace the signs × by – and *vice versa* in the following example for the distributive law of multiplication over subtraction :

$46 \times 36 - 46 \times 4 = 1472$
and $46 \times 32 = 1472$

But writing then :

$46 - 36 \times 46 - 4$
and $46 - 32$

[65] “R&S activity” ou “Research and Study activity” est une traduction pour Activité d’Etude et de Recherche, qui dans la théorie anthropologique du didactique décrit un certain type d’ingénierie fondé par l’étude d’une question.

shows that the way the example is written hides the priority of multiplication over subtraction and the need of the parenthesis to conform the first expression with the pattern : one should write (46 – 36) × (46 – 4) to compare to 46 – (36 × 4). Moreover, mental calculation being used in the first example to write 32 instead of 36 – 4 is an obstacle when writing 46 – 32.

After several trials produced by the pupils, in order to answer different similar questions about the distributive law, and when the pattern seemed functional, if not exactly worded, the next S&R activity was then dedicated to try to put in words the mathematical knowledge produced until then, regarding to the different questions raised, and regarding to the distributive law: could the pupils find a definition of that law?

The answers showed again that the idea of a transformation of the written calculations did not appear. Here are a few definitions invented for the distributive law :

> "Several different calculations with the same numbers, and which give the same result »
> "Distributive is calculations, several with one common number, and we regroup to make only one calculation to simplify".
> "It's a calculation inside of which the signs can change of place and still give the same result".
> "It's a way to gather several calculations in a simple calculation."

Despite of the studied calculations summed up in front of them, none of the students tried to exhibit a pattern (put in words, or using any sign), and analyse more precisely the "difference" they point out. The idea of producing a simpler calculation is strong, and probably emphasised by the numeral work done before in the class.

This experiment showed that pre-exist procedures using the distributive law, ensured by iterated additions on integers, but raise the question of the justification when the numbers involved no longer are integers but decimals.

The study of the idea of a transformation is to be organized properly: there is a transition to work between the writing of two equivalent procedures and the transformation of a written one into another, and in algebra in particular. The processing operation that is being done then has to be brought to light.

The mathematical activity pursued throughout investigations about the distributive law seemed nevertheless helpful to make the law meaningful. Students were indeed able to formulate that the distributive law is specific to multiplication: "Those calculations taught me that some are distributive to others, but not all (addition, subtraction, multiplication…)" writes for instance one student.

Constantin et Coulange 2012

Une focale sur des episodes de classe

Un premier épisode en calcul mental

Les élèves ont à calculer mentalement la somme suivante écrite au tableau : $12 \times 13 + 12 \times 7$.

Les priorités opératoires ont été vues auparavant, mais la distributivité n'a pas été mise à l'étude. Un élève interrogé explique sa technique ainsi : o*n fait 13 + 7 ça fait 20 puis on fait 12 × 20*. D'autres effectuent le calcul à l'aide des priorités. Valentin utilise implicitement la distributivité aisément en calcul mental. Pourtant, au moment de la correction, il demande pourquoi on ne fait pas *12 + 12 = 24 et 24 × 20 ?* Il semble utiliser en acte indifféremment $ab + ac \longrightarrow (a + a)(b + c)$ ou $ab + ac \longrightarrow a(b + c)$. Il n'est pas le seul. La mise à jour de techniques fondées sur l'emploi implicite de la distributivité au travers des descriptions de programmes de calcul que proposent certains élèves, n'empêche pas la coexistence d'autres programmes de calcul, ou d'autres techniques fondées sur des utilisations d'ostensifs non pertinentes, en l'absence d'une propriété justificatrice.

Lorsque les élèves décrivent leur technique, ils désignent un programme de calcul dans le cadre numérique, qui donne le même résultat que le programme de calcul donné à exécuter. Ils n'éprouvent pas le besoin de passer à l'écrit, ni de transformer les écritures. Devant un certain type de calcul mental, ils proposent deux programmes de calcul qui permettent d'en déterminer le résultat, l'un étant éventuellement plus rapide ou plus aisé que l'autre. Mais les égalités comme $12 \times 13 + 12 \times 7 = 12 \times (13+7)$ que le professeur produit donnent alors un sens particulier à l'égalité : le signe = annonce une technique, c'est-à-dire un programme de calcul différent, qui permet de trouver le résultat. Il ne permet pas de livrer les raisons pour lesquelles il en est bien ainsi, ni celles des gestes à accomplir pour produire cette expression. En un sens, on peut interpréter la question de Valentin ainsi : elle demande une certaine élucidation liée aux ostensifs scripturaux, d'autant que les descriptions sont orales. La dialectique entre équivalence de programme de calcul arithmétique et égalité d'expressions arithmétiques n'incorpore pas l'idée d'un passage, ou d'une transformation d'écriture. Elle ne semble ni préexistante ni aller de soi pour des élèves comme Valentin.

Un second épisode au moment de l'étude de programmes de calcul équivalents

La séquence consacrée à l'introduction du calcul algébrique débute par l'examen de trois programmes de calcul donnés sous forme rhétorique. Deux d'entre eux seulement sont équivalents : le premier décrit par « Doubler, ajouter 3, multiplier par 3, ajouter le nombre de départ » et le troisième dont la description est « Multiplier par 7, ajouter 9. ».

L'exploration numérique par calcul mental, d'abord, et qui se poursuit en recourant à l'usage du tableur, aboutit à la question de l'équivalence des programmes précédents. Lors de la séance suivante, la question à l'étude est écrite ainsi au tableau « Comment prouver ou expliquer que les programmes 1 et 3 sont équivalents, c'est-à-dire qu'ils donnent le même résultat quel que soit le nombre choisi au départ ? ». Un oral collectif s'engage et, après avoir rejeté des propositions de nouveaux tests numériques, trois élèves proposent de travailler sur les formules. Au tableau étaient restées les écritures des formules utilisées sur tableur, écrites pour la correction du travail effectué en salle informatique. Les élèves se réfèrent donc aux écritures *=(A2*2+3)*3+A2* et *=A2*7+9*. L'un d'eux propose de « décomposer les nombres d'un programme pour enlever les parenthèses », un deuxième élève propose d'enlever les parenthèses. Un troisième propose d'associer des nombres comme 3 × 3. Lorsque le professeur engage la classe à chercher à produire une formule d'un programme de calcul équivalent intermédiaire en fait, en reprenant les termes des élèves, peu d'élèves s'engagent dans la tâche. Puis, après l'examen collectif de la formule proposée par l'un *= A2*2 + 3*3 +A2*, et l'évaluation pour en montrer la non-équivalence, aucune des formules proposées ne conviendra, avec des propositions « à l'aveuglette » dit Coline. La séance entière sera consacrée à des transformations erronées proposées çà et là dans la classe, et que la dénotation permettra de rejeter. Les élèves effectuent des tests à partir de valeurs numériques avant de passer à la proposition d'écriture suivante. Le symbolisme usant les notations du tableur est un obstacle considérable, tout comme le fait, certainement, d'avoir choisi un premier programme qui ne soit pas réduit à une somme de produit (l'ajout du nombre de départ, ne permet pas de « deviner » aisément le lien entre 7 et 2 et 3 d'autant que le facteur 1 est manquant dans l'écriture). Quoi qu'il en soit l'invention des gestes idoines n'aura pas lieu. Ce que cet épisode montre, c'est un passage qui ne va pas de soi, entre l'écriture d'une égalité entre deux expressions algébriques - traduisant l'équivalence de deux programmes de calculs - produites indépendamment de « règles » de calcul algébrique, et l'écriture d'une nouvelle expression égale à une expression donnée en inventant des manipulations. Autrement dit, le passage entre équivalence et l'idée de calcul sur les expressions peut ne pas s'avérer transparent.

Nous interprétons ce phénomène comme une absence de praxème, au vu de la difficulté à le construire pour le type de tâche T_4 de production de l'expression d'un programme de calcul équivalent. Elle sera encore prégnante après un passage aux écritures canoniques fait par le professeur, lors de la séance suivante. Le professeur espère ainsi lever l'obstacle de l'écriture utilisant les ostensifs du tableur, et rendre plus aisée l'émergence de la transformation idoine.

Mais la chose n'aura pas davantage lieu, le professeur livre alors l'égalité en demandant d'en trouver un moyen de la produire, mais les descriptions orales témoignent encore de l'absence de ce praxème : les élèves n'emploient pas de verbe d'action ni ne font le lien entre les membres de l'égalité.

Un troisième épisode lié à la production d'une expression égale à une expression donnée

La praxéologie qui se construit dans cette classe pour produire une expression d'un programme de calcul équivalent va reposer sur la seule théorie dont disposent les élèves : celle de la dénotation.

Les élèves ont à produire une expression égale à $(n\times4 + 5)\times2$. L'un d'entre eux explicite : il remplace n par 5, ce qui donne 50. Or, il sait que 50 c'est 5 fois 10. Donc cela correspond $10\times n$ pour $n = 5$. Il propose donc l'égalité $(n\times4 + 5)\times2 = 10\times n$. Bien sûr, le contrôle par les autres élèves conduira à invalider la technique. Mais cela ne donnera pas davantage accès aux gestes idoines, du calcul algébrique

La technique afférente à T_4 qui émerge alors pour trouver un programme Q équivalent à P dans la classe est la suivante :

τ_4 : Choisir un nombre entier n_0, calculer P(n_0), puis à partir de connaissances numériques sur les tables (d'addition ou de multiplication) décomposer le résultat pour faire apparaître n_0 dans l'écriture et permettre l'écriture d'une expression pour Q tel que Q(n_0) = P(n_0) en « remplaçant » n_0 par n.

Cet épisode n'est pas isolé. Les écritures des signes × font certainement obstacle, mais plus encore l'absence de praxème pour produire une égalité. On y voit les limites de la dénotation qui ne permet pas de donner accès à une transformation de mouvement. Le système modélisé ne sert pas davantage à la création d'un calcul sur les programmes de calcul, ce qui explique sans doute les difficultés des élèves à penser la consigne, parce qu'ils n'ont pas de moyen de contrôle de leur action sur les formules autre qu'une vérification *a posteriori*. Ceci explique aussi probablement la production de formules anarchiques en quelque sorte observée en classe.

Annexes des chapitres 2 et 4

Transcriptions des entretiens avec quatre enseignants de mathématiques au collège

ENTRETIEN AVEC JEROME

Le 1er juin 2012

CHER : Chercheur

JERO : Jérôme, enseignant en collège

CHER : alors/ le thème sur lequel je travaille c'est le thème du calcul littéral/ de la distributivité plus précisément/ du développement et de la factorisation/ et pour commencer/ je voudrais que tu puisses me raconter comment est-ce que tu introduis la distributivité en 5e/ quelles activités tu fais faire et euh / quel est ton enchaînement de#

JERO : alors comme activité ce que je leur fais faire/ il faut que je la retrouve/ mais c'est que je leur donne un calcul à faire séparément/ tu sais que ça fait toujours le même nombre/ genre je sais pas je fais

CHER : montre moi un exemple

JERO : 3 fois 2 plus 3 fois 5 et vous me calculez ça et vous calculez 3 fois 2 plus 5 voilà

CHER : d'accord

JERO : j'en fais plusieurs comme ça je dis vous pouvez continuer/ après je fais pareil avec le moins/ donc ça fait pareil

CHER : d'accord tu fais un tas de calculs comme ça/ avec des entiers/ ou tu mets des nombres décimaux ?

JERO : euh non non au début je fais que des entiers

CHER : d'accord

JERO : après je leur demande est-ce que vous pouvez généraliser/ à votre avis/ est-ce que ça marche pour tous les nombres ? vu que je l'ai fait en début d'année en fait/ donc j'ai pas trop vu les nombres relatifs encore/ donc je fais que des entiers euh / naturels/ et je leur demande si ça marche pour tout/ et généralement/ ben ils disent oui/ ça doit marcher/ je leur dis est-ce que ça marche pour les fractions ? et généralement ça marche/ enfin=

CHER : c'est-à-dire que tu leurs fais une liste de calculs dans laquelle y a des fractions aussi ?

JERO : non je leur dis après/ d'abord sur les entiers pour que les calculs soient simples

CHER : d'abord sur les entiers d'accord/ et?

JERO : après je leur demande est-ce que ça marcherait pour des fractions/ ou pour des nombres plus compliqués

CHER : mh

JERO : je leur pose à l'oral et euh après ils me disent oui

CHER : et est-ce qu'ils explicitent plus ce qui marche ?

JERO : c'est-à-dire ?

CHER : comment tu /euh / en fait /tu demandes/ tu leur fais constater/ qu'est-ce que tu leur demandes de constater ?

JERO : ben euh ça 3 fois 2 plus 3 fois 5 et 3 fois entre parenthèse 2 plus 5/ ben ils vont me dire que c'est égal/ à chaque fois j'ai deux couples/ avec le plus et la distributivité/ ils vont me dire ah ben c'est égal/ donc je leur dis si vous remplacez par des nombres quelconques/ est-ce que ça marche/ et je le fais par contre/j'essaye de voir euh si je change si je mets 7 et 7 là ils vont me dire/ oh ben ça marche pas (*Il modifie l'écriture :* $\begin{pmatrix} 3\times 2+7\times 5 \\ 3\times(2+5) \end{pmatrix.$ *et montre le 3 de la 2^e ligne)*

CHER : tu mets aussi des contre exemples dans ta liste ?

JERO : ça m'est arrivé/ mais ça j'avais pas fait/ faudra que je le fasse l'année prochaine/ parce que je l'avais pas fait sur l'activité/ j'avais oublié/ je l'ai fait à l'oral/ j'ai dit si vous mettez 7 par exemple ou euh/ et voir que ça marche pas

CHER : et qu'est-ce qu'ils te disent pour dire que ça marche pas ?

JERO : enfin ben je leur dis ben faîtes le calcul là par exemple : $\left(\begin{matrix} 3\times 2+7\times 5 \\ 3\times(2+5) \end{matrix}\right.$ *(il montre la première ligne*) et je leur demande là qu'est-ce que vous mettriez (*il montre le facteur de gauche de la deuxième ligne)* y en a ils essayent 3/ 7 ou avec 5 et ils voient que ça fait pas le même résultat/ et je leur dis ben vous voyez/ il faut qu'il y ait le même nombre qui revient en fait. Après c'est vrai que c'est pas évident de //parce que y en a que pour eux ça marche/ je vois des élèves qui seront bien plus brillants que je le serai jamais donc euh / ils voient de suite/ euh / ça se voit surtout quand on fait de la géométrie par exemple/ je trouve qu'on voit mieux les maths que les calculs/ et puis y en a ben euh au bout de/ je sais pas /même en 3^e je pense qu'ils auront pas bien vu la euh

CHER : et donc ils te disent pour la généralisation/ euh / comment tu l'écris la généralisation ?

JERO : et ben bon bé c'est là que le problème/ je fais peut être un peu trop cour magistral/ c'est-à-dire je leur fais bon ben/ je leur dis vous voyez bien que ça va marcher pour n'importe quel nombre donc on a la liste de calculs/ donc je fais les mathématiciens comme ils sont un peu fainéants/ et comme ils y a une infinité de nombres/ on va pas tout écrire/ donc on va leur donner un nom/ on va leur donner une lettre/ donc je leur dis ben là par exemple on va l'appeler j'ai repris les notations traditionnelles/ *k* fois *a* plus *b* ça j'ai pas changé

CHER : d'accord/ et c'est toi qui l'introduis et donc tu dis donc tu fais la généralisation avec les lettres/ et tu écris *k* fois *a* plus *b*

JERO : égal *k* fois *a* plus *k* fois *b* et je leur dis vous voyez le même nombre il revient et je le refais dans le cours avec un exemple

CHER : c'est-à-dire que tu reprends les exemples pour écrire la distributivité ?

JERO : ben là je leur dis la distributivité c'est ça/ on dit *k a* et *b* c'est des nombres ça peut être n'importe quoi

CHER : ouais

JERO : avec le moins aussi et après je leur donne des exemples ben regardez si je prends *k* c'est 5 et *a* je prends 3

CHER : d'accord et après ils doivent écrire l'égalité ?

JERO : voilà et après on l'écrit dans le cours/ et ça en fait/ je fais qu'avec des nombres entiers en début d'année et après en exo je fais une ou deux fractions et là j'ai commencé le calcul littéral et c'est là que je leur fais /ben regardez à quoi ça sert la distributivité/ ben/ on fait pour factoriser quoi

CHER : d'accord/ euh / c'est toute ton activité d'introduction/ tu fais le cours/ le exercices/ d'accord/ et alors quels avantages tu vois de commencer par euh / ben tout ce calcul sur les nombres ?

JERO : euh / disons que sur le coup de le voir en avance/ c'est juste un préambule pour le calcul littéral avec des lettres vraiment/ parce que c'est vrai que quand on fait comme ça j'ai pas trop /euh ils disent ben ça sert à quoi de l'écrire comme ça ? je leur dis ben vous verrez ce sera utile pour plus tard mais c'est vrai que la pratique dans des exercices ou des problèmes j'ai pas trouvé à quoi ça sert/ fin c'est plutôt avec le calcul littéral avec une lettre pour résoudre une équation après ou quelque chose comme ça mais sur le coup c'est juste pour préparer tu vois le calcul qu'on va avoir le même résultat mais écrit différemment mais c'est vrai que sur le coup ils me disent ben oui ça s'écrit comme ça /mais quel intérêt/ et je leur dis vous verrez plus tard/ j'ai pas trouvé le moyen/ je leur dis ça servira après c'est une technique///mais bon ça fait que 2 ans que je le fais quoi/ mais déjà j'ai pu pousser plus loin que l'année dernière/ autant ici l'année dernière j'avais une bonne classe/ mais je suis pas allé aussi loin avec la distributivité avec les lettres/ j'en ai pas fait beaucoup/ là j'ai fait euh / développer/ réduire/ j'ai fait plein d'exercices quoi/ écrire en fonction de *x*/ j'ai pu // et donc après redévelopper/ écrire différemment

CHER : et du coup tu réutilises ces calculs sur les nombres au moment où tu passes à la distributivité ?

JERO : oui

CHER : comment?

JERO : voilà j'ai fait ça

Activité :
1) *Ecrire sous forme d'une somme le produit :* $2 \times (x+1)$
2) *Ecrire sous forme d'un produit la somme :* $3 \times x + 3$
3) *Peut-on écrire plus simplement :* $x \times 3 + x \times 2$ *?*

(*Photocopie reproduite*)

CHER : ça c'est l'activité de ?

JERO : c'est la deuxième activité du calcul littéral pour introduire la factorisation/ et le développement

CHER : et ta première activité ?

JERO : donc là c'était juste après faudra que je change l'année prochaine/ je sais pas si elle est terrible/ je leur fais donc dans une entreprise on fabrique des chocolats tu vois/ donc en 1 euh re on fait une expression de calcul et de dire ben à votre avis on peut le faire en 3 euh res/ et tous/ en fait je leur dis pour un nombre quelconque de chocolats/ est-ce qu'on peut faire ? et ils me disent ben on fait 10 fois le nombre de chocolats/ donc je leur dis ben par exemple bon là je leur ai dit ben on peut désigner le nombre de chocolats par une lettre/ ben en maths vous voyez bien ça va marcher tout le temps/ on fait 10 euh res/ 30 euh res/ ça va marcher pareil/ donc comme on va pas faire le calcul pour n'importe quelle euh re/ on peut donner une lettre le nombre/ mais après j'sais pas si on peut introduire mieux que ça

CHER : et donc ça c'est la deuxième activité/ donc/ pour la distributivité en algèbre et du coup tu me disais que tu réutilisais ce que tu avais fait avant euh /est-ce que avant tu as déjà travaillé ce genre d'énoncé/ écrire sous forme d'une somme le produit ou pas du tout ?

JERO : euh

CHER : ou est-ce que c'est à ce moment là que ça arrive ?

JERO : attends que j'y réfléchisse/ ben en fait euh /c'est là que ça arrive/ mais je leur dis on peut/ donc y en a qui se demandent comment il faut faire/ ben je leur dis c'est là que je leur dis qu'on l'a fait avant/ parce que la distributivité j'ai fait assez tôt dans l'année j'essaye dans des exercices d'en remettre/ « écrivez différemment » donc voyez la distributivité/ parce que y en a qui vont trouver de suite/ mais la majorité non quand même/ je leur ai dit la distributivité vous vous rappelez comment on a fait on mettait avec la parenthèse comme ça et on distribuait le 2 / ben vous pouvez faire avec 5 par exemple à la place du x mais pour n'importe quel nombre/ donc y en a ils ont trouvé après/ mais=

CHER : et euh / donc/ le 2e c'est une factorisation

JERO : voilà/ qu'ils fassent par 3 et là voilà/ là c'était pour réduire justement/ la distributivité en fait quand on a $3x$ plus $2x$ pour réduire on a juste besoin d'ajouter les coefficients qui sont devant le x

CHER : donc là pour ça tu utilises la distributivité pour prouver que c'est $5x$

JERO : voilà /donc après dans le cour par contre après je dis vous voyez en fait c'est la distributivité/ mais en pratique vous ajoutez ou vous soustrayez les coefficients devant la lettre/ et la même lettre/ parce que j'ai fait un exemple $3x$ plus $2y$ et vous voyez x et y on leur donne deux noms différents/ c'est que c'est pas le même nombre et je leur dis et donc au début y en a plein qui m'ont fait ben ça fait euh $6xy$ et je leur dis non non /ça marche pas /et je leur montre xy ça veut dire x fois y et on prend avec des nombres concrets/ je prends x telle valeur/ et pour y telle valeur et ils voient que de faire par exemple 6 fois x c'est pas euh //on peut laisser que $3x$ plus $2y$ ///

bon c'est pas évident/ mais je sais qu'on y revient en 4e après

CHER : oui et justement quelles difficultés d'enseignement tu vois en 5e dans ce thème ? d'abord et puis après en 4e

JERO : ben disons que d'abord des 4e j'en ai jamais eu donc euh

CHER : donc en 5e ?

JERO : ben disons que je trouve que le problème qu'on a au collège c'est qu'on a des classes très hétérogènes/ donc j'ai des élèves je sais déjà qu'ils sont plus brillants que moi je sais déjà qu'ils comprennent très très vite et donc pour eux c'est très naturel/ et des élèves qui passeront jamais le stade de l'abstraction/ le x pour eux ça représente rien et même leur dire/ fin ou alors c'est moi j'arrive pas à leur expliquer mieux mais fin moi c'est comme je le vois dans ma tête/ c'est comme je le comprends/ x c'est juste que ça représente n'importe quel nombre mais vous pouvez le faire/ mais pour eux c'est //mais bon après y a toujours la sempiternelle question c'est ça sert à quoi de mettre une lettre ?

CHER : ouais

JERO : fin/ ça c'est vrai y a des élèves ça je pense ça passe pas quoi et même en 3e toujours pas

CHER : et donc/ à part ce que représente la lettre/ plus au niveau de la technique de calcul qu'est-ce qui passe mal pour toi ? fin pour eux plus exactement

JERO : ben alors y avait le problème des notations au début/ j'ai essayé quand vous écrivez 8 fois *x* je dis bon pour éviter des lourdeurs on écrit 8*x* mais bon y en a qui ont encore du mal/ ils me font 8 plus donc déjà y a ça donc j'essaye de bien faire passez au début de dire bon ben vous faîtes 8*x* ça veut bien dire 8 fois *x* et donc quand j'introduis le calcul littéral/ je dis alors qu'est-ce que ça veut dire ça à chaque fois je leur fais répéter/ bon/ l'année dernière je sais que je l'avais pas fait

CHER : mh

JERO : j'avais pas eu trop le temps je m'étais moins attardé/ parce que ils ont pas retenu grand-chose je pense/ ils ont retenu la formule de la distributivité mais pas le calcul littéral alors que là j'ai beaucoup plus poussé quand même/ parce que j'avais une classe vraiment avec un très bon noyau et euh / j'ai une autre classe de 5^e^ où ils sont beaucoup plus faibles et pas du tout travailleurs/ et mais ça passe quand même pas mal/ j'ai euh / ben c'est de la répétition en fait/ beaucoup d'exercices/ technique après pour ceux qui vont très vite/ j'essaye de faire écrire en fonction de *x* où il faut se poser des questions sur euh ils utilisent aussi les propriétés du parallélogramme / du rectangle et tout mais euh ça c'est vraiment pour les très bons/ c'est un tiers de mes classes qui arrive à utiliser vraiment/ et qui arrivent à utiliser des concepts/ de géométrie en plus qu'il faut utiliser/ voilà les diagonales d'un rectangle sont égales// les longueurs/ leur faire penser à ça déjà même avec les nombres sans calcul littéral déjà c'est les bons qui y arrivent donc en plus les *x*/ mais moi j'ai des élèves ça ils le font en 2 secondes/ et même sans parler d'algèbre euh abstrait ils y arrivent pas/ donc euh /c'est difficile à gérer

CHER : ouais l'hétérogénéité

JERO : donc c'est vrai que bien faire quand même /même si ça fait très mécanique/ en mettre dans les contrôles/ des choses mécaniques pour celui qui fera jamais des maths à un très haut niveau et qui fera même pas une 2^nde^ générale/ avec du travail il arrive quand même à faire des questions/ genre réduire/ qu'il arrive à voir qu'on réduit qu'avec les mêmes lettres/ au début/ j'en ai fait tu vois par exemple $x + 3x + 4x$ y'en au début ils m'ont dit ben ça fait euh $7x$ et je leur fais mais là (*montre x le premier terme)* ben ils me disent y a pas de nombre/ mais je dis ben si c'est comme s'il y avait 1 fois *x* donc après ça maintenant/ j'ai refais et même les faibles ils pensent à me mettre bon ben ça fait 1 plus 3 plus 4 donc ça fait 8 voilà// mais euh /

ou alors par exemple ça / $x+ 3 = 3x$ y'en a ils me disent ça fait 3*x* mais je dis ben non/ je leur donne un exemple avec *x*/ 4 par exemple et je fais ben si tu fais 4/ 4 plus 3 ça fait 7 et 3 fois 4 ça fait/ ah ben/ oui ça fait 12/ donc je dis ça *x* plus 3 tu peux pas/ donc tu laisses/ parce que tu sais pas combien ça fait et c'est vrai que c'est vraiment pas évident

CHER : ouais/ ben justement j'allais te demander des types d'erreurs que tu vois dans tes classes/ donc t'as ça/ et t'en vois d'autres des erreurs sur la distributivité ?

JERO : euh

CHER : autre que sur la réduction je veux dire

JERO : euh / sur la distributivité/ euh ben voilà/ classique/ c'est ils vont/ ils pensent à la première distribution/ et là par exemple si t'as 3 fois entre parenthèse *x* plus 1 ils vont faire 3 fois *x* et plus 1 ils vont oublier le 3

CHER : ouais

JERO : je fais non/ en fait il faut faire ça (*il dessine les flèches*)/ ils font /ah oui/

CHER : et donc tu utilises les flèches pour euh / les corriger et tu leur fais faire le calcul là aussi ? je veux dire avec des valeurs ?

JERO : ouais/ j'aime bien mettre des valeurs/ pour ceux qui ont du mal avec la lettre/ ce que ça représente/ parce que c'est vrai que parce que moi je sais j'ai des élèves qui sont vraiment/ moi qui m'impressionnent/ ils voient de suite/ et y'en a ben des trucs qui savent toujours pas faire même des trucs de 6^{e} hein

CHER : ouais ouais/ c'est difficile!

JERO : c'est vrai que le calcul littéral c'est pff

CHER : ouais l'algèbre c'est sûr que c'est un problème / c'est une grosse question/ et du coup#

JERO : pour balancer/ pour pas qu'ils s'ennuient les très bons/ et les autres ce qui ont vraiment du mal pour pas les perdre/ parce que bon/ c'est une souffrance pour eux / moi je sais ce qu'ils ressentent parce que moi j'étais pas très doué/ au collège en maths/ et pff/ c'est vrai que c'est pas évident

CHER : et du coup t'as pas de 4^{e} mais t'as quand même des 3^{e}/ comment est-ce que tu utilises ce qu'ils savent de la 5^{e} ou de la 4^{e} en 3^{e} ? pour travailler le calcul littéral de 3^{e} ?

JERO : ben je leur rappelle la distributivité/ la formule

CHER : alors laquelle ?

JERO : celle là *k*/ *a* plus *b*/ je remets les deux

CHER : tu remets les deux

JERO : ouais/ je leur dis après le moins/ après pour les nombres relatifs/ ben je leur dis ça marche pareil mais bon/ c'est vrai que comme ça fait que 2 ans que j'ai des 3^{e}/ mais c'est vrai que y a le dilemme entre dire tu veux vraiment leur apprendre et te dire bon y a quand même un programme à faire/ y a un examen/ c'est le premier de leur vie/ même si maintenant on a quand même un peu dévalorisé le brevet/ enfin je sais pas si ça #

CHER : et ton dilemh e c'est sur ces…. c'est sur ces formules ?

JERO : ben non c'est pff

CHER : sur les signes tu me disais ?

JERO : pour factoriser ils ont beaucoup de mal/ si tu veux/ si t'as *x* plus 1 facteur de *x*+2 plus euh *x*+1 facteur de *x*+3/ ils ont du mal à voir que ça c'est le même nombre (il entoure *x*+1) et qu'on peut utiliser la distributivité que c'est le *k* tu vois et que ça c'est le *a* et ça c'est le *b*

CHER : et pourquoi à ton avis ?

JERO : mais je pense ça vient vraiment de la représentation/ que pour eux/ c'est pas un nombre/ c'est pas comme avec 2 fois 3 comme ils faisaient au début/ plus 2 fois 4/ ils vont arriver même les assez faibles ils vont me dire ben c'est 2 plus/ euh / mais dès qu'il y a les *x* fin

CHER : ouais

JERO : dès qu'on passe /je sais pas /est-ce que c'est psychologique de se dire ben la réputation des mathématiques/ y a aussi l'inconscient collectif ou la légende urbaine un peu/ euh d'élèves qui me disent/ oh mais y a un *x* ça veut dire quoi ça euh

CHER : ouais

JERO : en 3^e^ moi j'ai une élève qui me dis/ oh ben moi je fais plus rien depuis la 5^e^/ c'est vrai qu'elle sait même pas calculer un pourcentage

CHER : et donc tu reprends ces deux formules là en 3^e^ et comment tu passes/fin est-ce que tu les utilises autrement que pour factoriser ?

JERO :

CHER : à d'autres occasions ?

JERO : euh // ben disons que je fais pour factoriser/ j'essaye de le faire tôt dans l'année ça pour y revenir par exemple quand je fais la notion de fonction/ par exemple quand je fais *f* de *x* donc on fait la représentation graphique et aussi avec les fonctions pour trouver les antécédents/ pour les équations produits après/ pour trouver tu sais quand c'est égal à zéro ben on va factoriser comme ça on aura une équation produit// et on peut trouver les antécédents

CHER : mh

JERO : je m'en sers pour ça mais euh pff/ globalement pour ça/ parce que je sais que ça on s'est sert beaucoup en 2^nde^ après quoi parce que c'est les 2 tiers du programme et même là ça m’est arrivé de donner des cours non rémunérés/ à un élève qui est en TES et ils font beaucoup euh le bas c’est du bachotage / et #

CHER : y a pas mal de technique

JERO : c’est que ça et puis même très très faible parce que y a beaucoup de lectures/ maintenant/ il a baissé le niveau parce que moi je sais bon les élèves que j’avais en 2nde/ qui sont en terminale cette année/ ben vu qu’ils étaient y en avait qui étaient très bons/ les lectures graphiques/ je veux dire/ bon/ ça posait pas de problème/ après y a une étude de fonction/ fin/ je dis fin c’est vraiment très pauvre je trouve

CHER : ah oui/ bon/ O.K. euh / alors maintenant/ je vais te montrer des erreurs d’élèves/ pour les premières erreurs que je vais te montrer/ ce sont des élèves qui sont en 5e/ et donc qui ont commencé la distributivité mais je voudrais que tu/ /comment tu les corrigerais/ alors je donne un bout de papier/ alors la première erreur d’élève c’est pour le calcul 12 × 13 + 12 × 7/ donc y a des élèves qui disent très bien ben on fait 13 plu 7 et puis on multiplie le résultat par 12 et d’autres élèves qui disent 12 et 12/ 24 et 24 fois 20.

JERO : 12 et 12/ 24 et ah d’accord/ ils ajoutent euh / O.K./ ah d’accord

CHER : mh / alors comment tu t’y prendrais pour les corriger/ comment tu t’y prendrais ?

JERO : alors c’est la première fois que je la vois cette faute

CHER : ah

JERO : mh // bon ben moi comment je corrigerais/ parce qu’en début d’année/ le premier truc je pense que fin/ l’année dernière j’en ai discuté avec mes collègues et par quoi on commence/ c’est les règles des calculs/ qu’est-ce qui est prioritaire/ donc je leur dis/ euh donc/ faîtes votre calcul vous me dites on fait 24 fois 20/ donc je leur dis faîtes votre calcul/ donc ils font leur calcul/ et je dis sinon/ revenez à ce que vous connaissez/ les règles de calcul/ ça je les fais bien répéter donc à chaque fois/ donc qu’est-ce qui est prioritaire/ la multiplication ou l’addition/ donc si ils ont bien travaillé/ ils disent c’est la multiplication/ donc je dis ben 12 fois 13 même si vous voulez vérifier/ prenez votre calculette/ plus 12 fois 7 et alors est-ce que vous trouvez le même résultat que là ? ben ils disent/ à ben non/ je leur dis/ non donc là je peux repartir sur la distributivité

CHER : ouais

JERO : donc là je vais leur dire/ le nombre qui revient/ ben normalement ils vont me dire 12/ après je sais pas si c’est bien à faire je leur dis donc ben la formule/ vous mettez 12 d’abord parce que c’est le nombre qui revient/ après vous faîtes/ vous ouvrez votre parenthèse après qu’est-ce qu’il y a ? je leur dis toujours qu’est-ce qu’il y a collé à 12 ? donc ils vont me dire 13 je dis vous continuez votre lecture/ il faut pas oublier le// euh // le // le signe/ donc/ plus ben et après qu’est-ce qu’il y a ? 7/ et voilà

CHER : d'accord

JERO : et là on peut même dire ben vous voyez/ le 12 faut pas les ajouter/ mais le truc pour l'erreur moi je leur dirais voilà en premier qu'est-ce qui est prioritaire dans un calcul la multiplication donc on fait d'abord la multiplication et après on ajoute.

CHER : O.K./ donc une autre erreur encore/ c'est toujours en 5e/

JERO : mais celle-là j'ai jamais vu !

CHER : ah ouais/ c'est des élèves de l'année dernière et cette année ils me font cette erreur aussi !

JERO : ah ouais

CHER : euh / certains

JERO : oui oui pas tous !

CHER : voilà donc y en a qui pour 2 fois 3 fois 5 font euh 6 fois 10

JERO : quoi ?

CHER : voilà comment tu corrigerais

JERO : ah ouais/ c'est vrai que je l'ai pas fait ça *[rires]* non c'est vrai/ mais c'est vrai que je m'y suis pas penché sur ce problème / je sais pas c'est tellement évident

CHER : et ouais

JERO : et que dans le problème/ et ouais je me suis jamais posé la question/ pour moi c'est vrai que c'est une erreur ouais

CHER : alors qu'est-ce que tu dirais ? comme ça ? à un élève qui te dis ça / pourquoi on fait pas 6 fois 10 ?

JERO : euh oui c'est vrai que la priorité/ je leur dis ben vous faîtes une fois/ mais c'est vrai que // une fois qu'il est calculé/ pourquoi vous voulez/ euh oui c'est vrai que la distributivité marche pas// c'est vrai que ça j'y ai pas pensé tu vois/ ce sera à creuser pour l'année prochaine // non c'est vrai parce que je pense plus à ça mais ça j'ai pas// euh

CHER : donc tu leur dirais que la distributivité elle est pas là ?

JERO : ben là c'est l'associativité mais je leur en parle pas/ euh / c'est vrai que // fin je dis vous faîtes votre premier calcul et 2 fois 3 et vous continuez le résultat fois 5/ mais c'est vrai que // c'est vrai que je vois pas/ c'est vrai je me suis jamais posé la question là /c'est grave hein ?

CHER : non c'est que t'as pas rencontré l'erreur/ le jour où tu la rencontres/ tu te poses la question

JERO : non mais c'est vrai

CHER : mh / encore une alors celle là te paraîtra peut être plus classique/ ah ben je crois que c'est celle euh c'est un élève qui écrit $4 \times (x+3) = 12 + x$

JERO : 12 plus x donc il a pensé/ ben c'est un peu le même principe que je t'ai dit tout à l'heure

CHER : ouais c'est ça

JERO : ouais/ sauf que là y a une lettre

CHER : et en plus tu m'as déjà dit comment tu corrigerais toi?

JERO : ben oui je dis tu refais la distributivité/ au pire au début je reprends un nombre/ je dis ben x pour l'instant il te fais peur/ ben prends 5 et comment tu vas faire/ alors tu distribues alors ça fait 4 fois 5 plus 4 fois 3 donc je suis bien d'accord que là ça fait plus 12 que là tu fais fois 4 tu l'as bien multiplié ton 5 par 4 donc là ton x ça peut être qu'un nombre donc 5/ et il faut pas oublier de le multiplier par 4

CHER : ah oui là en remplaçant par la lettre tu reviens à l'écriture de la distributivité sans faire le calcul ?

JERO : ouais

CHER : tu refais pas le calcul à droite et à gauche ?

JERO : ouais je préfère revenir avec un nombre pour écrire/ pour ceux qui aiment pas les lettres/ c'est un nombre mais ça peut en représenter tellement/ y en a une infinité/ donc tous les nombres possibles/ mais tu vois que si tu sais faire avec 5 tu peux le faire avec 10 avec pi si tu veux/ donc tu peux faire avec euh / le calcul va marcher/ donc tu vas appeler ton nombre/ lui donner un nom

CHER : ouais alors encore une $2x$ multiplié par $5x$ les élèves qui écrivent $10x$

JERO : alors ça si tu veux/ donc ils oublient le carré/ justement les puissances c'est plus au niveau de 4^e^/ moi y en a qui l'ont vu parce qu'ils ont des grands frères/ qui leur en parlent/ donc comme ils voulaient/ ils m'ont demandé/ parce que y en a qui vraiment/ sont assez curieux/ donc je leur ai parlé des puissances/ mais je leur ai pas fait un cours/ je leur ai dit les puissances c'est juste une notation donc au lieu d'écrire 3 fois 3 parce que c'est lourd/ on va l'écrire 3 au carré/ on dit 3 puissance 2 et pareil 3 puissance 4 c'est 3 fois 3 fois 3 fois 3/ 4 fois/ et donc j'ai fait plein de petits exemples comme ça visiblement ils avaient bien compris même les faibles/ qui m'ont demandé/ bon j'ai eu la faut 2 puissance 3 c'est 2 fois 3 ah non/ alors je leur fais calculer 2 fois 2 fois 2 ça fait 8 et 2 fois 3 ça fait combien/ ah ben ça fait 6/ donc est-ce que 8 c'est égal à 6/ ah ben non/ donc tu vois c'est pas la même chose/ donc/ là ça j'en ai pas fait beaucoup avec x^2

CHER : ouais/ ceci dit on peut se situer en 3e aussi/ en 3e comment tu corriges ça ?

JERO : on fait /c'est vrai que c'est là l'associativité peut être faudrait la faire en 6e tu vois l'erreur/ ou alors en début de 5e quand je fais les règles de calcul/ je devrais le faire l'associativité

2 fois 3 fois 5 que tu vas pas le compter/ que c'est pas distributif

CHER : oui mais là c'est pas une erreur de distributivité ?

JERO : oui non oui d'accord/ je leur dis bon vous associez/ vous faîtes 2 fois 5 mais après x il faut bien faire x fois x/ là vous l'ajoutez pas/ je leur dirais vous faîtes $2x + 5x$ là vous allez ajouter

CHER : ah oui mais remarque/ ah oui/c'est fort/ j'y avais pas pensé

JERO : donc je leur dis/ là vous pensez bien à multiplier 2 fois 5 / là vous multipliez mais#

CHER : t'as raison/ est-ce qu'on peut interpréter ça comme une fausse distributivité/ ben ouais on peut quand même/ c'est comme si t'avais un facteur commun et que tu faisais le produit des euh / c'est une espèce de factorisation avec la multiplication c'est ça ?

JERO : ouais

CHER : c'est vrai/ c'est marrant/ j'avais jamais pensé ça comme ça

JERO : même en 3e je leur re-re-dis/ je leur dis 2x c'est une notation/ pour dire qu'on fait deux fois le nombre x

CHER : ouais donc là tu ré-écris les signes ×

JERO : donc ça fait 10 mais là y a toujours fois x et fois x mais x fois x en supposant qu'ils l'ont bien vu qu'ils ont été sérieux

CHER : oui oui bien sûr /bien sûr

JERO : x fois x ça fait combien c'est x au carré

CHER : d'accord/ euh /

JERO : et à la limite/ c'est vrai qu'en 3e c'est peut être l'erreur que je fais/ parce que là ça vaut le coup aussi je pense /de prendre x qui vaut 3 et de faire le calcul et de voir que ça marche pas/ mais c'est vrai que en 3e j'ai tendance à me dire c'est vrai que ça fait 2 ans qu'ils le font/ mais c'est vrai que non hein/ ça fait deux ans/ euh moi j'ai une élève qui m'a dit oh mais moi ça fait depuis la 5e je fais rien en maths hein/

CHER : alors une plus euh : $4 \times x + 4 \times 3 = 4 \times (x+3) \times 4$

JERO : ah /je l'ai pas vue celle là

CHER : c'est des erreurs de mes élèves cette année

JERO : je leur dirais ben / refais avec un nombre/ j'aime bien parce que j'ai l'impression de revenir à chaque fois au nombre pour raccrocher ceux qui se disent/ mais qu'es-ce que ça fait là encore ce machin cette lettre/ on n'est pas en français/ donc je leur dirais/ tu prends un nombre

CHER : alors/ question/ mais tu travailles énormément sur cette reprise de nombre/ mais est-ce que tu leur demandes individuellement de le faire pour vérifier/ ou est-ce que ça apparaît finalement que quand t'es au tableau ?

JERO : je leur dis toujours de travailler avec un brouillon/ ou alors prenez votre crayon à papier/ et je leur dis vérifiez toujours pour un petit nombre/ à part/ je te dis dans cette classe ils me font jamais d'erreur quasiment

CHER : et ils le font quand même la vérification ?

JERO : non

CHER : et les autres/ ils le font un peu les vérifications ?

JERO : pas tous

CHER : mais ils font quand même certains ?

JERO : rarement

CHER : donc finalement c'est des vérifications collectives au tableau quand ça apparaît ?

JERO : ben c'est vrai que pour moi j'ai l'attention de tout le monde/ c'est vrai que j'aime bien passer voir tout le monde/ bon après moi j'ai mes erreurs de pratique professionnelles/ mais c'est vrai que quand je m'entends bien avec une classe/ là c'est le cas/ j'adore être/ c'est pas du travail quoi/ je suis bien d'être avec eux/ et c'est vrai que y en a avec qui je m'entends bien / ils m'accaparent un peu trop alors je reste on discute/ des fois j'oublie un peu les autres/ ça déborde un peu y en a qui travaillent un peu moins mais bon ça c'est ma faute

CHER : non c'était/ pour savoir à quel moment ça apparaissait dans la classe/ et comment

JERO : ben quand je passais et que je dis on met tout le monde en commun et qu'il y a quelqu'un qui passe et qui se trompe ou quoi je dis/ bon ben regardez et comme j'ai l'attention de tout le monde/ bon les très bons ben pour eux/ ils pensent à autre chose hein/ mais au moins les autres je peux les raccrocher/ vous voyez x faut pas en avoir peur c'est juste/ c'est un nombre

CHER : ouais

JERO : a priori

CHER : alors maintenant pour finir/ j'ai d'autres erreurs d'élèves à te montrer qui sont des erreurs d'élèves de 2nde alors là pour le coup c'est pas du tout pour que tu me dises comment tu les corrigerais/ parce que l'apprentissage il est terminé/ mais surtout pour que tu me dises si ces erreurs elles te paraissent classiques ou pas/ ou si y a des choses qui t'interpellent/ ou pas.

JERO : alors attends je regarde// ah! ben là déjà le premier ça me tu vois par exemple/ déjà c'est ce que je dis à mes 3e/ il part de la première ligne il connaît bien ses identités remarquables/ puisque y a pas d'erreur de calcul c'est bon/ en tout cas c'est un élève sérieux/ il les sait

CHER : ouais

JERO : et là moi c'est ce que je dis à mes 3e/ déjà je suis content que lui il le fasse c'est que d'abord/ quand vous avez un moins 2 devant une parenthèse avec un carré le moins 2 vous le laissez devant la parenthèse/ et le carré vous développez à l'intérieur/ je dis vous pouvez aller très vite si vous êtes très bons/ mais je dis même moi là je préfère pas faire d'erreur de calcul en allant vite/ donc je préfère faire une ligne de calcul de plus et faire juste/ donc là pareil il sait bien son identité remarquable/ y a pas de faute

CHER : non non

JERO : et après je dis donc/ en tout cas il les sait donc généralement quand on sait ses identités remarquables c'est qu'on n'a pas de problème de développement parce que je vois moi mes 3e ils savent développer mais ils arrivent pas à retenir leurs identités remarquables vous les savez pas vous pouvez les retrouver/ donc ils le font/ mais là ça prouve qu'il a pas compris il me fait 2 plus x^2 donc il sait toujours pas sa distributivité/ donc en plus si ça voudrait dire plus/ fin non il a pas distribué/ il sait pas/ donc là c'est que alors moi je me dis/ même ça me semble bizarre qu'il soit passé en 2nde il sait ses identités remarquables mais visiblement il les a appris par cœur mais il sait pas

CHER : alors si/ ce que je peux te donner comme information/ en fait ça c'était des erreurs lors du contrôle

JERO : ou alors il était stressé peut être

CHER : d'une ancienne élève à moi euh/ qui était en 3e et qui est passé en 2nde/ donc en fait c'est le début de tout mon travail c'est le truc qui m'a vraiment vachement interrogée/ et elle sait très bien/ alors c'est une fille/ et elle sait très bien distribuer/ par contre/ elle fait quand même cette erreur là / elle distribue pas c'est ce que tu disais/ à ce moment là

JERO : ah/ ben là ça me laisse sans voix

CHER : et alors regarde de l'autre côté

JERO : ou alors je me dis est-ce que ce serait pas une histoire de notation ? / de mettre 2 et de pas mettre le fois devant la parenthèse que ça les bloque ? // non ? ça viendrait pas de là ? //bon je regarde le deuxième//alors/ donc là elle distribue/ donc là y a pas de faute

CHER : non/ mais t'as une erreur du carré elle écrit -1

JERO : donc là oui y a une erreur/ donc là c'est un moins ou un plus ?

CHER : c'est un moins

JERO : ouais donc $-2x$ plus x^2 donc là elle a fait une erreur de signe/ de calcul

CHER : ouais du carré

JERO : O.K. bon ben là elle fait une erreur /elle a distribué que sur la première ligne/ euh que sur le premier euh terme de la somme après elle l'a pas fait sur $-6x^2$ et… elle a oublié et là#

CHER : là le changement de signe euh

JERO : là elle a bien changé de signe/ elle a bien distribué

CHER : alors ? y a des choses qui te surprennent ou ça te paraît classique comme euh#

JERO : ben oui c'est classique/ je le vois déjà en 5e/ mais en 5e ça me choque pas/ puisqu'ils savent pas/ c'est nouveau/ surtout que là je leur mets/ ils l'ont vue la distributivité en début d'année […]

ça m'étonne pas qu'ils oublient/ par contre en 2nde/ disons/ que quand je vois mes élèves de 3e ça m'étonne pas mais disons que je m'interroge sur euh nos capacités d'enseignement

CHER : oui qu'est-ce qui dans notre enseignement au collège amène à faire ça ?

JERO : ils font en 5e/ ils en font en 4e/ je me dis faire des erreurs de calcul quand on réduit/ on oublie/ on écrit x on oublie le carré/ mais là arrivé en 2nde faire une erreur oublier la distributivité carrément ajouter/ ça fait beaucoup d'erreur quand même.

ENTRETIEN AVEC SANDRA

Le 14 juin 2012

CHER : Chercheur

SAND : Sandra, enseignante en collège

CHER : Tu m'as dit que tu avais des 5^{e}

SAND : 5^{e} et 4^{e}

CHER : et donc le thème qui m'intéresse est la distributivité et plus particulièrement le développement et la factorisation et pour commencer j'aimerais que tu me racontes comment tu commences ce thème en 5^{e}/ par quoi tu commences ? par quelles activités/ lesquelles tu enchaînes

SAND : sur le calcul littéral ?

CHER : oui/ euh

SAND : sur le calcul littéral/ donc euh ben déjà sur l'intérêt de l'introduction des lettres/ donc ça va être pas les programmes de calcul du style choisissez un nombre au hasard vous multipliez par deux vous soustrayez 5 etc/ et donc je fais en sorte que en partant par exemple de *x* on arrive par exemple à 1 pour tous les nombres/ quel que soit le nombre choisi à l'origine/ ou bien d'arriver qu'au même nombre que le nombre de départ/ sans introduire le *x* quoi et ensuite j'essaye de justifier par le calcul littéral le fait qu'on passe de *x* à 1 quoi mais ça/ ça suppose qu'on ait déjà commencé un peu de calcul littéral avant/ c'est pas vraiment l'activité d'introduction

CHER : et qu'est-ce que tu fais comme activité d'introduction ?

SAND : en activité d'introduction vraiment/ euh/ si je fais un truc sur l'intérêt d'une formule mais il faudrait après que je te montre l'exemple..

CHER : alors sachant que ce qui m'intéresse/ c'est la distributivité/ donc est-ce que la distributivité tu l'introduis au moment des programmes de calculs/ pour ta preuve ou est-ce qu'elle existe avant/ tu l'as vue avant avec eux/ ou c'est à ce moment là ?

SAND : non d'abord je fais l'intérêt de l'introduction des lettres/ le calcul littéral en premier/ ensuite les règles de simplification multiplier jouer un peu là-dessus/ et ensuite la distributivité qui est plus une application/ euh comment dire/ un exemple/une illustration/ pas forcément/ euh comment dire/ pas forcément avec un but affiché au départ

CHER : d'accord

SAND : donc ensuite je#

CHER : alors du coup c'est toi qui donnes la distributivité ?

SAND : non/ je fais le truc avec en séparant les rectangles/ leur faire calculer de deux façons différentes/

CHER : d'accord/

SAND : donc euh un rectangle de 3 sur 6 qu'on coupe etc.

CHER : ouais/ tu peux me montrer

SAND : avec l'aire/ donc/ d'abord avec des nombres/ 3/ 5 et 4/ donc je leur fais tracer /// et calculer de deux façons différentes/ donc soit on ajoute ça et ça (elle montre les surfaces qu'elle numérote 1 et 2) $4 \times 3 + 4 \times 5$ ou $(3 + 5) \times 4$ et ensuite une généralisation avec des lettres/ k a et b. (*elle refait un dessin*) et ensuite les applications directes/ ça va être du calcul mental donc quand ils connaissent 9 fois 7 et qu'ils ont oublié 9 fois 8 (*elle écrit* 9×7 *et* 9×8) donc là ils répondent toujours qu'ils ajoutent 9 donc tu peux leur justifier que 8 c'est 7 plus 1 et on applique la distributivité là-dessus (*elle écrit :* $9 \times 8 = 9 \times (7 + 1)$) /// après en calcul mental pour calculer après des calculs du style 9×99 euh // voilà et ensuite effectivement les comment dire/ ces fameux programmes de calcul où t'as besoin de distributivité/ fin de distribuer/ quoi hein/ on part de 3 etc et on arrive à 1 pourquoi on arrive à 1 bon dans les bonnes classes y'en a qui pensent à prendre x/ mais pas toujours/ donc voilà on applique la procédure mais bon ça suppose d'avoir un peu // de matière au préalable

CHER : ouais/ donc là c'est des développements/ si je me trompe pas/ à quel moment arrive la factorisation ?

SAND : ben/ j'en fais très peu de la factorisation //

CHER : en calcul mental non plus ?

SAND : non

CHER : d'accord/ et euh/ là pareil sur les programmes de calculs c'est plutôt du développement non ?

SAND : oui

CHER : d'accord/ euh/ quel intérêt tu vois à cette activité des rectangles que t'as choisie ? qu'est-ce qui t'a fait choisir ça en fait ?

SAND : ben j'ai rien trouvé d'autre de mieux quoi/ ça fait travailler sur les aires// euh après j'ai pas d'autre idée pour introduire la distributivité

CHER : et quelles limites tu vois à cette activité/ si tu en vois ?

SAND : quelles limites/ ben ça fait un peu pièce rapportée quoi/ c'est-à-dire qu'ils voient pas forcément l'intérêt/ c'est un peu artificiel quoi/ mais de toutes façons c'est artificiel de trouver la formule euh/

CHER : oui

SAND : est-ce qu'ils se l'approprient vraiment/ j'en suis pas sûre quoi

CHER : à ce moment là tu veux dire ou tout au long du#

SAND : ben après tout au long du truc quoi/ est-ce qu'ils voient vraiment le lien entre ça la formule qu'on va écrire euh ?

CHER : mh // et est-ce que ces rectangles là tu vas les réutiliser à un moment donné plus tard ?

SAND : non/ donc après je fais la généralisation pour leur faire intégrer le schéma avec un rectangle coupé en trois ou en dix/ pour leur montrer dans la parenthèse que ça marche pareil si on a 3 +9+2+7 (*elle écrit* 5 × *(* 3+9+2+7))

CHER : d'accord et tu leurs fais refaire les dessins qui correspondent ?

SAND : ouais/ ou je fais au tableau quoi pour les préparer quand il y a quatre découpages/ parce que ça je trouve/ ça par contre le fait de généraliser à plusieurs c'était bien/ ça peut leur faire comprendre ce schéma à deux (*elle appelle schéma des arcs-de-cercle qu'elle dessine comme des flèches / et elle le montre sur (*3 + 5 *)* × 4 *)*

CHER : et est-ce que ça tu l'écris avec une formule ?

SAND : oui/ après

CHER : ah oui ?

SAND : ben oui/ $a + b + c + d$

CHER : tu leur fais

SAND : oui oui/ enfin je leur fais pas écrire dans le cours/ mais je peux l'écrire au tableau/ c'est quelque chose que je peux écrire au tableau/ je sais pas s'ils le comprennent/ mais#

CHER : d'accord et tu disais que c'était bien pour leur faire comprendre pour deux ?

SAND : il me semble que ça c'est pas mal/ ils comprennent mieux ce schéma de distrib//ce schéma de distribution parce que là c'est vrai que c'est petit quoi c'est court/ alors que là on comprend que ça se poursuit /// ça c'est pas mal je trouve

CHER : euh O.K./ euh/ et alors ça arrive à ce moment au niveau des rectangles est-ce que ça réapparaît au moment du calcul mental ?

SAND : non pas forcément

CHER : et en algèbre ?

SAND : en algèbre ?

CHER : euh en calcul littéral je veux dire est-ce que tu demandes des développements avec plusieurs termes parce que là tu l'as écrit avec des nombres

SAND : non/ non

CHER : mh

SAND : non je leur dis juste pour leur faire prendre conscience du truc/ mais pas en exigible quoi par contre tu me demandais la factorisation

CHER : oui

SAND : si/ de fait on la fait la factorisation quand on réduit quoi/ donc au départ/ je leur fais dével// euh rédiger correctement (*elle écrit* $2x + 5x$ *et en dessous* $2 \times x + 5 \times x$ *et souligne les x*) et ensuite je fais beaucoup travailler sur la réduction en 5ᵉ/ des réductions de ce style j'essaye mais c'est pas évident d'introduire avec des relatifs/ $2x$-$5x$

CHER : euh ?

SAND : ça fait retravailler un peu les relatifs par ce biais

CHER : mais du coup tu te retrouves avec euh// ?

SAND : ben -3*x*

CHER : -3*x* ?

SAND : ben 2 – 5 mais bon là je zappe la factorisation/ je fais pas les étapes/ mais intégrer que les *x* se mettent ensemble/ mais bon/ ça/ ça permet de réchauffer un peu les nombres relatifs quoi et ensuite eh ben j'essaye un peu de faire retravailler le regroupement comme $2x+ 4 + 3x+5$ /// voilà /pour commencer à intégrer ça dans les calculs

CHER : d'accord et là qu'est-ce que tu leur dis pour arriver à la forme réduite ?

SAND : ben euh là c'est de la recette de cuisine/ on met les *x* ensemble et les nombres ensemble/ c'est // donc après au début j'attire leur attention sur $2x+4$

CHER : euh /// quelle est la difficulté que tu vois dans l'enseignement de ce thème ?

SAND : du calcul littéral ?

CHER : ouais

SAND : ben c'est de pas voir à quoi ça sert

CHER : alors je me trompe/ c'est pas exactement du calcul littéral

SAND : c'est du développement ?

CHER : c'est du développement/ plus de la distributivité/ du développement et de la factorisation

SAND : ben c'est quelque chose de très artificiel/ bon mis à part les quelques applications en calcul mental/ c'est / c'est/ je veux dire c'est des choses qui// le problème c'est qu'ils savent le faire naturellement ils rajoutent 9 (*elle parle de* 9 × *7 et* 9 × 8) donc ils voient pas le lien avec le calcul littéral euh le développement/ donc pour ça pour cette application là pour eux c'est pas du développement même si tu leur apprends/ même si tu leur dis/ pour eux ils ne l'intègrent pas comme quelque chose qui provient d'un développement/ donc ensuite le développement lui-même n'a pas tellement d'intérêt pour eux/ c'est difficile de leur montrer l'intérêt même après en 4e/ mis à part pour les équations puisque c'est des techniques opératoires qui servent pour des choses plus complexes/ des moyens de calculs/ donc euh/ c'est assez difficile de// mis à part peut être là-dessus pour décoincer une situation

CHER : oui sur les programmes de calculs (*elle les montre*)

SAND : mais après c'est vite limité quoi

CHER : et en 4e comment est-ce que tu reprends ce qu'ils savent de 5e pour continuer ce travail sur les développements et factorisations?

SAND : je repars de quelque chose de basique qui est la simplification des signes multipliés (*elle m'a montré 2x × 5x par exemple dans un cahier avant l'enregistrement*) 5 fois *x* simplifier *x* fois 5 déjà partir de ça parce que c'est pas acquis/

CHER : mh

SAND : anecdotique mais qui permet de re-rentrer dans le calcul littéral ensuite/ euh ensuite qu'est-ce que je fais/ est-ce que j'enlève les parenthèses/ je ré-apprend à réduire

CHER : avec la distributivité ?

SAND : non pas avec la distributivité donc au départ je fais de la réduction/ est-ce que j'ai fait les parenthèses avant/ qui est de la distributivité aussi// la suppression des parenthèses

CHER : euh // oui d'accord/ mais pas forcément de la double distributivité ?

SAND : oui alors la double distributivité je l'introduis avec les rectangles /pareil/découpés/ donc je leur refais ça (*elle montre les dessins*)

CHER : tu refais la simple ? avec les rectangles ?

SAND : oui

CHER : et après la double ?

SAND : voilà

CHER : je t'ai pas demandé/ mais t'as que l'addition là en fait

SAND : euh oui donc ensuite je leur je le fais pas en activité pour la soustraction/ je leur balance la formule/

CHER : d'accord/ et en 4e ?

SAND : cette année je leur ai expliqué parce que y'a un élève qui me l'a demandé donc ben j'ai pris 5 de là à là et 3 de là à là (*elle montre la grande longueur et la petite longueur sur le dessin*) mais c'est plus compliqué parce qu'il faut faire passer de l'autre côté-là tu vois ?

CHER : euh/ je me suis jamais poSeb la question //vas-y !

SAND : euh ben ici ça fait si t'as 3 et 5 tu vas faire 4 fois 5 moins 3 égal 4 fois 5 moins 4 fois 3 // non c'est bon/ c'est ça/ non ben je sais plus ce que c'était /c'était pour autre chose

[…]

CHER : donc en 4e est-ce que tu le reprends pour l'addition et la soustraction ?

SAND : oui donc je reprends ça uniquement pour l'addition

CHER : tu passes à la double en découpant en 4 rectangles ?

SAND : voilà

CHER : euh et est-ce que tu refais cette généralisation avec plusieurs termes en 4e ?

SAND : oui/ oui

CHER : alors comment tu t'y prends ?

SAND : ah/ mais tu veux dire avec le double développement ?

CHER : ouais

SAND : euh alors je le fais pas forcément avec le rectangle/ je leur montre le schéma on arrive une fois qu'on a le découpage en 4 à retrouver $(a+b)(c+d)$ le schéma (*elle fait les arcs de cercle*) que quelqu'un au tableau vienne le faire et ensuite je leur explique que s'il y a plusieurs nombres dans la parenthèse (*elle écrit $(a+b)(c+d+e)$*) on suit le même schéma mais sans forcément revenir au rectangle/ et que ça continue/ plus *f* / je l'écris comme ça

CHER : avec les lettres comme ça ?

SAND : oui comme ça

CHER : d'accord et est-ce que tu le fais avec plusieurs termes à gauche ?

SAND : j'en parle pas forcément/ ça dépend/ c'est pareil hein/ non ?

CHER : ouais/ ça t'arrive de le faire ?

SAND : je crois pas non

CHER : O.K./ euh alors est-ce que y'a des types d'erreurs auxquelles tu penses en 5^{e} d'abord puis en 4^{e}/ qui reviennent ?

SAND : en 5^{e} typiquement c'est ça / $2x+4$/ $6x$

CHER : $6x$

SAND : ensuite c'est celle là hein/ en lien avec le développement ?

CHER : mh et avec la factorisation ?

SAND : c'est en fait le sens de l'opération là euh je veux dire 2 fois x la multiplication et la différence entre l'additivité et la euh //la multiplication

CHER : oui

SAND : enfin traduire 2 fois x comme 2 quantités de x qu'on ajoute à 5 quantités de x et 2 quantités de x plus 4 ça n'a rien à voir quoi donc ça pour moi c'est le problème principal. Après bon euh appliquer le schéma ça va quoi/ sauf ceux qui // ceux qui travaillent pas quoi mais on parle pas de ceux là là/ je veux dire le schéma leur pose pas trop de problème […] bon alors après les règles de simplification d'écriture ils ont encore du mal quoi comme x fois 3 ça fait encore $x3$ quoi c'est quand même assez récurrent en 5^{e}/ fin cette année j'ai vraiment bossé le calcul littéral/ je trouve que c'est intéressant de le faire en 5^{e} j'y ai bien passé 2 ou 3 semaines et la simplification d'écriture j'ai avancé quand même mais bon/ euh y'en a encore qui ont du mal à intégrer/ et ça vraiment et je sais pas comment faire vraiment/ cette histoire de réduction euh/ on a beau passer au stabylo les couleurs/ les trucs/ les quantités en x d'une couleur les nombres de l'autre euh/ c'est difficile à intégrer [...]

CHER : est-ce que tu rencontres d'autres problèmes de factorisation/ autre que de la réduction ?

SAND : ben disons que après factorisé artificiellement en 5^{e} des fois y'a des exos comme factoriser $5y + 25$/ c'est pff/ je travaille pas ça tu vois/ donc je travaille que ce à quoi ça sert c'est-à-dire la réduction et après c'est difficile/ et en 4^{e} on se heurte au même problème/ au problème de réduction. Donc ensuite/ là en 4^{e} le principal problème c'est l'introduction du moins quoi/ le schéma en soi il pose pas de problème mis à part qu'ils oublient le *x* carré quand il y en a/ ce qui pose problème c'est la gestion du signe moins.

CHER : ouais /// alors maintenant je voudrais te montrer des erreurs d'élèves en 5^{e} qui sont en cours d'apprentissage/ je vais te les copier/ le calcul c'est 12 fois 13 plus 12 fois 7 et certains font 12 + 12 = 24 et 24 fois 20. Comment tu corrigerais ça/ qu'est-ce que tu dirais à un élève qui te dirait ça ?

SAND : j'ai jamais vu ça/ c'est vrai c'est des erreurs d'élèves ?

CHER : ha oui oui oui/ c'est mes élèves de l'an dernier/ ils étaient deux ou trois à me poser cette question // ils me disaient « on comprend très bien qu'on fait 13 et 7 mais pourquoi on fait pas 12 et 12/ 24 et// »

SAND : mh /// j'en sais rien moi/ pourquoi ? y'a une justification logique là-dessous ?

CHER : c'est la question /si tu veux /que je me posais

SAND : ben je sais pas moi 12 fois 13 c'est 13 plus 13 plus //11 fois

CHER : ouais

SAND : et 12 euh non je m'y prends mal/ non c'est 12 plus 12 plus 13 fois/ puis 7 fois 12/ 12 plus 12/ 7 fois donc après ça fait vingt 12 (*elle fait une accolade et écrit* 20 × 12) mais bon=

CHER : O.K./ ensuite/ donc pareil c'est mes élèves de l'an dernier/ pour faire 2 fois 3 fois 5 certains font 6 fois 10/ pareil qu'est-ce que tu dirais pour corriger ?

SAND : et oui 2 fois 3 fois 5 (*elle dessine les arc-de-cercles)* /euh ben je leur dirais que le schéma c'est seulement ça quoi (*elle écrit* 2 × *(*3+5*) et l'encadre*) la distributivité c'est une addition une multiplication entre parenthèse qui se généralise pas … il faut reconnaître ça quoi (*elle encadre*) qu'ils soient capables de reconnaître cette forme là quoi et qu'elle ne s'applique que là dedans

CHER : O.K./ alors une autre // 4 × (*x*+3) donc un élève qui écrit 12 + *x*

SAND : donc qui oublie de // y'a que 4 qu'il prend quoi / ben c'est qu'il connaît pas le schéma faut pas oublier de faire 4 fois *x* quoi/ après c'est classique quoi ça c'est plus fréquent que ça ou ça // en 5^{e} et en 4^{e}/ même là hein/ mais après c'est vrai que ce schéma c'est dangereux parce que après quand c'est intégré dans euh/ il faudrait que j'ai un exemple / *x* – 2 (*x*+7) ils vont faire ça/ fin ils vont (*elle dessine les arcs entre le premier x et chaque terme de la somme entre parenthèse)* /// ils vont continuer de faire ça quoi

CHER : ah /tu veux dire comme s'il y avait des parenthèses

SAND : voilà parce que moi souvent j'inclue la gestion de plusieurs suppressions de parenthèses/ double développement/ développement simple: ils se plantent assez régulièrement là-dessus/ ils mélangent tout quoi/ ils ont du mal à reconnaître un schéma/ voilà / par exemple là typiquement là-dessus/ (A = - (3-5*x*) + (-9+2*x*)) ils vont faire 3 fois 9 et 3 fois 2*x*/ là même chose/ ils traversent le plus quoi

CHER : ah d'accord ///

SAND : donc là j'essaye de leur faire reconnaître les schémas/ quand est-ce qu'on supprime les parenthèses quand est-ce qu'on a un développement simple ou développement double (*la consigne de l'exercice est « surligner avec des couleurs différentes les calculs prioritaires et indiquer en dessous quel type de méthode vous utilisez (D. simple/ D. double ou S. parenthèses)*)

CHER : alors qu'est-ce que tu leur dis pour qu'ils reconnaissent?/ qu'est-ce qu'ils regardent ?

SAND : ben il faut qu'ils reconnaissent ces trois formes là quoi un nombre qui précède une parenthèse/ deux parenthèses avec que des plus et des moins/ et un moins devant une parenthèse/ après/ eh eh///j'ai pas mieux que /// donc ça c'est vrai que c'est bien de travailler ça parce que ben après c'est le flou artistique quoi/ quand tu leur donnes ça (elle montre 3(*x*+5)) ça va/ après quand tu incrustes (elle montre 3(*x*+5)+(*x*+7))/ ça va plus.

CHER : ouais/ encore une autre/ 2*x* multiplié par 5*x* qui est égal à 10*x* / qu'est-ce que tu dirais pour corriger ?

SAND : ben je reviens à la simplification 2 fois *x* fois 5 fois *x* et à la commutativité

CHER : une autre : 4 fois *x*/ ça c'est une élève de 5^{e} de cette année qui écrit

SAND : ah ouais // hi hi ben là y a rien à dire/ qu'est-ce que tu veux ? il y est qu'une fois le facteur commun/ euh/ ouais/ non ouais/ pourquoi elle le remet deux fois ?

CHER : ben parce que c'est écrit deux fois à gauche

SAND : ah ouais d'accord /// ouais ouais ouais / c'est tordu hein/ ouais / après qu'est-ce que tu veux dire à ça après c'est l'application de la formule

CHER : ouais/ donc est-ce que toi tu fais écrire la formule ou est-ce que tu utilises autre chose ?

SAND : ben après avec un exemple chiffré pour lui montrer quoi / pour 4 fois 2 moins 4 fois 3 ça marche pas de faire son truc quoi

SAND : de factoriser comme elle factorise/ lui montrer que le résultat est pas le même quoi

CHER : donc de remplacer par 2

SAND : ben de revenir/ de faire 4 fois 2 plus 4 fois 3 on calcule/ calculer par ce biais/ 8 plus 12/ on va trouver 20 et pas l'autre

CHER : ouais/ ça/ de remplacer par des nombres/ ça t'arrive de le faire ?

SAND : oui très souvent

CHER : pour corriger des erreurs ?

SAND : oui/ revenir à du chiffré en particulier sur la mise en équation

CHER : pour vérifier des résultats tu veux dire ?

SAND : non pas pour vérifier des résultats/ parce que c'est trop lourd/ mais pour être capable de mettre en équation un problème par exemple euh les trucs avec les histoires des âges le père est trois fois plus âgé que sa fille/ ils ont toujours du mal à / donc je repars avec du chiffré/ je démarre avec le père qui a 20 ans/ sa fille si elle a deux fois moins que son âge j'écris le calcul et après avec x je fais le transfert de l'opération chiffrée qui leur pose pas de problème à la traduction en littéral/ donc 30 divisé par 2 et x divisé par 2 l'autre a 5 ans de plus 30 plus 5 et x plus 5 // voilà ce travail là j'essaye

CHER : c'est pas tout à fait pareil que ce travail de vérification/ mais ce travail de vérification est-ce que tu fais #

SAND : oui ça m'arrive

CHER : est-ce que tu leur dis de le faire eux/ ou est-ce que ça arrive plutôt au tableau en correction en classe entière ou #

SAND : oui en correction en classe entière c'est vrai que je leur dis pas tellement de /si je peux le leur dire mais pas systématiquement/ et d'ailleurs c'est pas un réflexe qu'ils ont c'est vrai

CHER : d'accord/ alors pour finir je vais te montrer des erreurs d'élèves de 2^{nde} pas du tout pour que tu me dises comment tu les corrigerais/ mais c'est pour avoir ton interprétation de ce type d'erreurs et [...] c'était pour que tu me dises si y a des choses qui t'interpellent ou si tu les trouves classiques/ voilà comment tu interprètes ces erreurs de cette élève ?

SAND : là je vois pas trop/ c'est 2 plus

CHER : oui

SAND : d'accord bon ben là elle a pas refait le schéma/ bon/ c'est une erreur qu'on voit en 4^e/ et après la réduction c'est bon/ euh// 4*x* //ah oui/ d'accord/ bon le développement est juste (le premier du D) et là // oui bon là c'est une erreur sur les identités remarquables (*le -1*) ensuite/ oui donc là c'est pareil elle a pas développé/ donc elle a développé que le premier /donc on revient au truc/ ouais c'est suppression des parenthèses sans développer quoi// d'accord/ bon après elle a pas réduit

CHER : euh/ c'est peut-être moi qui ai coupé (*la photocopie*)

SAND : on revient à l'erreur que t'avais écrite $12 + x$ (*pour* $4(x+3)$)/ ben après c'est deux fois la même erreur.

CHER : oui donc ça te surprend pas

SAND : non non pourquoi ?

CHER : hein ?

SAND : non non

CHER : qu'est-ce qui dans l'enseignement du collège du coup peut amener les élèves à faire ce genre d'erreur en 2nde ?

SAND : la distributivité // […] en même temps ça peut être des erreurs d'étourderie aussi/ je veux dire en fin de 4e elle est pas parfaite le calcul littéral donc forcément/ euh parce que par ailleurs les identités remarquables c'est bon y'a plein de choses qui sont bonnes donc après c'est sûr que de temps en temps y'a un *x* carré qui peut passer à la trappe/ des erreurs de signes voilà quoi. C'est que l'apprentissage n'est pas toujours solide sur euh// nous c'est sûr que dès qu'on voit ça on a le schéma en tête quoi/le développement est naturel pour nous

CHER : ouais/ mais le premier elle le fait/ euh // O.K./ bon ben on a fini

ENTRETIEN AVEC NADINE

Le 29 mai 2012

CHER : Chercheur

NADI : Nadine, enseignante en collège

CHER : alors ce qui m'intéresse/ c'est la distributivité et le développement et la factorisation en particulier/ et puis c'était de savoir comment tu introduisais la distributivité en 5^{e}/ par quoi tu commençais comme activité/ et euh/ quelles activités t'enchaînais pour ce thème là

NADI : les activités au niveau de la distributivité/ celles du bouquin (*Triangle*)

CHER : et toi tu commençais par les écritures littérales comme ça ? (*activité calculs à modéliser)*

NADI : voilà/ c'est-à-dire que là leur montrer que la répétition/ ça peut être quand même simplifié en remplaçant les nombres par une lettre et en indiquant qu'on peut remplacer les nombres par une lettre en donnant des valeurs à la lettre/ pour montrer que ça peut se révéler fastidieux/ donc euh/ comment essayer de les faire réfléchir sur écrire plusieurs fois la même chose en une seule fois quoi. Ca non/ le tableur non/ pas fait à ce moment là (*c'est la 2^{e} activité du livre)* et écrire en fonction de/ (*l'activité suivante du triangle qu'elle montre*) c'est-à-dire être capable de / pour essayer en fait de débloquer l'histoire de// en fait pour les problème de longueur ou de prix/ en fait pour eux il s'agit de trouver une réponse/ voilà donc en fait c'est vrai qu'ils sont bloqués par le fait de s'arrêter à $2x$ ou voilà la remarque en fait c'est j'ai pas de réponse on a ils sont vraiment bloqués par le fait qu'ils n'arrivent pas à me donner un résultat quoi. Fin parce que pour eux c'est pas un résultat

CHER : non

NADI : enfin d'ailleurs c'en est pas un/ c'est une écriture /euh après une fois que c'est fait/ je te dis ce que j'ai fait dans la leçon ?

CHER : ouais je veux bien ouais/

NADI : en fait dans la leçon le calcul littéral/ j'explique ce que c'est et je fais le lien avec les formules en leur disant que finalement ils en ont déjà utilisé du calcul littéral pour l'aire d'un rectangle et tout ça (*il y a comme exemple les formules d'aires de 6^{e}*) euh/ écrire en fonction de/ pour reprendre un petit peu cette activité là et voilà donc après tu vois je passe à la distributivité et la distributivité/ c'est en fait des petits exercices d'aires

CHER : d'accord/ alors tu/ est-ce que tu as suivi ça (*du livre)*

NADI : ouais/ je leur donne ça/

CHER : donc/ y a un petit problème où il faut écrire de deux manières différentes la même longueur

NADI : où il faut écrire la même chose/ longueur et une aire

CHER : et une aire

NADI : donc là/ honnêtement/ ils y arrivent/ ça va/ je trouve que ça va à peu près/ alors par contre je trouve que l'activité y'a le pour et le contre/ les situations qui sont proposées sont pas mal/ par contre après c'est vrai que quand d'un coup on leur dit de compléter k fois $a + b =$ et tout ça /euh

CHER : ouais

NADI : on tombe un peu comme un cheveu sur la soupe/ donc il faut un petit peu les guider/ leur faire le lien

CHER : quand tu les guides/ comment tu fais ? tu reprends toutes les formules établies ?

NADI : ouais /j'essaye à chaque fois de faire le lien fin là elle y est là / k c'est c

CHER : et ouais

NADI : c'est pour ça qu'on tombe un peu tu vois là/ on est tellement habitués à/ à la limite tu vois des fois je le change le k je leur mets c fois $a + b$ puisque là c'est a fois $b + c$

CHER : mh

NADI : en fait ce que/ une fois qu'on en arrive là/ ce que je fais en général/ c'est que on reprend les trois et je leur demande de trouver une égalité un peu comme ça mais avec euh dans chaque situation je les encadre/ en rouge tu vois

CHER : ouais

NADI : c'est-à-dire que là c'était 15 fois ta ta ta et le 15 on voyait qu'il se distribuait/ enfin/ je sais plus si je dis ça mais bon

CHER : alors

NADI : là pareil/ c'est quoi qui se distribue ? euh

CHER : 3 fois ?

NADI : c'était 3 fois euh/ on voit qu'il y est deux fois alors qu'une fois il y est une fois/ ta ta ti ta ta ta et après on généralise tu vois/ mais je les guide pas mal parce que la plupart du temps les activités sont pas=

CHER : ouais/ et euh/ est-ce que à un moment donné plus tard tu refais référence aux rectangles est ce que tu réutilises ces rectangles ?

NADI : rarement/ rarement/ après euh/ pff/ toujours pareil on se sert du … ouais/ non/ rarement après c'est vrai que c'est plutôt un automatisme/ de formule/ enfin/ k fois a na na na je trouve que parfois certains auraient besoin de revenir un petit peu de montrer qu'il y avait du découpage qu'on peut faire de deux façons .. non j'avoue que rarement…

CHER : et les limites que tu vois à cette activité/ c'est le passage à la généralisation qui est difficile ?

NADI : mh

CHER : et quels avantages tu trouves ceci dit dans cette activité ?

NADI : [silence]

CHER : tu me disais qu'il s y arrivent facilement ?

NADI : c'est-à-dire ça honnêtement ils le font au primaire

CHER : le découpage de rectangle ?

NADI : oui/ moi je vois mes filles/ elles l'ont fait en primaire donc c'est quand même quelque chose qu'ils manipulent depuis un petit moment/ donc ils n'ont pas de problème/ l'histoire des maillots/ bon/ soit t'as la tenue complète soit tu découpes en maillot et truc/ bon ça à la limite/ ça leur parle un peu moins le calcul de longueur (*avec schéma*) mais le premier et le dernier/ honnêtement/ c'est des choses pas naturelles/ mais presque quoi

CHER : ouais/ c'est des situations connues quoi

NADI : ouais ils connaissent/donc là-dessus c'est pas mal/ après c'est vrai qu'il y aurait peut être une autre façon de le mener quoi // faudrait peut être repartir des mêmes trucs situations de départ/ mais après soit les guider un peu plus/ euh parce que en fait je suis vachement obligée de reprendre la main quoi/ souvent

CHER : ouais

NADI : de toutes façons les activités du livre/ y'a activité et activité quoi

CHER : ouais/ et euh qu'est-ce que tu dirais qui passe mal/ en 5^e et en plus toi tu les vois après en 4^e euh/

NADI : [silence]

CHER : quels types d'erreurs tu vois dans les classes ?

NADI : alors dans le sens développement/ honnêtement/ euh/ dans le sens développement/euh ça va.

CHER : ouais

NADI : franchement ouais je trouve que/ à la limite là où on a un souci c'est après avec la règle des signes

CHER : la règle des signes ?

NADI : la règle des signes qu'on introduit/ après on fait attention/ on toujours bon parce que c'est contradictoire/ en 5e tu leur dis *k* fois *a* – *b* c'est *k* fois *a* moins *k* fois *b* et en 4e/ tu leur dis non/ c'est *k* qu'on prend/ *k* il est plus et on fait *k* fois *a* avec son signe plus *k* avec son signe et *b* avec son signe fin tu vois pas euh ce que je veux te dire ?

CHER : oui

NADI : en fait on fait plus euh/ c'est une écriture simplifiée de *a* moins *b*

CHER : Et euh toi tu as des 4e cette année

NADI : oui

CHER : et alors du coup/ euh est-ce que ça tu le travailles avec eux à un moment donné ?

NADI : ouais/ c'est-à-dire que on décompose la distributivité en deux étapes : le signe et la distance à zéro on fait/ quand tu fais *k* fois *a* on fait euh le signe de *k* fois *a*/ on annonce/ et on multiplie les distances à zéro/ après on fait *k* fois

CHER : d'accord

NADI : parce qu'en fait/ c'est pas *a* moins *b* c'est *a* plus moins *b*

CHER : *a* plus moins *b* c'est ça ?

NADI : et encore/ c'est a moins le nombre plus ou moins *b* enfin c'est pas/ c'est pas ça/ enfin/ euh/ fais vois sur un exemple chiffré :

CHER : ouais

NADI : quand par exemple t'as euh 2 facteur de *x* moins 3/ en fait on fait plus 2 fois plus *x* plus et plus/ plus/ et 2 fois *x*/ 2*x* ; après on fait 2 fois moins 3 parce que là en fait c'est une écriture simplifiée/ c'est *x* plus moins 3 en gros on retient plus que *k* fois *a* plus *b* /et après on fait plus par moins/ moins et 2 fois 3/ 6.

CHER : d'accord

NADI : Que en 5e/ on le fait pas de cette façon là je trouve

CHER : non

NADI : on fait euh 2 fois *x* moins 2 fois et le moins ils l'ont de la formule/ ils l'ont pas de la règle des signes/ tu vois ce que je veux te dire ?

CHER : oui

NADI : donc en général ça passe en 4^e/ quand tu leurs dis on fais la règle des signes/ ça va/ mais moi c'est vrai qu'en 5^e ça me gêne un peu parfois/ le fait de systématiquement d'utiliser moins/ mais on peut pas parce qu'ils ont pas la règle des signes/ ils ont pas les nombres relatifs/

CHER : ouais/ ils ont pas la multiplication/ ouais

NADI : voilà/ donc /euh

CHER : ouais/ et?

NADI : du coup c'est vrai que c'est édulcoré quoi/ que ça passe assez bien/ ils le/ dès qu'ils voient qu'il y a un plus dans la parenthèse/ entre les deux développements/ ils le #

CHER : ouais /et en 5^e alors quel genre d'erreurs du trouves ?

NADI : euh

CHER : tu me disais pour le développement/ ça va↗

NADI : ouais

CHER : et pour la factorisation ?

NADI : pour la factorisation euh ? qu'est-ce qu'on leur demande comme factorisation/ pas grand-chose hein

CHER : non

NADI : euh/ y a l'histoire/ mais après c'est de la technique/ quand tu leur donnes un truc vraiment euh c'est classique/ sans piège par exemple 3 fois *y* moins 3 fois 7

CHER : ouais

NADI : après par exemple si tu donnes 3 fois *y* moins 3

CHER : mh

NADI : là y'a un peu plus de//mais après c'est un peu plus rentrer dans le //d'ailleurs je sais pas si c'est au programme

CHER : ben ça fait partie des factorisations/ pourquoi pas ?

NADI : euh la cacher/ 3 *y* moins 6/ là c'est vrai qu'ils ont du mal/ et parfois c'est pas grand-chose/ des fois c'est les tables qui manquent être capable de se rendre compte il y a 3 d'un côté/ il faudrait faire 6 décomposé en 3

CHER : mh

NADI : non/ c'est surtout la factorisation/ et d'ailleurs en 4e on la fait plus

CHER : ah ouais ?

NADI : ouais/ quand tu regardes dans le bouquin y en a pas/ y a des développements/ et euh/ bon moi j'en fais quand même mais c'est vrai que si tu te laisses guider par le livre/ y en a pas

CHER : ah/ c'est marrant ça!

NADI : et après on refait en 3e

CHER : et alors pour revenir au passage de 5e à 4e/ tu me dis que du coup tu utilises *k* facteur de $a + b$ en travaillant sur l'idée de signe pour plus avoir *k* facteur de *a* moins *b* et euh comment tu passes à la double distributivité ?

NADI : (*rires*) /euh/ je sais pas/ ça doit être des aires aussi/ non ? c'est ça ?

CHER : ben on en trouve souvent ouais / alors du coup tu pars d'une activité sur les aires de ce type là ↗

NADI : ouais ?

CHER : et t'arrives à une formule générale ?

NADI : mh

CHER : est-ce que tu la démontres ?

NADI : non

CHER : en utilisant les choses de 5e/ ou pas du tout ?

NADI : non

CHER : c'est à partir de la modélisation des aires ?

NADI : voilà ouais/ et après/ on met//pff/ fin je trouve que ça /ça va/ parce que y a deux nombres 2 fois 2/ 4/ donc on se retrouve avec quatre produits/ ils comprennent bien qu'on distribue l'un puis l'autre/ fin enfin ça va quand même assez bien ça.

CHER : O.K. alors/ ben après j'ai plein d'erreurs d'élèves que j'ai récupérées/ je voudrais te montrer. Les premières c'est pour que tu me dises comment tu corriges ce genre d'erreurs / je te les recopie/ donc alors là c'est en 5e/ le calcul c'est 12 fois 13 plus 12 fois 7 qui est donné à faire et donc il y a des élèves qui disent on fait 13 plus 7 et on fait fois 12 et y a des élèves qui disent/ mais pourquoi on fait pas 13 plus 7 ça fait 20 et 12 plus 12/ 24 et 24 fois 20.

NADI : [silence] Comment corriger ça ?

CHER : ouais/ qu'est-ce que tu dirais ?

NADI : [silence]

CHER : d'abord est-ce que t'as déjà rencontré des élèves qui te disaient ça ?

NADI : non /// moi/ c'est même pas une erreur/ à la limite/ ce qu'ils auraient tendance à faire c'est faire les deux produits/ et pas se rendre compte que / tu vois / mais après faire des erreurs du style/ euh/ je sors les deux je les ajoute/ non/ ça je=

CHER : ouais.

NADI : ouais

CHER : et alors qu'est-ce que tu dirais ?

NADI : euh

CHER : sur quoi tu t'appuierais pour /corriger/ pour expliquer pourquoi ?

NADI : ben déjà je demanderais où est passée la multiplication ?

CHER : et tu l'as dans 24 fois 20

NADI : à la fin/ ah ouais/ d'accord

CHER : 12 plus 12

NADI : ouais

CHER : et ensuite/ 13 plus 7

NADI : et ils les multiplient

CHER : ouais/ donc t'as bien la multiplication

NADI : sur les priorités// en fait là /la multiplication est présente/ tu peux pas/ non ?

CHER : tu peux pas ajouter chacun des termes/ enfin des facteurs ?

NADI : j'aurais tendance à partir sur ça/ les priorités/ mais d'un autre côté/ quand on sort le 12/euh/ mais bon là on peut s'aider de problèmes

CHER : tu partirais sur quel problème ?

NADI : ben du coup un truc vite fait/ un rectangle découpé avec 13 et 7 donc voilà

CHER : ouais /comme ça ?

NADI : et après pour invalider la sienne/ l'histoire des priorités / ou alors essayer de mettre au défi/ parce que moi la mienne j'arrive à y coller un cas qui fonctionne/ donc qu'il me fasse pareil avec la sienne

CHER : c'est-à-dire ?

NADI : qu'il essaye de me#

CHER : ha de trouver une situation#

NADI : qui marche

CHER : qui montre que ça /d'accord

NADI : soit avec des aires/ soit avec ce qu'il veut/ des prix

CHER : ouais des situations/ euh/ de départ ?

NADI : ouais

CHER : alors une autre erreur/ ça/ ça vient après la distributivité/ toujours en 5^{e} des élèves qui font pour faire 2 fois 3 fois 5/ font 6 fois 10

NADI : ah ?

CHER : ouais

NADI : pourquoi ? pourquoi ils font 6 fois 10/ ils distribuent le 2 ?

CHER : c'est ça

NADI : pff ! mazette!

CHER : qu'est-ce que tu dirais ?

NADI : espèce d'âne/ ça commencerait comme ça/ en général ça commence comme ça/ oh ben là faut revoir le sens des opérations/ multiplication/ euh/ je sais pas

CHER : ouais parce que là trouver un problème/ c'est pas évident comme ça ↗

NADI : ouais 2 fois 3 fois 5 euh

CHER : et sinon pour le sens des opérations/ c'est euh /

c'est le fait qu'il y ait pas d'addition ?

NADI : ouais

[silence]

CHER : et du coup est-ce que tu reviendrais à la formule ou simplement en évoquant que c'est pas une addition ?

NADI : si /à un moment donné/ si quand même déjà je demanderais d'où sort le 6 et le 10 même si je me doute d'où ça vient/ pour le faire dire quand même / donc a priori/ il me dirait qu'il a distribué le 2 sur le 3 et le 5 et à la limite/ effectivement dire que la distributivité c'est quelle opération sur quelle opération ?

CHER : ouais

NADI : donc là ouais et à part revenir un peu sur la notion de distributivité/ et avoir bien intégré on distribue quelle opération sur quelle autre/ je vois pas// après faire formaliser/ faire dire à l'élève qu'il a distribué 2.

CHER : alors après 4 facteur de *x* plus 3 égal 12 plus *x* / c'est un élève bizarre

NADI : ouais/ parce que à la limite/ 4*x* plus 3 / je veux bien/ mais là / euh

CHER : oui/ c'est ça/ et alors il faisait ça à chaque fois !

NADI : ah ouais ? bon/ et ben dis donc/ il est fâché avec les *x*

CHER : et alors comment tu corrigerais ? tu passerais par quoi pour corriger ?

NADI : j'allais dire sur la jalousie/ pourquoi 3 et pas *x* ? en général je leur dis ça pourquoi y en aurait un et pas l'autre ? non je rigole/ ouais/ franchement je sais pas

CHER : ouais sur le fait qu'il y en a un qui a été oublié quoi

NADI : ouais/ en fait sur le 4 qui touche/ enfin / le produit par 4 qui est devant la parenthèse et en général quand ça touche la parenthèse/ ça agit sur tout ce qui est dedans/ donc vraiment faire sentir ça/ mettre les flèches/ tu vois/ voilà bon essayer de/ enfin sinon/ mais là c'est bizarre quand même

CHER : ouais/c'est très marrant/ en fait il écrit toujours les produits de nombres en premier

NADI : et après la lettre toute seule

CHER : après c'est des plus classique hein/ comme [inaudible] = 10*x*

NADI :

CHER : pareil qu'est-ce que tu dis pour corriger ?

NADI : je remets les fois

CHER : ouais et après

NADI : après je travaille sur le fait que la multiplication est commutative/ et qu'il y a deux *x* mais pas deux au sens de double mais le produit de *x* par *x*.

CHER : d'accord/ ah oui/ une rigolote aussi/ pareil tu me diras si/ ça te surprend

NADI : donc/ là

CHER : sur la factorisation pour le coup/ pareil en 5^{e}/ hein?

NADI : ouais

CHER : et y a 4 fois x+ 3 et fois 4 encore/ et l'élève qui explique en plus ben 4 il est écrit deux fois

NADI : ben ouais/ donc il faut le retrouver deux fois

CHER : ouais

NADI :

CHER : et là pareil sur quoi tu t'appuies pour corriger/ sur les factorisations ?

NADI : déjà la formule

CHER : la formule

NADI : mh/ à la limite/ euh bien revenir sur le fait que le *k*/ deux fois une fois// en fait en général/ je leur fais bien voir que quand y a par exemple une somme de deux produits/ on va se retrouver avec un nombre/ le coefficient/ tout seul et à l'intérieur de la parenthèse/ deux/ s'il y a trois produits/ il y aura toujours le facteur commun qui lui est écrit devant la parenthèse une seule fois/ par contre/ à l'intérieur de la parenthèse/ trois /// à la limite qu'ils identifient que si y'a trois produits/ y'a trois nombres à l'intérieur de la parenthèse/ et si y'en a deux/ y'en a deux et que par contre/ le facteur commun/ justement comme il est commun/ on peut l'écrire une seule fois/ à condition de le mettre devant la parenthèse avec l'histoire que du moment que je touche la parenthèse ça veut dire que j'agis tout ce qui est dedans

CHER : et du coup tu leur fais faire des factorisations ou des développements avec trois termes ?

NADI : ouais/ trois/ quatre/ pour bien montrer que voilà que y a pas de limites/ que c'est juste/ que je dois bien dès le départ compter pour savoir qu'est-ce qui va me rester dans ma parenthèse quoi en général au tableau j'efface c'est-à-dire que je//quand on écrit 4 fois x plus 4 fois 3 j'enlève ça j'enlève ça (*le 4 fois*) comme ça ils voient ce qu'il leur reste à recopier dans la parenthèse/ carrément/ j'efface le fois

CHER : ouais

NADI : et euh /après c'est vrai que donner du sens/ bien montrer que (*24 min*) il s'écrit qu'une fois c'est vrai que c'est pas si évident que ça/

CHER : ouais/ ouais ouais/ parce que justement il est écrit deux fois

NADI : ouais/ c'est pas bête hein?

CHER : non !

NADI : Ca se tient/ c'est pas=

CHER : tout à fait/ euh alors/ après pour finir/ ce que je voulais te montrer c'était des erreurs d'élèves pour le coup de seconde/ mais pas du tout pour que tu me dises comment tu les corrigerais/ parce que de toute façon ils sont en fin d'apprentissage/ mais plutôt pour que tu me dises si ça te surprend ou pas/ et ce qui peut te surprendre dans ce qu'ils font/ dans les erreurs/ ou si ça te paraît plutôt classique

NADI : euh c'est un petit peu/euh je trouve que c'est bizarre d'arriver à faire ça/

CHER : ouais c'est le développement du premier carré

NADI : ce qui est déjà en soi pas mal/ parce qu'il y en a beaucoup qui mettent deux x au carré/ et de pas arriver à faire une petite distributivité simple// on se demande presque/ parce que là ça a aussi été bien fait dedans/ et les flèches elles y étaient ?

CHER : non ça c'est le prof qui a corrigé et qui a mis les flèches

NAD : ah/ d'accord et qui a entouré

CHER : voilà et qui a entouré ça et souligné/ ça en rouge sur la copie

NADI : ouais/ c'est assez surprenant/ on a l'impression que l'élève après maîtrise la double distributivité fin les identités remarquables/ et qu'en fait il en a oublié la distributivité simple quoi // deux plus et là il a pas changé le reste/ euh c'est [silence]

CHER : ouais ça t'interpelle

NADI : ouais/ c'est surprenant quand même // c'est une vraie copie ?

CHER : ah oui oui/ c'est une de mes anciennes élèves de 3e

NADI : ah ouais/ ha ouais

CHER : et qui se débrouillait bien en plus en algèbre au collège et qui s'est effondrée en seconde.

NADI : ha ouais ?

CHER : ouais/ à cause de l'algèbre/ toute l'année //et que des erreurs que je trouvais bizarres

NADI : ben ouais/ le plus dur est fait à la limite/ et le truc tout simple/ c'est là où ça plante

CHER : alors regarde de ce côté

NADI : alors quatre x / là c'est bon/ et là après là moins 1 moins ?

CHER : là c'est donc le carré de moins 1 plus x

NADI : ouais / elle distribue plus

CHER : c'est ça

NADI : à croire que plus// ils retiennent les dernières techniques/ fin les dernières choses qu'ils aient vues

CHER : ben pourtant la double distributivité/ les carrés/ c'est ancien aussi/ c'est 3e

NADI : 3e/ ouais/ [silence]

CHER : ouais ça t'étonne aussi ?

NADI : ouais ouais ///je me demande en fait si je pense/ et si parce que/ et non/ là elle fait la même erreur/ parce que j'allais me dire/ à la limite c'est le moins deux/ mais là c'est en début de ligne/ c'est la même erreur

CHER : si ce n'est qu'elle écrit fois là

NADI : oui/ mais elle l'a fait que sur le premier / donc la notion de distributivité/ simple/ c'est pas bon/ n'est pas maîtrisée quoi

CHER : en fait/ dans son cahier et dans sa copie/ elle le réussit ça/ sur des développements euh/ s'il n'y a pas ça/ la première étape grosso modo/ elle sait développer avec la simple distributivité sans aucun souci/ avec trois termes aussi et là=

NADI : dès que c'est mélangé/ c'est ça ?

CHER : ouais

NAD : c'est pour ça je te dis/ bon ben là y'a tout ça avant/ donc ça na na na/ mais là que c'est en début de ligne/ tu te demandes/ parce que c'est presque seul là

CHER : tu veux dire sans signe/ sans#

NADI : oui/ puis t'as pas fait le/ ça /ça vient après donc/ t'es pas passée par une autre étape avant// est-ce que c'est la fraction qui la // je pense pas

CHER : et en quoi tu dirais que notre enseignement au collège peut amener à ce genre d'erreurs ou pas ?

NADI : je ne sais pas//et toi elle réussissait ?

CHER : oui oui en algèbre elle n'avait aucun problème

NADI : ou alors elle le faisait de manière automatique et

CHER : oui

NADI : parce que c'est pareil tu te rends compte que quand tu fais les choses de manière trop automatique/ si tu leur mets pas trop de sens derrière à un moment donné/ t'oublieras quoi/ c'est comme là par exemple en quatrième/ je fais les puissances/ et tu leur donnes la formule *a* puissance *m* fois *a* puissance *n* égale *a* puissance et il faut ajouter les exposants/ en fait comme je leur dis/ si vous l'apprenez/ quand on multiplie/ on ajoute les exposants/ super/ mais quand vous l'aurez oublié/ je leur dis bien mettez-y du sens/ pourquoi ça s'ajoute/ parce que on revient à la définition/ fois fois fois/ hop on colle des fois fois fois/ ça fait que ça s'ajoute quoi/ donc c'est vrai que si ils mettent du sens derrière/ du coup même si tu as pas manipulé/ parce que elle peut-être qu'elle avait pas manipulé depuis un moment donc tout ces automatismes qu'elle avait mais de manière vraiment/ comme une machine quoi/ elle les a oubliés/ alors est-ce qu'on demande pas trop de trucs automatiques/ et euh=

CHER : parce que ce qui me pose vraiment question c'est qu'est-ce que tu mets derrière la distributivité là ?

NADI : là pas grand chose//est-ce qu'on peut reprendre systématiquement chaque erreur et revenir à des histoires de ça ou des histoire de pff (*montre les situations initiales évoquées en début d'entretien)* c'est pas évident non plus

CHER : oui parce que il me semble que concrètement/ revenir à ça on le fait super rarement

NADI : ouais

CHER : fin je sais pas hein ?

NADI : honnêtement/ ouais/ on a tendance à dire mais non là tu vois bien/ il y est deux fois/ na ni na na/ mais pourtant/ ça prend deux secondes à faire/ un petit schéma/ mais bon

CHER : c'est pour ça que je voulais savoir/ parce que je sais très bien ce que je fais/ mais les autres ?

NADI : ah/ moi je le fais jamais non plus// est-ce que // le problème qu'on peut se poser c'est en 5e à la limite comme c'est la distributivité simple/ qu'il y a pas de x au carré/ on peut toujours faire ça/ mais là on peut moins/ est-ce que du coup quand après ils ont suffisamment de sens/ est-ce qu'après leur automatisme devient un peu plus euh #

CHER : adaptable ?

NADI : consolidé/ je sais pas comment dire

CHER : ben c'est l'hypothèse que je fais parce que là c'est trop tard/ fin j'ai tendance à me dire que si on veut faire quelque chose/ c'est avant

ENTRETIEN AVEC BENJAMIN

Le 24 mai 2012

CHER : Chercheur

BENJ : Benjamin, enseignant en collège

CHER: le thème sur lequel je travaille est celui de la distributivité et plus particulièrement celui du développement et de la factorisation sachant que ce qui m'intéressait c'était de savoir comment tu rentrais dans la distributivité avec les élèves et éventuellement en 5e mais je sais que tu n'en as pas cette année

BENJ : oui voilà

CHER: est-ce que tu en as eu récemment/ ou ça date ?

BENJ : non ça date pas tant que ça/ [inaudible]

CHER: et/est-ce que tu te souviens comment tu commences la distributivité/ par quoi tu commences ce thème-là ?

BENJ : alors si mes souvenirs sont bons/ je pense que je commence par du calcul mental/ parce que comme j'en fais faire en 6e/

CHER: d'accord

BENJ : les multiplications par 9/ par 100/ par 11 par 101/ par 99/ ce genre de choses-là/ qui leur permet de voir qu'en fait ils ont déjà utilisé normalement ça en 6e/ parce que moi je leur fais faire en 6e/ je leur fais peut-être retravailler ça en 5e avant de prolonger ça au calcul littéral/ euh après sinon pour le faire direct// après pour passer directement à la forme littérale avec les lettres/ a/ b et k/ euh

CHER: mh

BENJ : en 5e je sais plus trop comment je fais par contre/ peut-être qu'on transpose directement en voyant que ça marche pour certains nombres/ d'essayer de voir pour d'autres nombres/ je sais pas// généraliser une sorte de formule

CHER: ouais

BENJ : parce que l'idée du calcul littéral en 5e/ moi c'est de commencer pour arriver à une formule en fait/ d'ailleurs j'ai une activité que j'utilise qui est là/ je l'utilise déjà en 5e/ peut-être que ça marche bien pour la distributivité/ je sais plus/ normalement je l'ai là parce que je la fais refaire en 4e

CHER: d'accord

BENJ : en fait c'est qu'on arrive à des#

CHER : avec les maisons

BENJ : ouais

CHER: et donc tu fais du calcul mental de ce genre là au départ/ et après tu utilises ça pour arriver#

BENJ : arriver à l'idée de la formule en fait/ ouais/ ça c'est plutôt pour arriver à introduire le calcul littéral en fait/ je vais plutôt travailler ça pour introduire le calcul littéral alors que ça je l'aurais peut-être travaillé avant tu vois/ sur d'autres calculs/ voir comment ça marchait sur du calcul mental

CHER: d'accord/ et est-ce que /alors /tu parles de distributivité dans le cadre du calcul mental

BENJ : non

CHER: est-ce que tu ne parles de distributivité qu'après vu

BENJ : oui je pense que c'est qu'après avoir vu la forme générale que je parle de distributivité

CHER: d'accord/ euh/ et donc là est-ce que t'arrives en fait là / qu'est-ce que c'est en fait/ c'est trois formules équivalentes ?

BENJ : non en fait eux ils peuvent écrire plein de formules équivalentes/ alors /par exemple /cette année en 4e/ ils m'avaient trouvé des formules euh/ qu'est-ce qu'ils// alors ils avaient fait une qui ressemble à celle-là là ($4(n\text{-}1)+5$) 4 n moins 1 et après le 5 ils l'avaient pas trouvé comme ça/ ils avaient retrouvé une formule avec la lettre encore derrière

CHER: d'accord/ ah/c'est super!

BENJ : donc euh comment ils avaient fait ça ? euh/ celle-là ils la trouvent pas avec n moins 2/ ils ont du mal à y penser/ après ils avaient trouvé la plus simple c'était 4 n plus 1/ bon celle-là y en a qui arrivent à la trouver mais y en très peu dans la classe qui arrivent à la trouver la plus simple/ donc en général/ je vais peut-être écrire alors je vais peut-être retrouver là

CHER: oui oui

CHER: donc ça /en 4e/ tu commences par du calcul mental en 4e ou tu commences par ça aussi ?

BENJ : en 4e j'ai commencé par ça oui/ pour voir l'intérêt de la formule en fait pour qu'ils appréhendent le calcul littéral comme en fait une utilisation de formule

CHER: d'accord

BENJ : en fait l'intérêt de la lettre c'est juste écrire des formules qui marchent pour n'importe quel nombre

CHER: d'accord

BENJ : en particulier pour se demander pour un grand nombre de maisons/ combien d'allumettes il faudrait

CHER: et est-ce que/ euh oui tu aboutis à#

BENJ : et après on a plutôt intérêt à avoir une formule courte qu'une grande formule avec plein de calculs comme celle-là/ comme eux je te dis/ ils avaient trouvé une formule déjà assez longue donc là c'est finalement pénible à utiliser que celle qui était écrite 4n+1 était plus facile à utiliser donc du coup l'intérêt de réduire une expression/ la développer la factoriser/ ça va être ça/ et même en 4e/ fin suivant le niveau des classes/ je sais que l'an dernier j'avais une classe qui était très faible du coup j'avais fait un chapitre où j'avais enlevé /du coup /tout ce qui était développer et factoriser/ j'avais fait que réduire une expression et supprimer les parenthèses

CHER: d'accord

BENJ : et du coup cette année j'ai oublié que les classes étaient meilleures que celle-là et j'ai refait pareil [rires] alors qu'en fait j'aurais dû mettre de suite la distributivité avec ces classes-là elles sont quand même bien meilleures que celle de l'année dernière je pense que j'aurais pu mettre plus de choses dans ce chapitre//parce que finalement pour réduire ils utilisent la factorisation

CHER: d'accord/ tu peux me montrer un exemple de comment tu expliques une réduction ? euh

BENJ : alors en 4e/ je leur / je leur dis qu'on regroupe ensemble les termes avec un carré/ afin de les additionner ou soustraire en utilisant la distributivité simple justement/ quand je l'ai vu/ je le dis/ là cette année je leur ai mis je crois entre parenthèses du coup/ parce que normalement c'est des compétences de 5e donc euh /si oui/ ils s'en souvenaient je leur ai mis entre parenthèses/ et après on regroupe ensemble les termes avec le nombre inconnu ou indéterminé

CHER: d'accord/ euh/ et est-ce que tu développes sur un exemple? comment tu utilises la distributivité de 5e pour la réduction?

BENJ : pas dans la leçon mais en exemple au tableau oui

CHER: avant ?

BENJ : quand on en est à travailler sur ces formules-là par exemple

CHER: oui/ comment tu fais/ est-ce que tu peux me montrer un exemple concret pour

BENJ : de l'utilisation de la distributivité simple ?

CHER: oui

BENJ : ben par exemple 3*a* moins pas moins/ plus déjà/ plus 5*a*/ je leur fais remarquer qu'il y a un facteur commun/ donc ça c'est des multiplications puisque on a revu au début qu'on peut supprimer le signe multiplier donc ça ça/ en général /ce que je fais c'est que je leur mets en dessous l'identité avec a donc le facteur commun/ là c'est *k* fois petit *a* plus petit *b* fois *k* ils savent que ça ça donne donc *a* plus *b* fois *k* ou *k* fois *a* plus *b* après tu peux l'écrire comme tu veux/ donc ça fait entre parenthèses 3 plus 5/ *a* et *b*/ multiplié par petit a et on peut faire le calcul dans la parenthèse donc ensuite on calcule 8/ fois petit a donc 8 *a*

CHER: donc ça tu leur demandes ce genre d'écritures ?

BENJ : non je leur demande pas/ en 5e oui/ mais pas en 4e/ en 4e je leur rappelle/ comment ça marche et je leur demande directement même sans les fois là/ de compter/ je leur dis même à l'oral/ vous pouvez compter/ ça fait 3a plus 5a on en a 3 plus 5 au total on a 8 fois la lettre *a* on l'a trois fois plus cinq fois/ donc moi je leur dis en 4e vous devez passer de là à là directement/ en 5e j'aime bien qu'ils utilisent quand-même l'identité complètement parce que en 4e après quand on utilise la double distributivité/ c'est pas mal aussi/ de transposer les lettres et de voir/ parce qu'après pour les identités remarquables/ en 3e/ c'est encore plus utile de savoir transformer une écriture en une autre écriture/ en ayant l'identité en dessous et en voyant à quoi correspond chaque lettre

CHER: d'accord mais alors comment tu fais si tu as 3*a* plus 5*a* plus 2*a*

BENJ : ah/ben ouais/ ça c'est un cas que je vois rarement/ en 5e ça arrive des fois/ mais c'est vrai que en général en 5e je reste sur ça quoi

CHER: pour avoir une identification euh

BENJ : ouais pour pas trop compliquer les choses aussi/ déjà ils ont du mal je trouve/ fin j'ai pas eu des classes très brillantes/ dans la 5e que j'avais l'an dernier/ y avait deux élèves qui étaient très bons/ et derrière/ ça/ pff/ j'avais des petites classes des petits effectifs/ 17/ 18 mais j'en avais deux qui s'en sortaient très très bien qui étaient très bons au niveau logique/ mais alors les autres

CHER: et alors justement quelles difficultés d'enseignement tu vois sur ce thème ?

BENJ : ben/ le principal problème c'est déjà qu'il faut apprendre/ je trouve que le signe multiplié par exemple c'est celui qu'on écrit pas et ça ils arrivent pas à le retenir/ on le dis à chaque cours/ il y en a quelques uns qui finissent par s'en souvenir/ et trois semaines après le coup du signe multiplié devant la lettre a y en a qui vont me dire que c'est plus/ et bon ils vont penser à n'importe quoi ils vont pas mémoriser/ finalement pendant une semaine ils auront pensé que c'était fois et trois semaines après ils auront oublié que c'était le signe fois qui était devant les lettres / qui était pas écrit/ donc ça/ ça fait partie quand-même des choses qu'il faut apprendre// et en 3e ça ressort encore/ c'est-à-dire que le signe fois /du coup/ ils l'écrivent pas devant des nombres aussi/ tu vois sur des copies sur les identités remarquables/ ils écrivent ça pour le double produit

CHER: oui

BENJ : donc ça fait partie des choses qu'ils ont du mal à comprendre/ fin à apprendre plus qu'à comprendre/ et du coup ça fait un blocage après parce que quand on sait pas le signe qui est là / alors après je trouvais aussi qu'ils avaient du mal du coup avec trois a fois cinq a après/ donc j'essaye de faire travailler les deux en même temps/ qu'ils voient la différence

CHER : oui

BENJ : donc je leur fais travailler sur le nom de la dernière opération à effectuer/ savoir si c'est un produit si c'est une somme

CHER: d'accord pour avoir la dernière opération ?

BENJ : savoir quand est-ce qu'on peut garder la lettre a et quand est-ce qu'on obtient a au carré/

CHER: d'accord/ et qu'est-ce que tu dis à des élèves qui te disent que ça c'est 15 a justement?

BENJ : ah /ben je leur refais décomposer/ quelles sont les opérations/ là c'est fois/ là c'est fois/ qu'est-ce qu'on a le droit de faire quand il n'y a que des fois/ on peut changer l'ordre donc on écrit 3 fois 5 fois a fois a et donc il y a bien deux lettres a qui se multiplient et ça fait a au carré pas a donc on re-décompose pour justifier qu'il y a un carré et pas juste la lettre a alors que quand on additionne/ c'est le facteur commun k qui apparaît seul à l'extérieur/ il est pas multiplié par lui-même/ donc l'intérêt de l'identité que ce soit une somme une différence un produit c'est important mais ça demande de connaître du vocabulaire/ de savoir que c'est la dernière opération d'apprendre des leçons et leur difficulté c'est souvent qu'il y en a qui n'apprennent pas/ ils jugent qu'ils doivent y arriver comme ça juste avec leur logique finalement

CHER: oui/ et euh

BENJ : et après il y a les problèmes de calcul qui se rajoutent au calcul littéral

CHER: de calcul ? mental ?

BENJ : ben/ avec les nombres relatifs/ en 4e ça pose problème

CHER: ah/ oui

BENJ : parce que en 5e/ ça va/ puisqu'on est sur des nombres positifs/ on a les problèmes du signe fois de la somme/ du produit/ qu'on mélange/ qu'on n'a pas/ en plus/ le coup du carré on n'a pas trop travaillé les puissances en 5e/ c'est pas le // oui ils le savent normalement/ mais c'est vrai que c'est pas quelque chose qu'on a beaucoup travaillé/ en 4e on a beaucoup travaillé sur les puissances donc finalement en ayant travaillé les puissances avant/ quand on fait ça après le a fois a ça leur pose pas de problème de l'écrire a au carré par contre en 4e c'est les moins et les plus/ alors là/ c'est la cata/

CHER: oui

BENJ : et après t'as le coup de la somme algébrique quand tu déplaces/ les termes /quand tu fais réduire avec beaucoup de termes en 5e/ déjà qu'ils maîtrisent pas les sommes algébriques en 5e/ si tu fais réduire des expressions comme ça avec plein plein plein de termes/ ça rend les choses très compliquées/ donc c'est vrai que on a tendance à le faire plutôt en 4e le coup de la somme algébrique comme on revoit en début d'année les nombres relatifs/ ils ont tendance à se souvenir/ certains /que il faut déplacer plus cinq b et pas juste 5 b le mettre/ et donc déplacer moins 4b/ déplacer moins 1/ toujours déplacer avec le signe qui est devant

CHER: ouais/ et euh/ une autre chose que je voulais te demander c'est /comment tu passes à la double distributivité en 4e à partir de leurs connaissances de 5e

BENJ : alors moi j'ai eu essayé d'utiliser la distributivité simple pour faire la double distributivité/ je trouve pas que ce soit terrible

CHER: qu'est-ce que ?

BENJ : donc du coup je euh (*pages qui se tournent, il cherche dans son classeur*) du coup là j'ai que la leçon/ ce que je faisais avant/ je sais plus

CHER: tu as une activité pour démarrer la double distributivité ?

BENJ : ben c'est possible/ je sais plus/ du coup parce que comme j'ai coupé le chapitre en deux l'année dernière avec cette classe qui était faible/ cette année j'ai pris que cette partie là et ça c'était resté/ et =

CHER: d'accord

BENJ : parce que y avait la suppression de parenthèses derrière en fait/ que j'avais gardée

CHER: et euh/ là/ comment tu aboutis avec ton activité sur les maisons à la distributivité ?

BENJ : ah ben dans ces questions là /en fait#

CHER: est-ce que c'est la même formule ?

BENJ : ouais/ peut-on les accepter/ est-ce la même formule à chaque fois ? (lit l'énoncé)

CHER: mh

BENJ : alors on peut l'expliquer que ça marche /que les trois formules sont valables/ par un raisonnement logique

CHER: ah/ et oui !

BENJ : mais du coup euh/ c'est pas forcément évident pour eux le raisonnement logique donc finalement/ se dire que ce serait bien de pouvoir réduire les expressions/ pour pouvoir voir si ce sont les mêmes ou les transformer voir si ça aboutit à la même chose/ à la même écriture

CHER: mais tu dis que#

BENJ : ça par contre/ on le fait pas dans l'exercice/ mais on va introduire comme ça la nécessité d'avoir autre chose/ la nécessité d'avoir la distributivité simple en fait/ en 5e

CHER: c'est la nécessité d'avoir la distributivité

BENJ : pour transformer des écritures

CHER: mais alors est-ce que tu pars du fait que les écritures sont forcément égales ou est-ce que c'est parce que tu as la distributivité que tu prouves que les écritures sont égales/ je veux dire

BENJ : ben l'objectif là c'est d'arriver à prouver qu'elles sont égales par un raisonnement logique qui est pas du tout évident pour eux

CHER: pourquoi? qu'est-ce qui les bloque ?

BENJ : le a moins 2 là par exemple pour eux quand tu commences à leur dire qu'il y a un nombre de maisons si on leur en enlève 2/ c'est-à-dire qu'on compte combien il y a d'allumettes sur les deux premières ici par exemple/ et du coup après il te reste a moins 2 maisons déjà ça euh// parce que tu as déjà compté combien il y avait d'allumettes pour les deux premières/ quand tu fais 5 fois 2 en fait/ tu comptes deux maisons/ et après tu enlèves une allumette/ et donc après il te reste a moins 2 maisons/ ben ça pour arriver à conceptualiser qu'il leur reste a moins 2 maisons/ déjà quand il y a *a* moins 1 ils ont du mal alors quand il y a *a* moins 2 euh

CHER: ouais

BENJ : qui restent/ pour les deux premières il te faut ben 5 pour la première et 9 pour la deuxième et après ils t'en reste a moins 2 et il en faut 4

CHER: d'accord

BENJ : pour chacune des a moins deux maisons qui restent ça à conceptualiser pour eux c'est pas évident comme raisonnement logique

CHER: d'accord

BENJ : donc du coup la nécessité de transformer des écritures et peut-être d'avoir des identités moi j'appelle ça comme ça qui seraient toujours vraies/ pour transformer une écriture en une autre écriture/ transformer une opération en une autre opération ça s'appelle soit développer soit factoriser

CHER: oui

BENJ : et en 5e je fais certainement quelque chose/ alors soit je le relie avec des nombres comme ça et on généralise comme je te disais tout à l'heure la propriété de la distributivité simple sur des nombres concrets

CHER: mais là sur des choses comme ça /t'as que le développement

BENJ : euh/ non t'as l'égalité/ t'as l'identité/ c'est vrai cette égalité/ tu généralises l'égalité

CHER: d'accord

BENJ : elle est toujours vraie/ donc après tu peux l'utiliser dans un sens ou dans l'autre

CHER: d'accord donc c'est comme ça que tu le fais/ tu pars du développement/ tu en déduis l'égalité et après de l'égalité comme tu peux l'utiliser dans les deux sens/ t'as la factorisation

BENJ : aussi

CHER: mais du coup la factorisation tu la fais en calcul mental ou pas ?

BENJ : euh // là comme ça en 5e je sais plus// c'est quoi déjà/ tu l'utilises comment la factorisation en calcul mental ?

CHER: ben tu peux avoir/ ben je peux te montrer des erreurs d'élèves

BENJ : ah comme ça /fois 12 ouais je le fais

CHER: et alors tu le fais/ tu te souviens/ avant l'écriture littérale ou pas ?

BENJ : non

CHER: tu le fais après ?

BENJ : ouais pour leur montrer justement que ça s'applique au calcul mental utiliser l'égalité dans l'autre sens et je mets un exemple aussi ouais/ dans la leçon

CHER: d'accord/ alors justement je voudrais te montrer des erreurs d'élèves pour que tu puisses me dire ce que tu leur dirais/ pour un calcul comme ça j'ai eu des élèves qui m'expliquaient très bien qu'on faisait 13 plus 7 ça fait 20 et qu'ensuite on multipliait par 12/ et puis y'a un élève qui m'a demandé mais /euh/ pourquoi on fait pas 12 et 12/ 24/ 13 et 7/ 20 et 24 fois 20 ? toi tu répondrais quoi ?

BENJ : ben/ pourquoi pas/ fais les calculs/ fais ce calcul là en respectant les priorités/ et regarde si tu obtiens le même résultat/ moi je lui ferais faire le calcul là/ après on prend une calculatrice on va voir si ça marche cette technique/ peut-être qu'elle est bonne/ et on ferait ce calcul à la calculatrice /on ferait son calcul à la calculatrice et on regarderait si les résultats sont les mêmes

CHER: d'accord

BENJ : je dirais avoir des idées c'est bien après il faut pouvoir vérifier si ton idée elle est juste ou pas/ comment vérifier si ton idée est juste/ ben / on calcule si ça marche t'as trouvé une technique qui fonctionne/ après on essaye sur d'autres cas pour voir si ça marche encore pour arriver à voir/ si tu peux la généraliser ou pas

CHER: et alors aux élèves qui font 2 fois 3 fois 5 pour faire ça ils font 6 fois 10

BENJ : en 5e ?

CHER: ouais

BENJ : ?

CHER: ça te surprend ?

BENJ : ouais/ je leur fais pas faire en 5e du coup ça/ je leur fais faire en 6e/ mais/ du coup /en 5e ouais ça m'étonne/ et ouais /du coup/ ils en arrivent à faire ça

CHER: qu'est-ce que tu dirais pour corriger

BENJ : ben là c'est pareil/ je dirais la même chose/ fin là je dirais quand même au gamin qu'il aurait pu un peu apprendre sa leçon/ et identifier les opérations qu'il y avait/ attention au signe/ parce que là en gros il développe

CHER: ouais

BENJ : donc là développer quand il y a deux fois/ euh/ développer ça veut dire quoi /c'est transformer un produit en somme/ et elle est où ta somme

CHER: d'accord

BENJ : fin/ tu vois moi en 5e c'est ça hein/ je regarde beaucoup les opérations justement si tu transformes un produit en somme ben là y a pas de somme/ si il avait fait 6 plus 10 j'aurais dit au moins là c'est bien [rires] t'as transformé un produit en somme mais là !! là tu transformes même pas en somme/ donc euh/ qu'est-ce que tu utilises/ qu'est-ce qu'il y a derrière ce que tu as écrit/ est-ce que tu connais ton identité/ fin tu vois ça dépend du stade où t'en es aussi

CHER: oui des outils qu'ils on à leur#

BENJ : mais après le problème d'un gamin qui fait ça c'est qu'il a plus rien appris et il espère que sa logique le guide et après il marche à l'intuition/ et peut avoir une intuition qui est totalement fausse/ parce qu'il apprend pas aussi/ à un moment donné

CHER: et alors pour 4 multiplié par x plus 3 les élèves qui écrivent 12 plus *x* ?

BENJ : [silence] il a écrit 12 d'abord ?

CHER: oui/ c'est marrant hein!

BENJ : mh// ben là je sais pas/ ben l'idée/ des flèches ça peut peut-être l'aider/ on fait deux flèches pour bien montrer que y a deux multiplications/ chaque flèche correspondra à une multiplication et de pas oublier qu'il y a une multiplication à faire

CHER: après c'était celle que tu m'as montré tout à l'heure/ des élèves qui font 2x fois 5x ça fait 10x et alors une rigolote aussi/ c'est 4 multiplié par x plus 4 multiplié par 3 égal 4 multiplié par x plus 3 multiplié par 4

BENJ : ah ouais/ben là c'est étonnant qu'il y ait encore fois 4 à la fin/ ça j'ai jamais vu/ [silence] c'est bête il y était presque/ je dirais que c'est quand même bien hein/ mais attention tu l'as écrit deux fois euh/ j'essayerai de lui demander

CHER: et alors ça/ ça vient d'une de mes élèves

BENJ : en fait d'écrire l'identité tu vois en dessous/ *k a*/ *k b*

CHER: ce qu'une autre m'expliquait très bien/ elle me disait mais de toute façon y a écrit 4 deux fois

BENJ : justement dans l'identité k il est écrit deux fois et puis après plus qu'une seule fois

CHER: ouais tu fais un retour à l'identité

BENJ : ouais un retour à l'identité/ si tu l'as vu avant/ après sur un calcul comme ça si t'as pas vu l'identité avant qu'il te propose une autre technique/ là je fais rappel à l'égalité/ contrôler que son idée à lui est juste ou pas/ là pareil tu peux contrôler l'égalité si elle est juste ou pas en utilisant une calculatrice si c'est une nouvelle technique mais là je suppose que c'était après avoir vu l'identité quand même pour avoir l'idée de faire 2 fois 3 et 2 fois 5 sinon je pense qu'il aurait fait juste là quand même à mon avis/ s'il avait pas vu l'identité d'abord/ je pense qu'il aurait fait juste/ donc là c'est un rappel aux connaissances je pense aussi/ apprendre l'identité/ apprendre les opérations qu'il y a dans l'identité/ c'est pour ça que je fais travailler aussi du coup sur le nom des opérations/ identifier quelle est l'opération/ qu'est-ce qu'on peut faire quand c'est cette opération-là/ qu'est-ce qu'on peut faire quand c'est celle-là// parce que là c'est comme on disait tout à l'heure/ ils en viennent à faire 5*x* fois 2*x* ils arrivent à écrire 10*x* euh

CHER: oui c'est des erreurs qu'on retrouve souvent

BENJ : celle là on la voit vraiment souvent/ s'ils voient quelle est l'opération/ ils savent que la lettre x va pas rester x si c'est /euh/ s'ils ont appris que c'était qu'avec plus et moins/ qu'on garde la même lettre/ et qu'avec fois on obtient un carré du coup et après à partir de là quand c'est vraiment développer ou factoriser c'est revenir à l'identité

CHER: revenir à l'identité

BENJ : et en plus ça leur sert pour les identités remarquables plus tard/ en fait/ c'est vraiment de la transposition/ de mettre à une position/ ben /des opérations et on transpose les nombres ou les expressions/ à la place de *a*/ *b*/ *k* euh

CHER: ouais

BENJ : ou de *a* et *b* dans les identités remarquables/ uniquement

CHER: et donc/ pour les identités remarquables tu me disais que tu avais des copies d'élèves avec des erreurs/ deux ou trois qui sont pour toi représentatives

BENJ : ben voilà/ ben après tu as ceux qui apprennent pas/ tu vois y carré moins 64/ y moins 8 entre parenthèses au carré

CHER: oui c'est une erreur qu'on voit souvent

BENJ : ben c'est parce qu'il a pas appris

CHER: et alors comment tu fais pour retravailler ça/ est-ce que c'est l'écriture de l'identité en dessous ?

BENJ : mh/ ouais c'est la forme/ bon après ça en classe/ après le contrôle c'est difficile de le retravailler je trouve/ ils sont plus mobilisés/ mais avant le contrôle quand ils font ça je leur dis/ non mais attendez /vous écrivez vos trois identités remarquables/ vous avez 6 formes d'écriture ça /ça correspond à quelle forme ? il y a quoi comme opération //il y a un seul moins/ déjà y a pas de parenthèses donc déjà vous enlevez celles où il y a des parenthèses/ y en n'a pas/ et ensuite y a qu'un seul moins/ donc à partir de là vous avez qu'une seule possibilité c'est a au carré moins b au carré/ est-ce que vous avez deux carrés/ parce que c'est pas dit que vous ayez deux carrés/ donc 64 donc normalement ils sont censés apprendre leurs carrés parfaits par cœur donc lui il le savait/ 64 c'est 8 au carré donc il se dit j'ai bien a au carré moins b au carré c'est bon/ donc c'est bien ça la forme que j'ai donc je vais transformer ça en l'autre forme qu'il y a à côté/ j'écris systématiquement les trois identités remarquables à chaque début de cours/ en les faisant rappeler par les uns les autres/ et si je vois qu'ils savent pas en plus c'est contrôle [rires] donc euh

CHER: d'accord

BENJ : mais bon ils sont pas plus motivés alors

CHER: non ? Ah bon alors

BENJ : [rires] non cette année ils sont particulièrement pas motivés/ donc bon/ ça c'est une erreur classique donc après là/ euh/ là c'est pareil c'était pas trop mal/ c'est marrant qu'il y ait le moins 8 qui apparaisse encore je sais pas pourquoi il a fait ça /ou elle

CHER: il a pas factorisé par 6 ?

BENJ : ben/ il a bien vu que c'était 6x au carré qui faisait 36x au carré et 4 au carré qui faisait 16 et il s'est dit il faut que je transforme celui du milieu/ il a retenu que c'était que le premier et le dernier qui lui servait/ il avait pas trop trop suivi en classe/ c'est qui ça/ ah ben c'est un redoublant en plus/ mais il avait pas appris ça/ il m'a dit qu'il avait pas révisé/ voilà t'as la réponse/ il avait pas révisé le calcul littéral/ donc effectivement un gamin qui révise pas aussi/ euh l'intuition elle est// il tente un truc/ mais sans leçon il est pas loin /mais c'est pas non plus la bonne réponse [inaudible] une soustraction deux carrés/ il faut savoir quelle est la dernière opération/ mais ça on l'a un peu travaillé seulement cette année/ c'est vrai que c'était dur pour eux/ et là tu vois/ quand tu connais pas ta leçon tu écris n'importe quoi/ forcément

CHER: mh

BENJ : voilà un élève qui a pas du tout appris/ six et demi/ ah voilà un bon élève/ qui était pas si bon que ça en 4e/ mais qui est relativement sérieux cette année/ et il s'en est bien tiré sur les identités remarquables/ il a même à la fin du programme de calcul il arrive même à factoriser à la fin/ c'est un programme de calcul/ tu choisis un nombre tu soustrais 5 tu calcules le carré/ euh

CHER: est-ce qu'on obtient toujours un multiple de 5 ?

BENJ : et il arrive quand même à factoriser à la fin par 5/ presque/ il met les carrés/ mais il a quand même l'idée de faire la parenthèse moins ça et après la première parenthèse/ plus ça

CHER: euh x moins 5 au carré moins x au carré

BENJ : arrivé jusque là euh/ c'est juste

CHER: à quoi te sert la factorisation ?

BENJ : en fait si tu factorises bien t'as quand même#

CHER: ah pardon/ tu obtiens 5/ d'accord

BENJ : t'as ton multiple de 5 qui apparaît tout seul/ donc en général/ on a tendance à développer x-5 au carré

CHER: ce qui marche aussi/ non ?

BENJ : ouais sauf que t'as pas ton facteur 5 tout de suite

CHER: oui tu factorises aussi après

BENJ : non même pas/ t'as quand même 25 moins 10*x* et donc t'as deux nombres qui sont dans la table de 5 donc forcément/ ton résultat quand tu les additionne c'est dans la table de cinq aussi// tu peux le justifier comme ça aussi // t'es pas obligé de factoriser en fait/ si t'arrive à moins 10*x* plus 25 t'as deux résultats dans la table de 5 sans écrire la factorisation tu peux justifier que c'est dans la table de 5 le résultat

CHER: euh mais il faut savoir alors que la somme de deux multiples de 5 est un multiple de 5

BENJ : ouais il faut l'avancer/ il faut le mettre sur la copie on est d'accord/ c'est pas non plus ce qu'on attend/ moi je leur explique avec la factorisation et celui qui développe et qui arrive à la forme moins 10*x* plus 25 et qui dit comme j'ajoute deux nombres qui sont dans la table de 5 forcément je suis dans la table de 5 je trouve que c'est un bon raisonnement

CHER:O.K.

BENJ : on peut l'accepter quand même

CHER: je suis d'accord

BENJ : la nécessité de factoriser/ n'est pas obligatoire/ c'est le raisonnement de la factorisation de dire que les deux sont dans la table de 5/ sans l'écrire/ tu peux le dire // tiens voilà là t'as le type d'erreur dont je t'ai parlé/ 2 *x* 3

CHER: il écrit quand même que c'est 6*x* après

BENJ : ouais/ et là 10 *z* qui devient 25*z* une erreur d'inattention

CHER: oui c'est bizarre

BENJ : derrière ah oui là carrément 26*x*4 pour deux fois six fois 4 / hein 48 c'est bien 26*x*4

CHER: ah ouais/ mais ça l'empêche pas de finir de factoriser

BENJ : ben ouais/ dans sa tête c'est bien 2 fois 6 fois *x* fois 4 elle a pas écrit les fois/ et par contre quarante huit c'est pas quatre fois huit

CHER: ouais/ c'est rigolo

BENJ : et pareil pour 2 fois 3 elle écrit 23 et elle met 6/ c'est juste qu'est-ce que tu veux dire ?

CHER: ben justement qu'est-ce que tu lui dis ?

BENJ : ben je lui dis non/ apprends/ le fois c'est que entre une lettre si deux fois trois tu l'écris vingt-trois on comprend plus rien alors que 2x on enlève le fois ça change pas grand chose à la compréhension de l'expression de pas écrire le signe fois mais devant un nombre ça change toute la compréhension

CHER: mh

BENJ : mais bon quand tu vois que pour les triangles ils mettent des chapeaux aussi tu te dis que les notations ils sont pas non plus très à cheval dessus

CHER: non mais ce qui est marrant c'est que ça l'empêche pas de travailler

BENJ : ah non/ elle fait un raisonnement correct

CHER: ouais

BENJ : c'est pour ça que c'est pas tout faux/ tu vois pour ce genre d'erreur je mets 3 points sur 4/ c'est pas// parce que ses résultats à la fin sont bons/ donc euh/ limite elle aurait pas écrit son étape intermédiaire on lui aurait mis les points // bon là une erreur classique $y^2 - 64$ elle sait que c'est la troisième mais elle sait pas qu'il faut prendre la racine carrée de 64 elle a écrit (y-64)(y+64) ça c'est un classique

CHER: mh/ alors du coup je voulais te montrer aussi des erreurs de seconde là pour le coup/ pour avoir non pas ton interprétation pour savoir ce qu'on pourrait faire pour la corriger/ c'est pas du tout ça/ c'est juste pour voir si ça te surprend ou si ça te paraît classique/ et ce que tu y vois dans ces erreurs

BENJ : ben ça arrive à quel moment ? Parce que c'est ça aussi

CHER: alors ça arrive si je me souviens bien fin septembre/ alors après avoir refait tout un travail sur le développement et la factorisation/ ça c'est le contrôle/ et la consigne c'est développer les expressions suivantes/ sachant qu'il y en a quatre/ et le B et le C qui sont pas là elle les réussit parfaitement/ et le A et le D sont les deux expressions où elle a des erreurs // je te laisse regarder pour voir les erreurs

BENJ : ben là y'a pas de parenthèses c'est ça ?

CHER: si si elle est là

BENJ : ah elle y est

CHER: ce qui est entouré c'est juste la correction du prof

BENJ : c'est juste le moins un au carré qu'elle a loupé/ moins un au carré elle a mis moins un

CHER: oui

BENJ : alors que là elle supprime les parenthèses comme s'il y avait un moins devant la parenthèse/ ouais/ bizarre ouais/ alors qu'elle développe super bien les identités remarquables

CHER: ouais/ c'est ça

BENJ : [silence] mais elle change pas les signes à l'intérieur de la parenthèse non plus // mais elle fait les trois flèches ou ça c'est le prof ?

CHER: ça c'est le prof

BENJ : ah ouais/ ben c'est bizarre qu'elle change pas les signes alors/ [silence] bon là ça m'étonne pas trop les erreurs de calcul ça peut arriver/ avec le stress du contrôle etc / bon c'est pas trop choquant ça comme erreur

CHER: mh alors regarde ce premier développement aussi

BENJ : oui j'ai pas regardé le début/ alors/ [silence] donc c'est quoi le problème ? C'est là avec un demi ?

CHER: oui c'est là

BENJ : [silence] et là elle met fois ?!

CHER: oui

BENJ : ah ouais c'est bizarre/ j'aurais compris si elle avait mis plus/ mh /// ouais// ben c'est/ je sais pas trop quoi dire/ c'est bizarre/ c'est pas une erreur qu'on retrouve trop au collège/ au collège quand on va pas faire développer deux fois d'affilée mais après euh si ça a été travaillé en classe c'est étonnant // mais on le voit au lycée y a quand même beaucoup de choses d'un coup à revoir/ peut être qu'il y a beaucoup de confusions qui se créent dans la tête de certains/ fin c'est dommage je trouve de faire ce genre d'erreur

CHER: oui parce que euh

BENJ : parce que le plus dur elle arrive à le faire finalement/ le plus dur c'est la double distributivité/ c'est pas multiplier par un demi/ fin prendre la moitié de 4 de 6/ de 12 et de 18 c'est des trucs tout bêtes/ calculer moins un au carré aussi/ et ici prendre le double de chaque c'est pas un problème quoi

CHER: oui ça te surprend aussi

BENJ : ouais/ je pense qu'à force d'en avoir de tous les côtés/ tu vois des expressions très différentes dans tous les sens/ à un moment donné ils maîtrisent plus l'opération/ quelle est l'opération qui est là et c'est vrai que fin/ je pense que ça rejoint les trucs que j'essaye de leur faire faire/ c'est-à-dire bien voir quelle est l'opération qu'ils ont à faire/ quelle est la priorité de calcul dans une expression et en particulier là quand t'as beaucoup beaucoup de calculs/ qu'est-ce que j'ai le droit de faire en premier/ quelle est la priorité

CHER: oui mais là/ pour autant /elle a bien identifié que c'était un produit

BENJ : et ouais ouais/ mais un coup oui un coup non/ fin tu vois quoi c'est un peu confus/ c'est pas non plus très clair dans sa tête/ d'identifier quelle est l'opération à faire/ et quand elle y est / qu'est-ce que je peux faire du coup/ avec des parenthèses/ quand c'est fois/ justement avec des parenthèses qu'est-ce que j'ai le droit de faire/

CHER: mh

BENJ : ouais// mais c'est vrai que c'est surprenant/ c'est euh// bien sur les identités remarquables sur la double distributivité aussi

CHER: mh

[silence]

BENJ : ah mais là c'est plus/ non/ ah non/ c'est bien moins/ là aussi c'est juste// et ben// mh

CHER: et du coup la question que je me suis posée c'est en quoi est-ce que l'enseignement du collège peut amener à produire ces erreurs ou pas ?

BENJ : ben là pour le coup je suis pas sûr que ce soit l'enseignement du collège qui produise ces erreurs-là/ je pense que c'est le fait qu'il y ait d'un coup toutes les notions du collège qui sont censées être acquises au premier mois de seconde alors que / au collège/ on mélange pas tout d'un coup comme ça

CHER: mh

BENJ : et qu'on est en train au collège en plus d'aller sur ce type de problèmes là (*montre les allumettes*) beaucoup plus que sur ce types d'expressions là/ nous c'est ça le euh

CHER: oui de la modélisation tu veux dire

BENJ : ouais/ plus les programmes de calcul/ jusqu'à arriver à la dernière question seulement où tu dois justifier par du calcul littéral et t'as jamais une expression aussi compliquée que ça hein

CHER: non c'est sûr

BENJ : et là tu peux avoir la même que ça sans le 2 ça oui/ effectivement

CHER: mais t'as pas un troisième facteur/ c'est ça ?

BENJ : mais j'ai pas non plus/ ce 2 qui vient multiplier l'identité remarquable qu'il y a derrière donc en fin de trimestre de seconde s'ils ont revu Thalès toute la trigo/ euh/ tout le calcul littéral/ tous les calculs avec les fractions/ euh/ avec les puissances/ avec les racines / donc tout ça c'est pas maîtrisé du tout pour la plupart des élèves qu'on envoie au lycée // elle/ elle va au lycée celle qui euh

CHER: oui avec ses erreurs d'écriture/ mais là pour le coup ça l'empêche pas de travailler

BENJ : mais oui/ mais imagine avec des écritures comme ça/ qu'est-ce qu'elle va comprendre/ à un moment donné/ une élève qui maîtrise pas l'absence du signe multiplié devant les lettres uniquement ou devant les parenthèses/ quand elle va se retrouver devant une parenthèse/ est-ce qu'elle va bien penser que c'est le signe multiplié/ et qu'est-ce que j'en fais de ça /tu vois elle maîtrise pas non plus/ et les autres qui vont aller en seconde et qui n'apprennent rien/ qui ont rien appris en 3e/ alors là en seconde avec ce que tu leur fais faire en un mois euh

CHER: oui / alors là c'est une de mes anciennes élèves qui n'avait aucun souci avec les écritures littérales

BENJ : oui mais est-ce que tu avais fait travailler des choses aussi compliquées que ça en 3e

CHER: non évidemment/ ça/ ça arrive en seconde/ c'est clair

BENJ : le programme de 3e étant tellement léger par rapport à ce genre d'expressions/ comme je te dis moi j'arrive à peine à ce genre d'expression sans le 2 devant/ et il y en a un ou deux seulement qui comprennent donc même si elle /elle y arrivait sans le 2 ben avec le 2 /mine de rien/ plus tout ce qu'il y a à revoir en un mois c'est vrai que c'est pas simple/ est-ce que pour autant c'est une phase d'apprentissage en 3e/ déjà développer quand y en a trois à l'intérieur/ c'est quelque chose qu'on voit pas souvent/ c'est pas clairement écrit dans les programmes en plus

CHER: oui

Annexes du chapitre 3

Transcriptions des séances expérimentées dans une classe de cinquième, en lien avec l’ingénierie didactique, et compléments des analyses *a priori*

TRANSCRIPTION DE LA PREMIERE SEANCE

Le 20 mars 2012

(les élèves s'installent)

P : nous avons/ donc notre séance va s'organiser en deux temps/ la première demi-heure on va travailler en calcul mental/ le calcul mental en revanche/ on le fait en partie AER/ donc vous écrivez le titre/ des calculs/ sur une nouvelle page

(*les élèves s'affairent*)

P : je vous rappelle donc/ qu'on est en calcul mental/ que vous n'avez pas le droite de poser/ vous pouvez recopier les calculs/ et éventuellement écrire des résultats intermédiaires si vous en avez besoin/ mais/ vous n'avez pas le droit de poser et la calculatrice est évidement interdite// on y va

(*P écrit au tableau, les élèves travaillent en silence*)

P : on y va/ le premier/ Chr ?

Chr: 224

P : comment tu as procédé pour trouver le résultat ?

Chr : j'ai fait 7 fois 3 ça fait 21/ euh fois 10 ça fait 210 et après j'ai fait 7 fois 2/ 14 et j'ai additionné

P : tu as additionné quoi ?

Chr : euh/ 210 plus 14

P : qui a eu un autre processus ? Art ? (*dans le fond en même temps/ un élève)* : ben c'est compliqué)

Art : ben j'ai fait 2 fois 7 euh/ 14 je mets le résultat je retiens 1/ et7 fois 3/ 21 plus 1/ 22 et ça fait 224

P : mais attends/ 22 et 4 ça fait pas 224 ça fait 26

Art : non mais/ euh/ c'est pour l'addition

You : mais toi t'as posé

P : mais alors

Art : ouais

P : mais 22 et 4 ça fait bien 26/ je vois pas comment ça fait 224

Art : non mais j'ai posé

P : Enz ?

Enz : moi j'ai fait pareil/ j'ai fait 7 fois 2/ j'ai mis en haut pour retenir la dizaine/ j'ai fait 7 fois 3/ 21 plus 1/ 22 et j'ai pas ajouté 22 à 4/ j'ai mis à côté

P : ah mais non/ parce que c'est pas 22/

Enz : j'ai pris 1 à 4/ j'ai ajouté 1 à 22/ et 22 je l'ai posé devant là

P : oui mais c'est pas 22

Enz : mais si/ j'ai dit 22 plus 1/ mais plus 1 j'ai dit

Art : mais non 21 plus 1

P : oui d'accord/ 21 plus 1 ça fait 22/ mais c'est pas 22/ Mat ?
Mat : c'est 210 et 10
P : et alors ça fait ?
Mat : 220
P : et oui/ c'est pas 22/ c'est ?
Wil : 200
P : 200 ?
Wil : 220
P : c'est 220/ et oui c'est 220 et 4/ là qui donnent 224// le deuxième/ euh/ Ame ?
Ame : 138
P : combien ?
Ame : 138
P : comment tu as fait pour trouver ?
Ame : j'ai fait 6 fois 3/ 18 et on retient 1/ et 4 fois 3/ 12 et 1/ 13
P : ah mais c'est pas 13
Elèves : 130
P : c'est ? Seb ?
Seb : 13 fois 10
P : oui donc/ c'est ?
Ame : 130
P : c'est 130/ oui/ qu'on rajoute à 8// le suivant/ Fla ?
Fla : 1536
Elève : 1536 ?
Elève : ah /je pense pas
Fla : j'ai fait 3 fois 2/ 6/ 3 fois 1/ 3 et 3 fois 5/ 15
P : mais sauf que
Y : madame/ moi/ j'ai
Fla : et j'ai tout mis
P : et tu as tout ?
Fla : mis
P : et tu as tout mis
Wil : à la suite
P : sauf que
Fla : c'est pas juste
P : alors il faut corriger ce que tu dis // qui peut corriger ? oui
Wil : ça fait 1526
P : ah non/ ça fait bien 1536/ Wil ?
Wil : 2 fois 3/ ça fait 6/ euh 10 fois 3 ça fait 30
P : ah/ vous avez entendu ? vous avez entendu ? tu recommences ?
Wil : 2 fois 3 ça fait 6/ 10 fois 3/ 30/ et 500 fois 3/ 150
P : non pas 150
Wil : 1500
P : et qu'est-ce qu'on fait avec tous ces résultats ?
Els : on les additionne

P : d’accord// la suite// sur vos cahiers/ vous vérifiez qu’il y a les résultats/ et les calculs/ et les suivants
(*P écrit au tableau, les élèves copient*)
P : c’est fini// le premier /Cla ?
Cla : 340
P : combien ?
Cla : 340
E : c’est pas possible
P : pourquoi ça peut pas être 340 ?
(*13 min 50*)
Cla : ah/ non je me suis trompée/ euh parce que euh 10 fois 10 ça fait 100/ parce que là si on arrondit à 10 ça fait 20 fois 10
P : oui et ça fait ?
Cla : 200
P : 200/ donc effectivement/ un ordre de grandeur est 200/ ça peut pas être 340/ You ?
You : 204
P : 204 ? comment on fait pour trouver ?
You : j’ai fait 17 fois 10
P : 17 fois 10 ça fait ?
You : ça fait 170 et après j’ai fait 2 fois 17/ ça fait 34 et j’ai additionné
P : et tu as additionné/ et alors/ est-ce que ça fait bien 204 ?
Els : oui
P : d’accord/ qui a un autre processus de calcul ?
(*Silence*)
P : bon /le deuxième /Seb ?
Seb : on fait 68 fois 10
P : oui ?
Seb : six-cent // euh ça fait 680 et on rajoute 11
P : donc ça fait ?
(*brouhaha*)
Gre : non/ on peut pas
Seb : 691
Lis : madame on peut pas
P : 691/ Chr tu es pas d’accord ?
Chr : non
P : pourquoi ça peut pas être 691 ?
Chr : parce que c’est pas plus 11 [inaudible]
(*brouhaha*)
P : Flo ?
Flo : oui voilà c’est pas plus 11
Sop : c’est plus 68
P : ah toi tu dis c’est pas plus 11 c’est plus 68
Sop : oui parce que 68 fois 1/ ça fait 68/ on fait 68 fois 10 ça fait 680 plus 68 fois 1 ça fait 68 et ça fait 748

P : 43 fois 21. Elo ?
Elo : [inaudible]
P : combien ?
Elo : 149
Flo : cent ?
(*brouhaha*)
P : pourquoi c'est pas possible ? Mar ?
Mar : parce que si on arrondit à 43 fois 20 ça va faire euh/ huit cent euh /860
Lis : pourquoi fois 20
(*brouhaha*)
Els : fois 10 ?
P : oui/ si on prend un ordre de grandeur // on arrondit à 43 fois 20/ ça fait 860/ donc c'est trop petit/ ça va pas// qui a un autre résultat ? // Mar ?
Mar : on fait 860/ parce qu'on fait 43 fois 20 et plus euh 43 et ça fait neuf cent /euh
You : 903
Flo : 903
Mar : non huit cent/ euh 873
P : You ?
You : 903
P : 903/ oui 43 plus 60 ça fait 103 plus 800/ 903 // vous vérifiez sur votre cahier/ que vous avez toutes les opérations et les résultats au moins// vous recopiez les opérations si ce n'est pas fait// voici les suivantes
(*P écrit au tableau*)
[*en aparté*: on les pose ces opérations ? / P : non c'est encore du calcul mental / E : mais j'ai pas écrit les calculs / P : ah/ ben écris les vite et je laisserai quelques secondes de plus.]
(*les élèves travaillent en silence*)
P : on continue // le premier // Sop ?
Sop : on fait 13 fois 100 euh 1300 et après on fait 13 fois 2 / 26 // 1300 plus 26 / 1326
P : qui a un autre processus ? de calcul// [silence] Seb tu n'es pas convaincu ?
Seb : non
P : non ? Toi tu aurais dit combien ?
Seb : 1506
P : pourquoi 1506 c'est pas possible ?
You : parce que c'est trop loin de 13 fois 100 ça fait 1300
P : parce que 13 fois 100 c'est // 1300 donc effectivement 1506 c'est beaucoup trop grand// ce serait pas ce 2 des 2 dizaines que tu aurais rajouté au 3 des centaines ? // alors que 13 fois 2 ça fait bien 26 donc 2 c'est bien 20 (*semble montrer au tableau les résultats intermédiaires écrits*) // tu corriges ? // le suivant / 15 multiplié par 104 / Chl ?
Chl : 1560
P : comment tu as fait ?
Chl : euh 15 fois 100 / 1500 / et euh // et 4 fois 15 / 60
P : tout le monde est d'accord ?
Classe : oui
P : 12 multiplié par 203 / Enz ?

Enz : 2436
P : tu peux expliquer comment tu as procédé ?
Enz : j'ai fait euh 12 fois 200 / ça fait 1200 / euh /
P : 12 fois 200 non ça fait pas 1200
Mar : ça fait 2400
Art : c'est fois 100 / 1200
P : 2400 oui / après ?
Enz : 12 fois 3
P : ça fait ?
Enz : 36
P : après ?
Enz : bé /ça fait 2436
P : 2436// 62 multiplié par 1001 / Ili ?
Ili : j'ai pas trouvé
[silence]
Fla : 62 062
P : je t'ai pas interrogé
Ili : 62062
P : oui maintenant qu'il l'a dit// alors est-ce que tu peux expliquer comment on peut procéder pour trouver ?
Ili : on fait 62 fois 1001
P : oui // et comment on trouve 62062 ?
Ili : on fait 62 fois 1000
P : oui et ensuite ?
Ili : 62 fois 1
P : oui et après ? Fla tu termines ?
Fla : on ajoute 1000 fois 62 et une fois 62
P : d'accord // vous prenez un instant pour recopier les calculs et les résultats donc si c'est pas fait et on passe à la dernière série
[*en aparté* : encore ? P : oui E : mais ça fait pas une demi-heure madame ? P : bientôt oui]
(*P note au tableau*)
(*28 min 28*)
P : on corrige/ le premier You ?
You : euh 3440
Art : c'est pas ça
Flo : 3430
You : oui 3430
P : 3430 oui/ tu es d'accord/ comment tu as procédé Y ?
You : j'y arrivais pas au début / mais en fait j'ai fait fois 100 euh 35 fois 100 / et après j'ai fait moins euh / en fait j'ai fait 35 fois 100 moins 35 fois 2 / 35 fois 2 ça fait 70 / j'ai fait 35 fois 100 ça fait 3500 et j'ai fait 3500 moins 70 c'est 3430
(*silence*)
Mar : madame j'ai pas compris
P : vous n'êtes pas d'accord ?

(*brouhaha*) si on est d'accord
Art : si/ 3500
You : en gros j'ai fait 3500 moins 70
Seb : oui c'est bon (*a visiblement vérifié à la calculatrice*)
P : oui en gros il a fait 3500 moins 70
Dans la classe : oui c'est bon
P : oui ça fonctionne bien/
Mar : madame/ j'ai pas fait cette technique [inaudible]
P : Mar ? ah/ qui en a une autre ?
(*silence*)
(*Mar s'engage visiblement dans des arguments avec sa voisine*)
P : la deuxième / Art?
Art : [inaudible]
P : combien ?
Art : 2219
Classe : faux/ comment il trouve ça ?
P : c'est pas possible 2219 / rien que le dernier chiffre ça doit être combien ?
Chr : 21
Classe : 21 fois
P : non le dernier chiffre/ on l'obtient en multipliant 3 par 7
(*brouhaha*)
P : d'accord/ ça doit être 1 / donc ça peut pas être ça
P : Seb ?
Seb : 9041
P : ça peut pas être 9041 pourquoi ?
Seb : euh / 941
P : ça peut pas être 941 pourquoi ? Chl ?
Chl : bé/ si on arrondit euh/ 20 fois euh 20 fois 90 euh non 20 fois 100
P : 20 fois 100 ça fait ?
Chl : 200
P : ah non/ 20 fois 100 ça fait pas 200
Classe : 2000
P : ça fait 2000 donc on doit obtenir un résultat proche de 2000
(*brouhaha*) 2245
P : oui ?
Mar :2231
P : 2231
Classe : comment on fait ?
P : alors comment on procède ?
Classe : 31 ?
Flo ou Enz : ben oui 31
Luc : ah ben y'a un truc
P : comment on procède ? Elv ?

Elv : euh / moi j’ai fait/ j’ai arrondi 97 à 100 / j’ai fait 100 fois 23/ ça fait 2300 / et après j’ai fait / j’ai enlevé 2300 euh 3 fois 23

P : 3 fois 23 ça fait ? (*note au tableau les résultats intermédiaires*)

Elv : euh 69 / et après ça fait 2231

P : Mar ?

Mar : pourquoi 3 fois 23 ?

P : ah pourquoi 3 fois 23 ? / Cla ?

Cla : parce que pour aller de 97 à 100 y’a 3 fin y’a 3 fois // 23 / ben on multiplie 23 / 3 fois 23 en fait / donc du coup on les enlève

P [*en aparté* : arrête] : ca te convient comme explication ? // qui peut encore expliquer ? chut!

Mar : mais je comprends pas

P : Elv ?

Elv : tu dois multiplier 23 par 100 donc il y est trois fois de trop parce qu’on doit obt = normalement tu devrais multiplier par 97 donc après on enlève euh on enlève au résultat les 3 fois de trop donc 3 fois 23 de trop

Mar : mais alors pourquoi on le fait

You : ça fait 35

Mar : pourquoi on enlève pas depuis le début ?

Elo : parce que c’est plus rapide

Elv : c’est plus rapide de faire 100 fois 23 que 90 fois 23

Enz : ah ben oui

Elv : de tête non ?

Mar : ouais

Chr : pas de pied

Art : ah ah

P : on continue / celui-là / Gre?

Gre : 275

P : non / euh pardon

Art : non

Flo : non

(*silence*)

P : c’est pas 275 / Ili retourne-toi / Art ?

Art : 245

P : euh Seb ?

Seb : 475

P : 475 oui / Comment tu as procédé ?

Seb : j’ai fait 25 fois

P : Luc ! tu as fait ?

Seb : 25 fois 20

P : 25 fois 20 ça fait ?

[inaudible]

Chr: 25 fois 20 ça fait 500

P : 25 fois 20 ?

Classe : 500

P : 500 /
Flo : moins 25
P : moins 25 et ça fait ?
Classe : 475
P : 475 / d'accord
P : le dernier // euh Wil ?
Wil : 8259
P : comment tu as procédé ?
Wil : 41 fois 200
P : ça fait ?
Wil : 8200 moins 41
P : et tu as enlevé ? 41
Classe : ah ouais /c'est bon *(vérifications à la calculatrice dans la classe)*
P : ça va ? // vous recopiez donc les calculs et les résultats/ et en dessous/ vous posez// Ili tu arrêtes!
(*brouhaha*)
P : sur votre cahier/ a vous allez devoir poser 4 opérations/ dont je vous distribue la liste sur des petits papiers/ vous n'avez pas tous les mêmes/ en revanche/ vous n'avez qu'un papier pour deux// évidement c'est quand même un travail individuel /vous posez d'abord individuellement chacune des opérations// je vous laisse un petit moment pour ça et ensuite je vous donne la suite du travail
(*brouhaha*)
P : chut
P : allez/ allez
(*35 min 36*)
You : madame/ on a droit à la calculette ?
P : non vous n'avez pas le droit à la calculatrice// chut
P : il faut poser
(les élèves travaillent en silence/ P circule dans la classe/ intervient)
[*en aparté* : tu poses bien comme il faut // inaudible]
P : dès que vous avez fini / vous comparez votre résultat avec votre voisin // chut / chut
P : allez dépêche toi de faire les deux autres
P : maintenant vous avez droit à la calculatrice / attention / vous devez vérifier toute l'opération posée parce qu'il va falloir la recopier toute juste donc vous corrigez toute votre opération / pas que le résultat
(*brouhaha*)
P : chut/ Fla au travail ! chut // chut //tu corriges tout / non / tout / la ligne chut/ chut
P : quand vous avez fini de corriger/ vous mettez au propre sur la feuille blanche que je vous ai distribuée / vos calculs / chut / posés et je ramasse // [inaudible] oui de l'autre côté/ c'est une photocopie usagée évidement vous ne regardez pas de l'autre côté/ vous prenez la partie blanche et vous recopiez les calculs / chut/ Mar / dépêche-toi !// vous mettez au propre / chut / chut /// tu as vérifié que c'est tout juste ? / tu recopies / Dav

(P circule et intervient/ mais inaudible) //celle-là tu as vérifié à la calculatrice ? /// comment on vérifie /// tu prends la calculette /// tu dois trouver l'erreur vous devez travailler ensemble pour trouver l'erreur

P : c'est le moment de mettre au propre vos calculs

(*sonnerie*)

P : vous recopiez maintenant les calculs / Il tu te dépêches! marquez votre nom sur la feuille

TRANSCRIPTION DE LA DEUXIEME SEANCE

Le 20 mars 2012

Les élèves travaillent en groupe de 4. Les échanges collectifs ont été retranscrits (à partir d'un enregistrement vidéo de la séance), ainsi que ceux dans un groupe de 4 élèves : Flo, Seb, Wil et Gre.

P : Professeur
E : élève non identifié

P : partie AER vous devez écrire à la suite de ce qu'on a fait la séance précédente /on doit avoir normalement juste le temps de finir ce qu'on a commencé la séance dernière puis on fera des exercices /pour l'instant je vais vous donner
E : oh/ nous /on était tombé sur le truc qui était là
P : on va travailler sur les procédés de calculs que vous avez utilisés la dernière fois j'ai donc photocopié les calculs que vous aviez posés et j'ai recopié les phrases que vous avez dites pour expliquer comment vous trouviez les résultats de vos calculs/// il s'agit/ je répète /de regarder ce qu'on fait comme calcul intermédiaire que vous employez pour trouver le résultat // le but c'est pas du tout de retrouver les résultats //c'est pour ça que j'ai effacé les résultats // mais il s'agit pas du tout de les retrouver/ mais de montrer les calculs que vous faîtes réellement pour trouver les résultats // et pour ça je vais vous demander d'écrire des égalités en lignes qui montrent ces procédés de calcul /// sur vos cahiers /vous écrivez/ procédés de calculs (*écrit au tableau en même temps*)
E : à la suite de l'AER qu'on a fait la dernière fois
P : je vais vous dicter pour chaque calcul écrire une égalité en ligne qui montre le procédé permettant de trouver le résultat// attention/ j'insiste/ on veut pas du tout montrer que vous retrouviez les résultats mais uniquement les calculs que vous faites après
E : pour les calculs en ligne ou pour le calcul posé ? (*réponse inaudible*)
Flo : on a tous les mêmes ?
(*3 min 43*)
E : pour les calculs en ligne
P : il faut écrire une égalité en ligne qui montre le procédé de calcul en fait / pas le résultat
Flo : madame comme ça ? (*montre son cahier*)
P : oui / une écriture mathématique
P : vous devez écrire 4 égalités
Flo : 4 ?
P : une par calcul
Seb: mais c'est quoi le calcul
Wil : c'est 3 fois 2 + // tiens c'est 4 fois (*5 min 29*)
Seb: c'est bon c'est fort
Gre : on peut faire 43 × 2 86 43 fois 2 46 c'est pas compliqué

P : si si vous avez le droit à la calculatrice mais je vous rappelle que vous ne devez pas/ il s'agit pas de retrouver le résultat il faut écrire une égalité qui montre les calculs intermédiaires

Flo : alors comment faire ? (*il prend la calculatrice*)

Seb: mais on a pas le droit

Flo : si /mais en ligne alors il faut écrire en ligne 43 × 2

Seb: mais non ça il faut pas le marquer

Flo : mais si faut l'écrire!

Seb: mais tu regardes là au début ils marquent pas 512 × 3 ils marquent directement 2 [inaudible] alors là on marque 3 fois 12

Flo : pourquoi fois 12 non / c'est pas 3 fois 12 c'est 43 fois 2// faut marquer /en fait /faut détailler les calculs que tu fais

Seb: ah oui /d'accord 43 fois 2

Flo : on écrit 43 fois 2

Gre : est égal à 86

Flo : on fait 43 fois 2 égal 86 en ligne

Seb: 43 fois 2 ça fait combien ?

Gre : 86

Seb: mais non /mais on n'a pas marqué

Flo : mais faut pas marquer les résultats tu mets 43 fois 2 / plus

Gre : pourquoi tu mets +

Seb: faut marquer le résultat

Flo : mais non

Gre : mais si

Flo : écoutez ! 43 fois 2 plus [y a la caméra] 43 × 2 + 43 × 10 est égal et tu mets le résultat

Wil : non non

Flo : madame on écrit bien en formule mathématique ?

P : oui

Flo : et on marque le résultat là ? (*il montre* 43 × 2 + 43 × 10 =)

P : non on marque pas le résultat juste le procédé qui montre

[inaudible]

Seb: allez on réfléchit

(8min 49)

Wil : pourquoi tu marques ça faut mettre le égal aussi// moi je suis contre

Seb: alors 43 fois 2 virgule

Flo : non pas virgule plus on fait plus Wil regarde 43 fois 10

Wil : 430

Seb: 43 fois 10 qui fait ?

Wil : 430 mais il faut pas le marquer

Flo : et voilà et tu mets un égal et tu mets// et tu marques quoi ? Tu marques rien // bon/ viens on fait celle d'en dessous

Seb: allez c'est trop simple sauf qu'on #

Flo : là on met 3 fois

Wil : [inaudible] 57 fois zéro ?

Flo : non mais là pour une fois il a raison
Seb: ah mais 3 fois 57
(*10 min 36*)
P : il faut faire pour le calcul mental aussi hein
Flo : ah mais madame ça on peut faire l'inverse mettre le 400 d'abord
P : non c'est bien écrit comme ça
Wil : faut faire 57 fois 3
Flo : faut faire 7 fois 403 plus 5 fois
Flo : mais non faut pas faire 403 parce que c'est la prof qui l'a dit plus 50
Flo : non 50
Seb: 5 fois 403 plus 7 fois 403
Flo : mais non attends parce que moi je me suis trompé
Seb: 5 fois
Flo : non mais non non c'est pas ça !
Seb: plus 50 fois
Flo : 57 fois 3 plus 57 fois 400
Seb : (*grossièretés*) vous dites ça puis vous dites qu'on s'est trompés
Wil : fois 20
Flo : où 57 fois 19 ?
Wil : c'est le calcul mental
Flo : 57 fois 19 ?
Wil : 57 fois 20
Flo : mais où tu vois 57 fois 20
Wil : au suivant 57 fois 25
Flo : non mais je t'explique Wil /Wil je t'explique c'est pareil que ça / désolé mais
Wil : sauf que lui c'est pas
Seb: oh le mongol!
Flo : y a la caméra
Gre : le magnétophone
Flo : non mais Wil faut marquer comme ça
Wil : [inaudible]
Flo : oui mais Wil ce calcul là c'est le même que celui là *(Il montre les colonnes de droite et de gauche*)
Wil : mh
P : c'est le procédé à droite il y a les procédés soit les procédés posés soit les procédés en calcul mental
Flo : et les procédés on doit les mettre sous cette forme
P : oui
Flo : ah ben voilà
Seb: on doit faire quoi ?
Flo : ben comme on a fait pour ça (*montre* $43 \times 2 + 43 \times 10$)
P : ton égalité est pas complète là il faut quelque chose à droite
Flo : mais comment on fait on a pas de calculatrice
P : si vous avez droit à la calculatrice

Flo : ah
Gre : si
Flo : ben calcule
Seb: on doit faire quoi ?
P : attention vous devez pas montrer des calculs qui montrent le résultat
Flo : ah bon ?
P : des calculs qui montrent le procédé
Flo : le procédé ? mais on montre le procédé là (*montre* 43 × 2 + 43 × 10 =)
P : ah oui mais ton égalité n'est pas complète /tu as un calcul à gauche il faut un signe égal et à droite aussi
Flo : et ben voilà (*il montre encore* 43 × 2 + 43 × 10 =)
P : mais c'est pas une égalité ça
(*13 min*)
[inaudible]
Seb: ouh /il a fait la gaffe qu'il fallait pas faire
Flo : mais là faut marquer/ là faut marquer le truc là et égal
Gre : 473
Flo : mais faut pas marquer le résultat mais il est con elle vient de me dire fallait pas marquer le résultat alors faut pas le marquer !
Wil : attends moi je vais le dire
Flo : Wil faut pas marquer le résultat
[…]
Flo : tiens regarde ce que j'ai écrit
Seb: faut marquer les résultats ?
Flo : non faut marquer égal et regarde ce que j'ai écrit : 43 fois 12 Wil marque ce que j'ai marqué/// c'est quoi ce que t'as écrit ? 57 fois ?
[…]
Flo : maintenant faut faire le 2
Seb: maintenant on doit faire quoi ?
(*16 min 49*)
[…]
Flo : on continue
(*17min 40*)
Seb: moi je vais vérifier // madame !
(*passage au tableau pour écrire les égalités des groupes)*
Flo : bon vous savez quoi? / eh les gens rajoutez les parenthèses/ rajoutez des parenthèses
P : tu vas au tableau et tu vas présenter une de vos égalités
Flo : mais pour celle là on n'a pas la place
P : pourquoi vous n'avez pas la place ?
Flo : ben sur la feuille
Seb: mais faut tout écrire sur le cahier
Flo : ah/ mais moi j'ai écrit sur la feuille
P : vous collez les fiches si c'est pas déjà fait Ame tu te dépêches d'écrire ton égalité
(*19 min*)

Chut
[…]
P : bien vous arrêtez et vous regardez ce qu’il y a écrit au tableau au tableau chaque groupe est allé copier une égalité […] vous regardez donc toutes les égalités proposées par les groupes et tiens première égalité oui tous les groupes ont des calculs différents // regardez là j’avais demandé une égalité pas deux ici il y en a deux et je rappelle aussi la consigne/ c’est de pas écrire de résultat là cette partie là de l’égalité je suis pas d’accord c’est pas la consigne du tout /// là pareil il fallait qu’une seule égalité alors votre groupe vous choisissez d’effacer une égalité celle que vous voulez/ Ili ? la première égalité (*répète l’élève*) /// maintenant / comment vérifier que / les égalités qui sont écrites au tableau sont justes ? c'est-à-dire comment vérifier que les égalités sont bien des égalités ?
Cla : beh on fait les calculs à la calculatrice
Ili : ben on fait tout
Flo : on fait le calcul
P : on fait les calculs quel calculs ?
Mar : beh les calculs qui sont écrits
P : Chh comment ?
Cla : les calculs qui sont écrits
Flo : ben 43 fois 2 plus 43 fois 10
Chr : ben on fait par heu ce qu’il y a avant le premier égal
P : alors ce qu’il y a avant le signe égal et après ?
Cla : et après beh heu ah oui non // ben si sur celle du groupe d’ Ili je crois comme c’est marqué 120 comme c’est le résultat ben la calculatrice affichera le résultat mais bon
P : oui bon d’accord / ici de toute façon c’est marqué le résultat / sauf que c’était pas ça qu’on vous demandait c’était pas ce genre d’égalité / on veut pas une égalité qui montre le résultat / Dav //mais par contre sur une égalité comme ça (*montre celle de Clo* $7\times30+7\times2=7\times32$) comment on peut vérifier que l’égalité est juste ?
You : ben / on fait // heu on fait l’opération
P : Cla
Cla : on fait 7 fois 2 plus 7 fois 30 et on regarde combien on trouve et après on fait 3 fois 32
P : chut/ tu arrêtes!
Cla : et
P : bon qu’est-ce qu’elle dit Cla en gros ?
E : on fait le calcul
P : oui on fait les calculs allez-y
Flo : tous ?
P : avec la calculatrice tous
Flo : nos calculs ?
P : non non /ceux qui sont au tableau
Flo : les gens /ils faut calculer celui là bas
P : (*un élève dicte les calculs et dit : ça fait* 224) ça fait 224 et après
You : ben 32 fois
P : et ça fait 224 ?
You : ben oui

E : madame après on fait celui là ?
P : non pas celui là parce qu'il montre un résultat vous faîtes celui là
[…]
Flo : c'est bon madame nous Wil l'a approuvé
[…]
Seb: elle est juste celle là
P : on s'arrête You / Mau / Chr /// maintenant les trois égalités qui sont encadrées au tableau sont les trois seules qui ne montrent pas des résultats vous devez les vérifier à la calculatrice rapidement je vous donne encore 10 secondes pour ce qui ne l'ont pas fait au travail
Seb: mais toutes ?
P : non celles qui sont au tableau
Seb: oui toutes celles du tableau
[…]
(27 min)
P : je vous écoute le groupe de Fla pour ce calcul
Fla : moi sur ma calculatrice y a marqué erreur
P : d'accord je passe tout à l'heure/ Ame
Ame : ben moi sur ma calculatrice y a le même résultat
P : c'est à-dire ?
Ame : ben quand je tape (*inaudible mais elle dicte le calcul écrit avec le mot « parenthèse »*) ça donne 11 548
P : ça donne 11548 c'est ça ? et le calcul à gauche ?
You : pareil
P : Ame tu as pas fait le calcul à gauche
Groupe : ben si c'est pareil
P : pareil alors l'égalité est juste ici est-ce que cette égalité est juste ?
E : oui
P : Mau ?
Mau : oui
Seb : mais faut vérifier
Flo : je sais comment vérifier on fait 3 fois 2
P : qu'est ce que vous faites ?
You : on fait d'abord celui d'à gauche
P : et à gauche combien ça donne
Mau : 7572
P : et celui à droite ?
Mau : pareil
P : le dernier calcul
Flo : 516 et 516
P : la dernière égalité ? Flo ?
Flo : 516 et 516
P : sur le cahier vous écrivez : pour vérifier /chut /Chr /je dicte/ pour vérifier une égalité qu'est-ce qu'on fait alors ?

E : on calcule
P : on calcule/ on calcule quoi ?
Seb: ben les égalités
Flo : la première partie et la deuxième
P : Mat ?
Mat : on calcule les opérations
Flo : la première partie et la deuxième partie
P : la première partie c'est/ chut/ la première partie en mathématique ça s'appelle le membre de gauche de l'égalité puis le membre de droite/ chut/ puis le membre de droite
E : et après on regarde si c'est les mêmes résultats
P : et on regarde si c'est les mêmes résultats
(*31min10*)
P : maintenant regardez les égalités/ j'efface celles qui donnent les résultats/ vous regardez celles-là c'est pas ça qu'on veut c'est une égalité elle qui doit montrer le procédé de calcul mais regardez celle là/ là ici/ il y a des résultats intermédiaires mais c'est pas ça qu'on veut c'est une égalité qui/ je vous le rappelle /ne doit pas montrer les résultats y compris les résultats intermédiaires /on veut pas de résultat intermédiaire l'égalité que vous cherchez à faire qui doit montrer le procédé /You/ c'est une égalité d'un nouveau genre même une égalité qui ne montre pas le calcul qu'il y a à faire parce que /regardez là à droite/ il y a le calcul qu'il y à faire ici à droite il y a le calcul qu'il y a à faire et ici aussi à gauche il y a le calcul qu'il y a à faire/ mais c'est pas une égalité qui montre le calcul et le résultat/ c'est une égalité qui montre le procédé de calcul parce que il manque des explications là/ regardez là /dans celle là il manque des explications
You : laquelle ?
P : ben le 20 là et ce 2 ils viennent d'où ?
You : ils viennent de 22
E : de 22
P : mais quel est le lien ? c'est ça que vous montrez pas
Mar : ben 20 plus 2 c'est égal à 22
P : et oui c'est 20 + 2
E : mais comment on peut le montrer?
P : ben oui comment on peut le montrer parce que à droite il y a bien le processus (*recopie le membre de droite et = au tableau*) mais à gauche on veut pas le calcul alors qu'est-ce qu'on peut écrire à gauche qui montre le lien entre 20 et 2 ?
E : ben on écrit 20 + 2
P : si on écrit 20 + 2 ça va pas qu'est-ce qu'il faut écrire à gauche
E : 134 fois 20 + 2
P : 134 fois 20 + 2 ? (écrit sans parenthèses)
Cla : moi je mettrais des parenthèses à 20 + 2
P : oui/ il faut des parenthèses pourquoi?
Cla : ben parce que la multiplication est prioritaire
P : Sop ?
Sop : ben parce que 534 fois 20 c'est pas le bon calcul et on n'aura pas le bon résultat

P : oui /sinon c’est pas le bon calcul sinon il n’y a pas égalité//ben regardez cette égalité à droite vous avez un processus/ je répète /c’est une égalité d’un nouveau genre c’est pas du tout entre un calcul et le résultat on ne veut pas dans l’égalité de résultat intermédiaire à vous donc de produire des égalités de ce genre là et de vous corriger

(*34min 21*)

Seb: on doit corriger quoi ?

Flo : et si faut enlever ce qu’il y a à la fin là à la fin du signe égal

Seb: ah/ à chaque calcul ?

[…] (*dispute*)

P : non/ vous faites les vôtres pas ceux qu’il y a au tableau

Flo : madame mais là on peut pas 512 fois 3 on peut pas décomposer

P : ben

Seb: ben si on peut 512 fois 3 le décomposer/ ben si tu/ tu écris le 3 devant

Seb: moi je regarde des chiffres et des lettres/ ils te donnent des chiffres et tu dois trouver un résultat

Wil : 500 + 10 + 2

[…]

(*dispute)*

Seb: qu’est-ce qu’on doit faire ?

Flo : rien/ regarde/ tu corriges les calculs

[…]

Flo : c’est bon vous avez fini ? / madame!

P : ben là faut les vérifier aussi et il faut faire les deux du calcul mental aussi

Flo : oui et l’autre il est là

P : d’accord vérifiez

(*40 min*)

Flo : Wil tu peux me passer ta calculatrice?

[…]

(42 min 09)

Flo : attends je vérifie retiens ça fait 475/

Gre : attends j’écris

Flo : après 100 fois [inaudible] c’est bon/ tu peux effacer bon/ lui il est juste après

[…]

P : c’est fini ? vous avez vérifié ? et il manque les membres de droite là

Gre : ah bon

P : à droite il faut écrire les procédés

Flo : ils sont tous bons

P : vous recopiez au propre vos égalités

[…]

Flo : eh les gens/ il faut marquer les égalités sur la feuille blanche

[…]

Flo : et là c’est pas un fois les gens/c’est un plus

P : il vous reste 5 min pour recopier sur la feuille pour chacun des 4 calculs les égalités

(*sonnerie*)

Flo : c’est pas fois c’est plus là /non plus c’est pas un fois
(*Wil les autres élèves du groupe corrigent tous*)
Flo : après le égal c’est un plus c’est pas un fois oui c’est moi qui me suis trompé

TRANSCRIPTION DE LA TROISIEME SEANCE

P : les cahiers/ vous les ouvrez partie AER/ si vous avez la place à la suite des égalités que vous avez écrites l'autre jour en groupe / et on continue donc sur les égalités sur lesquelles vous avez travaillé la séance dernière et si on a le temps à la fin/ on devrait avoir le temps de corriger les constructions de parallélogrammes qui étaient à faire pour aujourd'hui// vous pouvez vous asseoir// chut /// donc/ aujourd'hui/ stop /chut/ aujourd'hui/ chut/ l'objectif de cette séance c'est de regarder les égalités que vous avez produites/ et j'en ai rassemblé/ recopié un certain nombre qui montre quelque chose de commun/ et l'objectif donc de cette séance c'est d'identifier cette chose commune/ qu'on voit sur ces égalités/ et de les rédiger et de l'utiliser// donc pour l'instant /vous collez ce que je vous distribue/ vous regardez les égalités en essayant de trouver une certaine ressemblance

(*distribution*)

P : Enz ça y est tu as trouvé la chose commune ? tout ce qu'on pouvait dire ? chut

(*les élèves travaillent individuellement*)

P : alors qu'est-ce que vous voyez comme chose commune ? Lis ?

Lis : ben/ les parenthèses

P : y a des parenthèses/ est-ce que tu peux être un peu plus précise

Dav: c'est tous des fois

P : toi tu dis c'est tous des fois ?

Clo : des multiplications

Dav : c'est tous les / les premiers chiffres

P : tous les premiers ?

Dav : y a les premiers chiffres là après y a des fois

Chr : par contre pour le dernier c'est un moins

E : non pas tous

P : alors pas tous/ mais est-ce que y a un fois au dernier ?

You : oui au dernier y a un fois

Ili : y a qu'un signe égal

Dav : y a qu'un chiffre

P : Il y a qu'un signe égal et toi tu dis y a des fois ? qu'est-ce qu'on peut dire sur ces fois Wil ?

Wil : Ben à chaque fois y a un fois et un plus/ y a un signe égal et après y a deux fois et un plus

(*P prend des notes au tableau*)

P : non non surtout vous n'écrivez rien pour l'instant/ on verra tout à l'euhre ce qu'on écrit /pour l'instant je prends des notes de ce que vous dites/ donc Wil il dit à chaque fois y a un fois et un plus et à droite il y a?

Wil : deux fois et un plus.

P : deux fois // et un plus//quoi d'autre ? qu'est-ce qu'il y a d'autre de commun ? // Elo (*6min*)

Elo : à la première égalité en fait / c'est pour avoir le chiffre euh/ qui multiplie et ben en fait c'est entre parenthèse le chiffre qui multiplie que à la deuxième en fait il est décomposé en deux fois ou euh en dix fois //

P : vous voyez ce dont parle Elo ?

Classe : non

P : Elo tu vas venir au tableau montrer ce dont tu parles/ parce que / je recopie donc la première égalité / la première dont tu parles / tu viens montrer / expliquer là ce que tu dis ?

(*P écrit au tableau : 17 × (10 + 2) = 17 × 10 + 17 × 2, Elo vient au tableau*)

Elo : ben par exemple euh 10 plus 2 c'est euh c'est un peu la décomposition de 17 fois 10 et de 17 fois 2 //

Dav : hè ?

(*brouhaha*)

Elo : c'est un peu [inaudible] et après on fait les calculs

P : quelqu'un peut aider Elo pour terminer sa pensée ? Chr ?

Chr : ben 10 plus 2 ça fait 12 alors on a décomposé [inaudible]

P : euh je crois qu'Elo veut essayer d'expliquer le 10 et le 2 non ?

Elo : oui voilà

P : c'est ça ?

Elo : voilà en fait c'est les multiplicateurs enfin c'est=

P : ah on dit pas les multiplicateurs/ comment on dit ?

(*brouhaha*) le nombre multiplicateur

P : c'est pas le multiplicateur/ comment on dit ?

Lis : c'est le dividende

P : non

Flo : non/ le dividende c'est dans la division

E : le facteur

P : oui oui oui/ c'est un facteur/ alors donc tu parles d'un facteur/ de quel facteur ?

Elo : [inaudible / 17 ?] c'est le facteur / ben en fait c'est là en fait les deux ils sont par un / et là en fait y a deux fin

Mar : ah j'ai compris

P : tu as compris Mar ? tu peux le dire autrement ?

Mar : en fait/ elle dit que 10 plus 2/ ça reprend le fois 10 et le fois 2

(*8 min 06*)

P : alors est-ce que ça c'est une chose commune à toutes les égalités ?

Classe : ben oui

E : à chaque fois ça reprend

E : ça fait pareil

P : chaque fois ça fait pareil/ ça reprend Cla ?

Cla : à chaque fois ça reprend le facteur entre parenthèses

P : alors ça reprend le facteur entre parenthèses/ où ?

Cla : dans la multiplication qui suit/ enfin dans l'égalité/ enfin euh/ dans le membre de droite

P : dans le membre de droite/ euh tu peux répéter ta phrase j'ai oublié (*P note au tableau sous la dictée de l'élève*) à chaque fois ça reprend ?

Cla : les facteurs qui sont entre parenthèses qui sont dans le membre de gauche/ ils sont pris dans le membre de droite

(*8 min 42*)

P : à chaque fois ça reprend les facteurs qui sont entre parenthèses/ dans le membre de droite

Clo : le 17 revient deux fois

P : ah le 17 revient/ qu'est-ce que c'est ce 17 ?

E : le multiplicateur

P : est-ce que à chaque fois ça revient deux fois ?

Classe : oui

P : non c'est pas le multiplicateur

Classe : le facteur

P : le facteur/ et alors est-ce que ça /ça se voit sur toutes les égalités Enz ?

Enz : (…)

P : Mau arrête d'écrire c'est pas le moment!/ Enz ? est-ce que c'est une chose commune ça ?

Enz : ben oui

P : oui/ qu'est-ce qu'on voit à chaque fois ?

Enz : à chaque fois ça reprend le même chiffre

P : à chaque fois ça reprend le même chiffre/ lequel ?

Enz : ben celui qui est devant la parenthèse

Wil : ce qui est entre parenthèses est repris dans le calcul suivant

P : mais je crois que c'est pas de ça que vous parlez/ vous parlez du 17/ c'est pas celui qui est entre parenthèses le 17// regardez les égalités

(*silence*)

P : Enz ?

Enz : j'ai trouvé une autre chose commune

P : euh on finit avec les 17 avant une autre chose commune/ est-ce que le 17 qu'on reprend à droite deux fois/ c'est une chose commune de toutes les égalités?

Dav : oui puisque celle d'après c'est 62 qui est euh/ c'est 62 qu'on reprend deux fois // après y a le 86/ le 68 et et

Chr : etc.

Art : ah ouais

P : alors qu'est-ce que c'est ? ce // on reprend deux fois oui ?

Dav : le facteur

Art : commun

P : est-ce qu'on peut améliorer cette phrase ? on reprend deux fois le facteur ? (*P n'a pas entendu Art !*) Mar ?

Mar : ben qui est pas additionné/ qui est pas// et après fin je pense que on pouvait faire 10 + 7 fois 12

P : alors ce dont tu parles c'est une égalité comme la dernière// regardez la dernière /quelle est la différence avec/ entre la dernière et les autres ? mais surtout/ comment ?

E : 500 est pas repris deux fois

P : 500 n'est pas repris deux fois

(*brouhaha*) 22
P : mais est-ce qu'il y en a un qui est repris deux fois ?
Classe en cœur : 22
P : c'est 22/ alors/ y a quand même une chose commune ?
You : 22 est repris deux fois
P : 22 est repris deux fois// Clar ?
Clar : oui mais en fait c'est le chiffre qui est pas entre parenthèses qui est repris deux fois
P : c'est le chiffre qui est pas entre parenthèses qui est repris deux fois
Classe : le facteur
P : c'est le facteur qui est pas additionné/ qui est pas entre parenthèses/ c'est ça ? (*P écrit au tableau*) Enz qu'est-ce que tu as vu comme autre chose commune ?
Enz : ben en fait le 10 euh le 10 et le 2 [inaudible] dans le calcul qu'on voit sur la droite
P : oui effectivement
You : à tous
P : à tous/ alors comment on peut le dire pour toutes les égalités ?
Flo : on multiplie le chiffre entre parenthèses par le premier chiffre
P : alors le chiffre entre parenthèses/ au lieu de dire le chiffre entre parenthèses/
Lis : le facteur
P : euh c'est pas des facteurs parce que là entre parenthèses qu'est-ce qu'il y a comme opération ?
Classe : l'addition
P : une addition/ alors c'est pas des facteurs pour les additions/ ça s'appelle ?
Classe : la somme
P : la somme/ ça c'est l'écriture de l'addition/ non/ chacun des nombres qu'on ajoute on appelle ça ? Elv ?
Elv : [inaudible]
P : non/ on l'a appris/ ce sont des termes
Classe :ah oui
P : alors/ comment on peut le dire du coup ? les termes ?
[silence]
P : qu'est-ce qu'on fait des termes ? qui sont écrits à gauche à chaque fois ?
Wil : ils sont tous placés entre parenthèses
P : oui ils sont tous placés entre parenthèses/ et qu'est-ce qu'on fait à chaque fois à gauche ? Cla ?
Cla : on le multiplie par le chiffre devant la parenthèse
Dav : le facteur
Mau : faut l'écrire ?
P : non/ alors on multiplie les termes par/ par quoi ?
Classe : le facteur
Cla : le facteur qui y a dans l'opération
P : le facteur qui y a/ qui est // oui qui est dans l'opération/ et donc ça vous dites que ça va/ c'est ça ? qui voit une autre chose commune ? oui?
X : c'est tout le temps des additions dans les parenthèses
P : c'est tout le temps des additions ?

Classe : non/ pas le dernier

P : le dernier c'est pas une addition ?

(*14 min 15*)

(*clameur*)

Fla : ah mais avant le signe égal

P : ah oui/ c'est à droite du signe égal c'est vrai qu'il y a des parenthèses dans le dernier à droite du signe égal

Art : mais elles servent à rien

P : pourquoi elles servent à rien ?

Art : ben on sait que la multiplication est prioritaire sur l'addition donc c'est le même qu'avant

P : oui c'est vrai/ donc finalement ces parenthèses qu'elles y soient ou pas/ ça/ euh / y a rien de particulier/ Wil ?

Wil : c'est toujours dans le même ordre/ c'est fois plus et c'est toujours dans le même ordre

P : c'est toujours dans le même ordre// alors première chose qu'on va écrire maintenant/ on va écrire que à droite/ les parenthèses autour des multiplications sont inutiles/ (*P dicte*) car la multiplication est prioritaire par rapport à l'addition

(*16 min 09*)

P : alors maintenant/ regardez ce qu'il y a écrit au tableau/ donc j'ai pris des notes de ce que vous disiez (*P lit ce qu'il y a écrit au tableau*)

- à chaque fois il y a un signe plus et un fois et à droite/ deux fois et un plus
- il y a un seul signe égal
- à chaque fois ça reprend les facteurs entre parenthèses dans le membre de droite
- on reprend deux fois le facteur qui est pas additionné entre parenthèses/ et à droite on multiplie les termes par le facteur qui est dans l'opération.

P : est-ce que vous voulez améliorer ces phrases/ en supprimer certaines ou est-ce qu'on garde tout ?

Art : en supprimer

Mat : il y a qu'un signe égal en fait l'exercice c'était de faire qu'une seule égalité/ donc c'était obligatoire

P : oui/ c'était obligatoire donc effectivement/ on peut l'enlever/ d'accord

Mat : un fois et un plus on peut mettre une multiplication et une addition

P : oui ce serait mieux/ une multiplication (*corrige en même temps au tableau*) /// Dav/ il s'agit de travailler les formulations pour les améliorer/ donc il y a une multiplication et une addition et à droite donc deux multiplications et une addition (*Mat dicte)* ensuite ? regardez les deux phrases suivantes// est-ce qu'on peut pas le résumer en une seule phrase ? y a un peu la même idée non ?// Clar ?

Clar : à chaque fois on reprend les facteurs entre parenthèses dans le membre de droite et le facteur qui est pas additionné pour euh le multiplier

P : vous relisez la phrase qui est proposée ? donc / à chaque fois on reprend les facteurs entre parenthèses dans le membre de droite et le facteur non additionné pour le multiplier

You : ça va

P : bon si ça vous convient/ j'efface la deuxième phrase/ ça résume les deux et vous recopiez/ ça fait donc trois phrases

Art : mais y a trois choses communes alors
P : ben moi je dirais qu'il y a une chose commune qu'on décrit avec trois phrases.
(*les élèves copient en silence/ P circule*)
(*21 min*)
P : oui oui on fait tout en partie AER/ non /// alors la suite toujours en partie AER l'exercice // maintenant qu'on a identifié une chose commune/ l'idée c'est de se demander si on peut l'utiliser pour produire des égalités/ cette fois donc on n'a plus de procédure décrite de calcul mental ou de calcul posé/ on a juste cette chose commune qu'on a regardée/ qu'on a identifiée et est-ce que avec ça vous pouvez écrire directement des égalités ? // alors je vais vous proposer des calculs/ et vous essayez d'écrire des égalités du même type qui montrent cette chose commune // alors voilà le premier calcul : 156 multiplié par 78/ j'écris calcul et en dessous/ je vous demande d'essayer d'écrire une égalité qui utilise ça
Wil : on a le droit à la calculatrice ?
P : alors vous avez le droit à la calculatrice/ mais pour quoi faire ?
Wil : pour vérifier
P : pour vérifier/ donc en dessous/ vous marquez / vérification de votre égalité
Dav : si on n'a pas de calculette on peut pas vérifier ?
P : si si on peut/ mais tu emprunteras une calculatrice
Dav : ah
P : mais tout à l'heure/ d'abord Dav il s'agit d'écrire le calcul puis l'égalité
You : on fait comme sur la feuille l'égalité ?
P : sur votre feuille
You : non je veux dire comme ça ?
P : il faut que ce soit du même type oui/ qui utilise cette chose commune oui
Dav : on écrit tout ?
P : oui vous écrivez tout
(*les élèves travaillent en silence, P note au tableau les produits suivants*)
You : la vérification comment on fait ?
P : ah comment on fait pour vérifier que ce qu'on a écrit est bien une égalité / Flo
Flo : d'abord on utilise euh si y a la chose commune
E : on fait les calculs (*dans le fond*)
P : ah la chose commune c'est pour écrire l'égalité/ mais comment on vérifie que vous avez écrit quelque chose qui est bien une égalité ? Wil
Wil : on effectue les calculs/ et ceux-là et on vérifie si ils donnent le même euh
P : on vérifie oui que les calculs donnent le même résultat
X : on utilise la calculatrice pour trouver les résultats ?
P : oui
Art : t'as la calculatrice ?
(*P va voir Art*)
P : attention/ le résultat ne sert qu'à la vérification/ d'abord vous devez écrire des égalités qui utilisent la chose commune qu'on a vue sur les égalités que vous avez produites
(*22 min*)
(*P circule dans la classe, donne des indications, les élèves travaillent*)

(*au loin*) : madame// comme ça ?
P : à gauche oui/ mais dans une égalité il faut un membre de droite
[au loin : P : on te demande d'utiliser la chose commune/ à gauche d'accord/ [inaudible]]

P : elle est juste mais elle est pas du même type que celle là // si c'est ça/ on a identifié une chose commune dans les égalités/ on te demande d'en produire une maintenant
X : madame il faut écrire les résultats des vérifications ?
P : pour ceux qui ont déjà fini/ je vous donne deux calculs de plus en bonus/ les autres vous vous dépêchez// chut
[…]
You : madame ça sert à quoi / [inaudible]
P : non/ comment tu fais pour savoir si c'est juste?
You : ah ben on fait 15 fois 103 ça doit être égal à 100 fois 15 [inaudible]
P : oui
[…]
(*35 min*)
(*des élèves passent au tableau*)
P : tu écris la vérification Mat ?
(*37 min*)
P : pendant que Dav finit/ qui peut donner une égalité pour ce troisième calcul ? Ame ?
Ame : euh 9 plus entre parenthèses 300 plus 5 fermer la parenthèse
(*des élèves se manifestent*) : qué plus/ non fois/ fois!
Ame : euh oui fois
P : souvenez-vous de la chose commune/ qu'est-ce qu'il doit y avoir à gauche ?
Chr : une multiplication et une addition
Enz : le facteur
P : ensuite ?
Ame : égal 9 fois 300 plus 9 fois 5
P : la vérification/ qui peut la donner pour cette égalité ? Sop ?
Sop : 9 fois 300/ 9 fois entre parenthèses 300 plus 5 est égal 2745 et 9 fois 300 plus 9 fois 5 est égal à 2745
P : bien/ Wil ?
Wil : il y a un problème
P : oui/ quel est le problème ?
Wil : y a 156 fois 78 et [inaudible] tout seul // on sait pas comment t'as fait
P : ah mais 156 multiplié par 78 est-ce que ça ne correspond pas au premier calcul/ ici qu'est-ce qu'elle fait la calculatrice pour ce premier calcul ? Elv ?
Elv : elle fait d'abord 70 plus 8 / ça fait 78
P : elle fait d'abord 70 plus 8 entre parenthèses ça fait 78 et après elle multiplie par 156 donc ce qu'elle fait c'est bien le calcul de départ // ensuite/ donc ici pour la vérification que propose Mat ? qu'est-ce qu'elle écrit là ? Art ?
Art : le membre de
[d'autres] : l'égalité à gauche
P : elle écrit d'abord l'égalité à gauche/ et après le résultat/ et après qu'est-ce qu'elle écrit ?

Sop : et l'égalité à droite

P : l'autre membre de droite et après le résultat //ici la vérification y a écrit // c'est juste car dans les deux calculs je trouve le même résultat (*P lit au tableau*) /c'est vrai aussi

X : mh

P : cette phrase elle doit être écrite quelque part pour expliquer ce que vous faîtes// ici la vérification/ donc de la même façon il y a écrit les calculs à gauche/ les calculs à droite et ici il manque la vérification Ili?

Ili : je l'ai pas fait

P : d'accord/ sauf qu'il y a quelque chose de bizarre dans cette égalité/ regardez

X : 13 plus 2

P : 13 plus 2 oui/ Mar ?

Mar : ben ça fait 15

P : oui ça fait 15 et alors ?

Mar : et alors ben

Chr : y a pas de 15 dans la seconde

X : il aurait dû mettre 10 plus 3

(*discussion dans la classe*)

P : oui il aurait dû mettre 10 plus 3

Mat : ou 11 plus 2

P : ou 11 plus 2 oui pourquoi ?

Mat : parce qu'il faut que ça fasse 13

P : oui il faut que ça fasse 13

Chr : parce que sinon ça donnerait pas le même résultat

P : oui oui c'est pas le même calcul// alors la vérification 387 multiplié par 10 plus 3 ça donne combien / Mar ?

Mar : 5161

P : et l'autre ? 387 multiplié par 10 plus 387 multiplié par 3 ?

Mar : 5161

(*41 min*)

P : oui oui/ alors maintenant/ regardez vos égalités/ qu'est-ce qui vous fait dire que chacune des égalités sont bien du même type que // ah non c'est juste on a vérifié // mais qu'est-ce qui vous fait dire que c'est bien du même type et que ça utilise la chose commune qu'on a regardée tout à l'heure ?

You : c'est pareil sauf que c'est pas les mêmes chiffres qu'avant

P : c'est pareil sauf que c'est pas les même chiffres / qu'est-ce qu'on a dit de la chose commune ? Ili

Ili : (*silence*)

P : ben c'est encore écrit au tableau // Seb ?

Seb : (*silence*)

P : euh c'est au tableau

Seb : (*lit le tableau*)

P : à droite on multiplie bien par le facteur qui est pas additionné/ est-ce que c'est vrai à chaque fois ?

[You/ Flo/ d'autres] : ben oui/ euh/ oui

(*42 min*)

P : à droite/ on multiplie les termes /chut/ Seb / Ili/ ça commence à bien faire/ tu as une correction à prendre/ toi aussi/ et la moindre des choses c'est de participer et de travailler!/ je repose ma question/ qu'est-ce qui vous fait dire qu'à chaque fois que vous avez écrit les égalités/ vous utilisez bien la chose commune qu'on a regardée tout à l'heure ? You ?

You : ben si chaque fois/ à chaque fois c'est/ c'est la même formule sauf que c'est pas les mêmes chiffres quoi

P : c'est-à-dire ? qu'est-ce qu'on regarde pour savoir que c'est bien du même type ? Flo ?

Flo : ben y a un signe égal

P : d'accord y a un signe égal

Flo : y a une multiplication/ une addition avant le signe égal et deux multiplications et une addition après

P : Mau ?

Mau : y a euh 156 après le signe égal

P : oui il est après le signe égal/ qu'est-ce que c'est ce 156 ? Cla ?

Cla : c'est le facteur

P : c'est le facteur oui/ Mar ?

Mar : et on multiplie les termes par le facteur qui est dans l'opération

P : oui on multiplie bien les termes par le facteur qui est dans l'opération

(*43 min 30*)

P : d'accord/ bon/ alors maintenant avec cette chose commune/ vous avez réussi à écrire des égalités/ et vous avez vérifié que ce que vous avez écrit c'est bien des égalités à chaque fois parce que quand vous faîtes le calcul/ vous vérifiez/ c'est bien égal/ et la question qui va se poser là maintenant/ c'est pourquoi ça marche/ on a envie de dire que ça marche tout le temps

[un élève au loin] : ben peut être

P : d'où ça vient le fait que ça marche de faire ce que vous faîtes dans vos manipulations d'écriture pour produire des égalités/ pourquoi ça marche ?

You : parce que vous avez dit que c'est juste

P : ben non c'est pas moi qui vous ai dit que c'est juste/ comment vous avez fait pour savoir si c'était juste ou pas ?

X: on a utilisé la calculatrice

P : vous avez utiliSeb la calculatrice pour calculer/ Mar ?

Mar : et ben on le sait parce que à tout ça reprend

P : et alors ça pourrait reprendre sans que ce soit juste

Mar : ça reprend 70 et 70 parce que [inaudible] juste le lien 70 plus 8 ça fait 78

P : oui mais à droite y a pas 70 plus 8/ Cla ?

Cla : c'est parce qu'on en a fait plusieurs et on retrouve/ on a retrouvé les mêmes résultats

P : ah oui on en a fait quelques uns et on a envie de dire que ça marche tout le temps/ et la question c'est pourquoi/ donc vous marquez/ pourquoi cette utilisation de la chose commune donne bien des égalités ? de dire que ça marche tout le temps /// alors pour ça on va regarder rapidement sur un exemple/ le troisième/ 387 multiplié par 13 // qu'est-ce que c'est 13 fois 387 ? You ?

You : 387 fois 10 plus 3 entre parenthèses

P : non non/ ça c'est l'utilisation de la chose commune/ fin si oui /d'accord/ si on écrit autrement/ mais l'idée c'est de revenir à la définition de 13 fois 387/ la définition de 13 fois 387 c'est Clar ?

Clar : c'est multiplier par 10/ et ajouter à 387 et après multiplier par 3/ 387

P : et non/ non 13 fois 387/ c'est 387 plus 387 plus 387 plus

Flo : 13 fois

P : et oui/ un deux trois quatre cinq six (*compte les termes*)

Ama : mais ce serait pas mieux d'écrire par 5

Wil : mais en fait on fait des regroupements

(*discussions des élèves*) : ouais mais c'est logique 387 / 13 fois

P : et après vous dites ? on fait des regroupements oui/ comment on fait des regroupements ? Mar ?

Mar : on fait ben là on en prend 10 de 387

P : on en prend 10 (*recopie les 10 premiers termes*) comment je marque que je fais un regroupement ? comment on le marque en mathématiques qu'on le regroupe ?

E : égal/ euh/non

P : non on /on met des parenthèses pour dire qu'on regroupe/ donc on en regroupe 10 et après ? (*répétant un élève*) on en regroupe 3 /// pourquoi on a le droite de regroupe ?

X : parce que ça fait 10 plus 3

Mar : parce que ça fait toujours la même chose

P : pourquoi ça fait toujours la même chose ?

Plusieurs élèves : parce que 10 plus 3 ça fait 13

P : Mat

Mat : parce que c'est additionné

P : oui parce que c'est additionné/ et qu'est-ce qu'on sait de l'addition ?

SoP : et ben que ça se fait comme ça

P : ça se fait pas comme ça/ ça se fait ?

[plusieurs élèves] : dans n'importe quel ordre

P : dans n'importe quel ordre on peut regrouper parce que c'est une addition (*écrit en même temps*) / mais alors du coup/ quand on a regroupé les dix premiers termes qu'est-ce que c'est ?// c'est la multiplication de 387 par 10 chut/ arrête! // et l'autre regroupement ? qu'est-ce que c'est ? / Mat ?

Mat : 387 fois 3

P : 387 multiplié par 3 / 3 fois 387/ et entre les deux c'est une addition donc on ajoute ces deux là mais alors on se retrouve avec 387 multiplié par 13 qui est la même chose que 387 multiplié par 10 plus 3 égal 387 multiplié par 10 plus 387 multiplié par 3// ce qui explique ça c'est cette décomposition là// c'est la définition de la multiplication// alors évidemment on imagine bien que si c'était 65 par 13

[inaudible]

P : oui oui on écrirait 65 plus 65 plus 65 // si c'était 83 multiplié par 28 ?

Classe : 83 plus 83

P : pareil en effet/ 83 plus 83 plus 8// et on ferait les regroupements/ donc on voit bien que ça/ ce raisonnement qu'on vient de faire on peut le faire pour n'importe quels nombres entiers// alors maintenant je vous laisse l'écrire

Art : et si c'est par 1000 ?

P : ben pareil on écrit une addition de 1000 termes

Art : oh ben c'est long

P : oui mais on va pas le faire

Art : ah// on écrit ça ?

P : vous écrivez ça/ oui oui// on marque même 387 plus 387 plus

P : oui/ oui tout.

[…]

(*les élèves copient*)

(sonnerie)

TRANSCRIPTION DE LA QUATRIEME SEANCE (1)

30 mars 2012

P : chut/ partie AER/ chut
[dans le fond] : on va faire le truc des calculs
P : oui // devant vous / vous devez avoir la liste des égalités qu'on avait regardées/ qu'est-ce qu'on avait regardé sur ces égalités Enz ?
Enz : si elles étaient bien égales
P : comment on fait pour vérifier qu'elles sont bien égales justement ?
Classe : on calcule
Enz : [inaudible]
P : Sop ?
Sop : on fait le calcul à la calculatrice
P : quel calcul on fait à la calculatrice ? Elo ?
Elo : on fait le membre de droite/ on regarde le résultat/ et après on compare avec le résultat du membre de gauche
P : on compare avec le résultat du membre de gauche/ chut / retourne toi ! // bon / elles étaient bien égales/ et qu'est-ce que je vous avais demandé de regarder sur ces égalités ? Wil ?
Wil : une chose commune
P : y avait une chose commune/ qu'est-ce que c'était cette chose commune ?
Clo : le fait qu'elles avaient deux
P : Chr ? tu peux le dire
Chr : le fait qu'elles étaient toujours la même répétition de calcul
P : comment on l'avait dit ?
Elo : y avait deux divisions/ euh deux multiplications
Chr : une multiplication et une addition dans chaque début et à la fin y avait deux multiplications et une addition
P : oui/ comment est-ce qu'on l'avait dit autrement encore ?
(*un élève râle*) [inaudible]
P : c'est écrit dans le cahier évidemment
Seb : chaque fois ça reprend le facteur
P : chaque fois ça reprend le facteur/ Enz ?
Enz : à chaque fois y a une addition et une multiplication et à droite deux multiplications et une addition
P : Chr l'a déjà dit/ comment est-ce qu'on l'a redit autrement ? Mat ?
Mat : on multiplie les termes par le facteur qui est dans l'opération
P : on multiplie les termes par le facteur qui est dans l'opération/ oui/ qu'est-ce que c'est le facteur ? Mar ?
Mar : c'est le nombre qu'on multiplie
P : c'est le nombre qu'on mutliplie /oui /et qu'est-ce que c'est un terme ? You ?

You : je crois que c'est celui qui revient deux fois

P : Art ?

Art : c'est ce qu'on trouve

P : non c'est pas ce qu'on trouve/ non/ Flo ?

Flo : c'est ce qu'on ajoute

P : oui/ ce sont les nombres qu'on ajoute/ maintenant/ vous vous souvenez qu'on avait vu pourquoi est-ce qu'à chaque fois on obtenait des égalités /Séb/ on avait vu ça sur un exemple c'était l'exemple de 13 fois 387/ comment on avait fait pour montrer/ (*un élève interrompt)* : on avait fait fois 13

P : comment ? //

X : on avait écrit 13 fois 387

P : oui/ et comment on avait fait pour montrer que c'était effectivement/ que ça conduisait effectivement à l'égalité ? Cla ?

Cla : on avait écrit 387 fois 13 égal à 387 plus 387/ 13 fois

P : il y avait effectivement 13 termes/ et après comment on avait fait ? Elo ?

Elo : on avait mis entre parenthèses 10 euh 10 termes/ plus 3 termes

P : oui et ça donnait donc la décomposition en 387 multiplié par 10 plus 387 multiplié par 3/ maintenant Enz on se dit évidemment que cette décomposition on peut la faire avec n'importe quels nombres entiers/ et la question qui se pose c'est / et les autres types de nombres ?

You : en fractions ?

P : ah/ et en fractions ?

X : décimal ?

P : et les nombres décimaux ?

You : on peut pas le faire

P : on peut pas faire quoi ?

You : ben ça

P : on peut pas faire ça effectivement (*en écrivant*) pour les fractions et les autres types de nombres/ on ne peut pas faire ça c'est-à-dire écrire cette décomposition qui donne la preuve/ You ?

You :[inaudible]

P : alors You dit/ pour 10,6 on pourrait dire que c'est 10 plus 0,6 vous êtes d'accord ?

oui

P : oui oui bien sûr mais la question qui se pose c'est que puisqu'on peut pas écrire cette preuve est-ce qu'on peut quand même écrire des égalités du même genre que ce qu'on a écrit depuis le début

[en fond de classe] : oui

P : avec ces autres types de nombres/ les fractions/ les décimaux ?/et ben oui seulement ça on peut pas dire pourquoi/ on peut pas en l'état actuel des choses en 5^{e} expliquer pourquoi// on peut très bien l'expliquer pour les nombres entiers/ mais pour les autres nombres/ on peut pas l'expliquer/ donc vous le verrez l'année prochaine/ les années d'après/ mais là cette année non/ par contre ce qui est important de savoir c'est que pour ces autres types de nombres/ oui/ on peut utiliser cette chose commune : So / les mêmes choses qu'on a dites et qu'on a vues sur toutes ces égalités // mais ça c'est admis/ ça on l'admet/ on écrit/ on l'admet pour #

Mar : mais madame/ en évaluation on pourra pas dire pourquoi

P : non/ c'est pas au programme de cette année/ et même l'année prochaine vous verrez que c'est un peu particulier/ donc cette chose commune/ on l'admet qu'elle permet aussi d'écrire des égalités avec ces autres types de nombres et en fait avec tous les types de nombres (*les élèves copient)*

(*8 min 40*)

P : et alors/ puisque cette propriété est vraie pour tous les types de nombres/ alors on va pouvoir écrire un théorème/ une propriété qui est vraie pour tous les types de nombres/ et qui explique la chose commune qu'on a vue/ et que cette chose commune elle produit/ et c'est ce que disait Chr tout à l'heure/ c'est des types de calculs qui sont toujours les mêmes à chaque fois et qu'on dit en mathématiques équivalents/ puisqu'ils donnent toujours le même résultat// alors comment on pourrait écrire cette propriété ?

[inaudible]

Mar : les équivalents/

P : de quoi tu parles quand tu dis les équivalents ?

[inaudible]

Mar : deux fois les multiplications plus l'addition

P : alors deux fois les multiplications plus l'addition/ ça c'est ce qu'il y a dans quel membre ?

Classe : à droite

P : à droite/ et dans le membre de gauche qu'est-ce qu'il y a

Enz : une multiplication et une addition

P : une multiplication et une addition/ Enz peut-être qu'on peut le dire mieux que à gauche y a une multiplication et une addition qui est équivalente à deux multiplications et une addition/ comment est-ce qu'on pourrait le dire mieux ? / Mar

Mar : si euh euh ben /l'enchaînement euh /y a l'opération euh /qui donne le bon résultat/ euh les équivalents de la multiplication et de // l'addition euh sss

P : (*écrit au tableau : est équivalent*) alors/ non/ on va le construire ensemble d'abord/ l'idée que dit Chr et Mar/ c'est que à gauche on a un certain type de calcul avec une addition et une multiplication et à droite/ et c'est équivalent à ce qu'il y a à droite/ seulement il faudrait décrire un peu mieux ce qu'il y a à gauche/ on peut pas dire c'est une multiplication et une addition/ d'ailleurs on commence par quoi ? à gauche ?

Classe : addition

P : l'addition/ pourquoi on commence par l'addition à gauche ? You ?

You et Classe : parce que c'est entre parenthèses

P : parce que c'est entre parenthèses // alors du coup on additionne /et après ?

Classe : on multiplie

P : on multiplie (*écrit en même temps au tableau : additionner puis multiplier*)/ alors additionner puis multiplier/ ça revient à faire quoi ?

You : à faire l'opération

P : pardon/ je dis ça revient à mais c'est pas ça/ c'est à gauche on additionne d'abord et ensuite on multiplie et c'est équivalent à droite à chacune des égalités qu'est-ce qu'on fait ?

Classe : on écrit le nombre fois

P : alors c'est le nombre/ ce nombre comment il s'appelle ?

Classe : le terme

P : non

Classe : le facteur

P : c'est le facteur/ et qu'est-ce qu'on en fait de ce facteur ?

Classe : on multiplie par les termes

P : on multiplie alors (*écrit en même temps*) multiplier le facteur par les termes/ et après qu'est-ce qu'on en fait une fois qu'on a fait les multiplications ? à droite qu'est-ce qu'on fait une fois qu'on a fait les multiplications ?

(*murmures*) : les produits/ on ajoute

P : regardez sur votre cahier/ vous avez les exemples sur votre cahier

Classe : on ajoute

P : oui on ajoute/ alors du coup / (*relit le tableau*) additionner puis multiplier c'est équivalent à multiplier le facteur par les termes //et après ? Cla ?

Cla : additionner les produits

P : additionner les produits/ et ben voilà ça c'est un théorème/ c'est le premier théorème qui est vrai pour tous les types de nombres/ alors vous écrivez théorème/ un théorème c'est une propriété importante

Classe : comme le théorème de Pythagore

P : Pythagore Thalès tout ça ce sera l'année prochaine/ le théorème de cette année le voilà

[…] maintenant vous le marquez :

« additionner puis multiplier est équivalent à multiplier le facteur par les termes puis additionner les produits »

(*P circule dans la classe/ les élèves copient*)

P : (*reprend une question d'élève en aparté*) qu'est-ce que ça veut dire est équivalent ici ?

Classe : c'est à peu près la même chose/ c'est comme si/ c'est égal

P : non c'est pas égal

X : comme si

P : non/ ce sont des calculs équivalents/ qu'est-ce que ça veut dire que ce sont des calculs équivalents ? Cla ?

Cla : ça veut dire qu'ils donnent le même résultat

P : ça veut dire qu'ils donnent le même résultat/ alors on va l'écrire en plus / (*écrit en même temps*) des calculs équivalents sont des calculs qui donnent le même résultat

[…]

P : maintenant si vous voulez parler d'égalité/ alors il faut le dire autrement/ on dit pas additionner puis multiplier/ c'est pas ça/ à gauche qu'est-ce que c'est qu'on a ? comme structure ?

X : en enchaînement d'opérations

P : c'est un enchaînement d'opérations et qu'est-ce que c'est comme type d'enchaînement d'opérations ?

Dav : une multiplication
P : alors c'est pas une multiplication on dit ?
Dav : un facteur/ un nombre ?
P : comment ça s'appelle ?
Enz : un produit
(*17 min*)
P : un produit/ c'est un produit de quoi et de quoi ?
(*murmures*) : un produit du terme et du facteur / d'une multiplication
P : non /une multiplication c'est l'écriture d'un produit/ on peut pas dire un produit d'une multiplication
Classe (*plus fort*): un produit d'un facteur
P : c'est un produit d'un facteur par ?
Classe : les termes entre parenthèses (*ou les nombres entre parenthèses ?*)
P : et non/ ce qu'il y a entre parenthèses c'est Elo ?
(*d'autres élèves*) : une addition
Elo : le résultat d'une addition
P : et donc/ Elo ?
Elo : une somme
P : une somme/ alors du coup si on parle d'égalité/ on dit le produit d'un facteur par une somme est égal (*écrit en même temps*) là cette fois on a effectivement une égalité/ alors c'est égal à quoi ? à droite qu'est-ce que c'est ? Wil
Wil : le produit d'un facteur par une somme
P : et non c'est pas des produits par une somme justement
Mat : la somme de euh
P : c'est la somme
Mat : des facteurs des produits
P : la somme des produits de ce facteur par quoi ?
Classe : les termes
P : oui par les termes/ par chacun des termes/ là cette fois on parle d'égalité/ c'est une autre façon de dire le théorème donc vous avez une égalité ici qui correspond à une équivalence de programmes de calculs (*souligne les mots égalité et équivalent*)
Mar : en fait là ça veut dire celle là mais en autre phrase
P : c'est dit autrement
Mar : mais ça veut dire la même chose ?
P : oui/ enfin/ c'est un peu différent/ ça entraîne des choses un peu différentes mais c'est le même théorème dit autrement
(*19 min*)
P : vous avez écrit/ c'est bon ? bon par cœur pour lundi !
Classe : hein ? quoi ça les deux ? par cœur
P : ah oui oui par cœur !
Classe : hein ? mais c'est pas simple là la phrase / oh non !
P : non bien sûr/ on n'apprend pas par cœur des choses comme ça/ en mathématiques évidemment chut/ chut/ Enz/ évidemment vous allez pas apprendre tout ça par cœur/ par contre il faut pouvoir le retrouver/ en mathématiques on a une façon de l'écrire autrement

[…] en mathématiques on a une écriture symbolique qui permet de retrouver cette formulation qui permet de le retenir //les écritures symboliques en mathématiques évidemment le produit ça s'écrit (*et écrit x*) comme ça

Enz : fois

P : oui/ (*en lisant le théorème version structural*) d'un facteur/ alors le problème c'est que pour désigner n'importe quel nombre et pour montrer cette généralité ces théorèmes ils sont valables pour tous les types de nombres

Elo : *x*

P : Elo ? comment ?

Elo : *x*

P : (*acquiesçant*) ah ben /on utilise des lettres/ alors n'importe quelle lettre

Dav : *u*

P : ben *u* si vous voulez

Classe : mais non *g*/ *e*/ *c*/ mais n'importe

P : on multiplie chut/ additionner (*lisant le théorème version procédural*) euh pardon c'est pas celui là/ le produit d'un facteur/ ce facteur donc on l'appelle *u*/ on le note en tout cas *u* pour dire ben c'est n'importe quel nombre/ par une somme/ comment on l'écrit ?

Sop : plus

Flo : plus

P : ben plus/ ben il faut dire qu'on ajoute quand même deux nombres

Dav : *u* plus *u*

You : *u* fois *u* plus *u*

P : mais non/ on peut avoir des nombres différents

Classe : *a* plus *b/f/ g* //*e* madame

P : (écrit $u \times f + g$) sauf que écrit comme ça ce n'est pas le produit par une somme/ qu'est-ce qu'il manque?

Art/ Enz : des parenthèses

P : des parenthèses/ alors c'est bien le produit d'un facteur par une somme (*lit en même temps au tableau le théorème écrit*) je continue à lire est égal

Chr : donc égal

P : égal (*inscrit* =) à la somme

Classe : plus

P : plus

Classe : des produits

P : des produits

Classe : fois

P : ben fois de ce facteur

Classe : *u*

P : *u* fois // par chacun des termes alors c'est *u* fois ?

Classe : *a*

You : plus *f*

Classe : *u* fois *f*

P : *u* fois *a* plus *u* fois *f*

You : tout ça entre parenthèses

Art : *a* entre parenthèses

P : alors vous voulez mettre des parenthèses ici ?

Classe : mais ça sert à rien

P : oui ça sert à rien ceci dit elles sont justes aussi

Art : voilà on peut les mettre

P : alors du coup cette égalité/ quand on lit cette égalité on peut se souvenir de la phrase / (*montrant le tableau*) c'est un produit d'un facteur par une somme qui est égal à la somme du produit de ce facteur par chacun des termes/ et ça par contre/ cette égalité là/ tiens est-ce que elle correspond aussi à ce qu'on a écrit comme théorème ?

[brouhaha]

P : on le lit ? additionner/ qu'est-ce qu'on additionne ici ?

Classe : *a* et *f*

P : *a* et *f*/ donc deux nombres d'accord/ puis multiplier

Classe : par *u*

P : d'accord est équivalent

You/ Mau Classe : égal

P : ça veut dire que ça donne le même résultat/ à multiplier le facteur

Dav : *u*

Classe : *u*

P : c'est bien *u*/ par les termes

Chr : *a* et *f*

P : *a* et *f* qu'on multiplie bien par le facteur puis additionner les deux produits/ oui ça correspond bien/ alors vous écrivez / en mathématiques

Art : on pourra le dire comme ça ?

P : en mathématiques

Art : on pourra le dire comme ça [uixe]

P : en mathématiques on utilise une écriture symbolique

Dav : on écrit *u* fois entre parenthèse *a* plus *f* ?

P : chut/ pour traduire et retenir ce théorème/ on utilise des lettres (*dicte*) on utilise des lettres pour désigner n'importe quel nombre

[...]

P : alors en dessous/ vous recopiez l'égalité symbolique/ vous copiez ça

TRANSCRIPTION DE LA QUATRIEME SEANCE (2)

Le 2 avril 2012

(les élèves travaillent quand commence l'enregistrement)

P : partie AER/ non c'est sur ce qu'on a fait la dernière fois/ le théorème/ oui/ alors qu'est-ce qu'il disait ce théorème Mau ? /de quoi il parlait ?

Mau : de multiplication

P : il parlait de multiplication/ et alors ? qu'est-ce qu'il disait à propos de multiplication ? Ame ?

Ame : qu'on peut additionner et multiplier et ça revenait au même que si on multipliait le facteur euh par les termes euh ? par chacun des termes

P : si on multipliait le facteur par chacun des deux termes oui/ d'ailleurs /on disait pas ça revient au même mathématiquement on disait ?

Classe : équivalent

P : que c'est équivalent oui/ et ça donc ça c'est la première formulation du théorème/ une autre formulation c'est quand on parle d'égalité/ qu'est-ce qu'il disait ce théorème en parlant d'égalité ? Wil ?

Wil : le produit d'un facteur par une somme (*ne lit pas mais s'arrête*)

P : le produit d'un facteur par une somme est égal à ?

Art et Wil : (*en lisant*) à la somme des produits par chacun des termes

P : à la somme des produits par chacun des termes oui/ comment on fait pour retenir tout ça ?

You : u fois a plus

Art : [uxaf]

Classe : u fois a plus f égal u fois a plus u fois f

Art: [uxaf] égal [uxa] plus [uxèfe] *(prononce comme si c'était des lettres x)*

P : on a dit *u* multiplié par ?

Classe : entre parenthèses *a* plus *f* égal *u* fois *f* plus *u* fois *a*

P : (*écrit au tableau*) et ça #

E : c'est une égalité

P : ça correspond bien au théorème ?

Classe : oui

P : vous pouvez expliquer pourquoi ?

Sop : c'est pas un *f* à la fin ?

P : ah /c'est pas *u* fois *f* à la fin tu dis ?

Sop : ça donne pareil de toute façon

P : ça donne pareil ?

Enz : je croyais que/ moi sur mon livre j'ai inversé le a et le f

P : oui mais j'ai écrit ce que dictait euh //mais est-ce que c'est important d'inverser le *a* et le *f* ?

Classe : non c'est la même chose

P : pourquoi c'est la même chose ?

(*brouhaha*)

P : chut/ Mar ?

Mar : on sait toujours qu'on commence par la multiplication donc euh /on est obligé de faire les multiplications

X : on commence par les multiplications

P : on commence en effet par les deux multiplications/ donc c'est bien les deux mêmes multiplications/ et après qu'est-ce qu'on fait ?

Flo : on ajoute

P : on ajoute Flo/ et alors ? est-ce que ça revient au même ?

Classe : oui

P : oui/ pourquoi Flo ?

Flo : parce que l'addition n'a pas de sens

P : oui/ l'addition n'a pas de sens on peut le dire comme ça// donc là /on a bien deux multiplications et on ajoute et on a dit dans le théorème/ Cla

Cla : additionner puis multiplier revient à mult= euh addit= euh multiplier le facteur par euh non /à additionner le facteur par celui qui /(*se résout à lire sur le cahier*) additionner puis multiplier est équivalent à multiplier le facteur par chacun des termes puis à additionner

P : comment est-ce qu'on peut le retrouver en regardant ça alors ?

Enz : on fait l'opération dans la tête/ on sait qu'on commence par l'addition/ donc on fait additionner puis multiplier

P : oui/ et après qu'est-ce qu'on dit ?

Cla : est équivalent donc est égal à addit / euh

P : non à droite qu'est-ce qu'on fait en premier ?

Classe : on multiplie

P : on multiplie

Classe : le facteur

P : le facteur/ ici c'est quelle lettre ?

Classe : u

P : u/ par chacun des termes/ c'est quoi chacun des termes ?

Dav : a et f

P : a et f oui/ qu'est-ce que c'est déjà les termes ? Mat ?

Mat : c'est dans les additions

P : c'est ce qu'on additionne d'accord/ alors maintenant votre travail va consister à utiliser ce théorème pour d'abord refaire un peu de calcul mental/ donc je vous demande de trouver les résultats de ces deux produits

You : ah non

P : si/ et ensuite/ d'écrire des égalités/ alors cette fois je vous ai écrit le premier/ euh/ la première partie donc à gauche de l'égalité et à vous d'écrire la partie/ donc le membre de droite

You : *a* ça veut dire quoi ?

P : alors *a* j'ai appelé *a* un nombre

You : oui mais c'est lequel ?

P : ben un nombre en général donc n'importe lequel
E : on prend n'importe lequel
P : c'est pas n'importe lequel/ c'est n'importe quel nombre peut correspondre à *a* / c'est comme nous tout à l'heure
Dav : 1 c'est 1
P : ça pourrait être 1/ ça pourrait être
Sop : 1000
P : 1000 ou 3/2/ n'importe lequel/ c'est un nombre en général
Clo : en haut on met juste le résultat ?
P : en haut vous mettez juste le résultat/ et en bas il s'agit de produire des égalités comme on a fait jusqu'à présent
Wil : avec des lettres ?
P : ben ici avec des lettres/ ou ici sans
Sop : quand y en a pas
[en aparté]
P : cette fois tu dois produire des égalités avec des lettres
(*des élèves sortent leur calculatrice*)
P : évidemment c'est du calcul mental
Mau : on peut pas écrire des résultats intermédiaires ?
P : si vous avez le droit d'écrire des résultats intermédiaires
(*8 min*)
(les élèves travaillent)
[…]
(P passe dans les rangs, répond à des questions)
P : Mat tu as fini/ tu vas proposer ta réponse pour le premier
[..]
(*13 min 52*)
(*un autre élève est désigné pour aller au tableau)*
Chr : j'écris que le résultat où ?
P : alors il faut au moins que tu expliques comment tu as fait à l'oral/ comment tu as fait ?
Chr : ben j'ai fait 50 fois 6 ça fait 300 après j'ai fait 6 fois 7 ça fait 42/ ça fait 342
P : oui/
You : c'est ça madame ?
Ame : oui
Classe : mais le premier ?
P : on reprend le premier ? /donc Mat a écrit 34 multiplié par 100 plus 34 multiplié par 2/ est-ce que c'est bien égal à ce qui est écrit là à gauche ?
Classe : oui
P : pourquoi ?
(*14 min 48*)
Mat : parce que c'est la même chose qu'a fait Chr et c'est le théorème/ enfin /en fait elle a décortiqué le nombre elle a fait 100 plus 2
P : elle a fait 100 plus 2 et après ?
Dav : de l'autre côté

Mat : 100 et 2 ça fait 102 donc euh /34 fois 100 elle a trouvé le résultat après elle l'a ajouté à 34 fois 2 pour faire 100 plus 2 et elle a trouvé le résultat

P : oui mais qu'est-ce qui vous assure que là/ ça /ce calcul là /il est bien égal à celui là ? Clo ?

Clo : c'est le théorème qui le dit

P : c'est le théorème qui le dit/ alors ici qu'est-ce qu'il dit le théorème pour ça ? pour produire ça ?

Wil ?

Wil : ils sont égal euh /ils sont égaux ça veut dire qu'ils sont pareils

P : non mais nous on veut savoir si c'est pareil et vous dites que c'est pareil parce que c'est bien le théorème/ mais qu'est-ce qui dit que ça/ ça correspond au théorème ? Mat

Mat : le membre de droite

P : ah /le membre de droite/ est-ce que ça correspond bien au théorème le membre de droite ?

You : non

P : qu'est-ce qu'il dit le théorème déjà ?

You : ah oui /il dit les deux euh

[au loin]: multiplier puis additionner

P : You ?

You : euh/ le facteur par le terme et additionner les deux produits

P : alors est-ce qu'on a bien le facteur par le terme comme tu dis ?

You : oui

P : c'est quoi le facteur ?

You : je sais pas

Classe : 34

P : 34 oui/ et les termes ?

Classe : 100 et 2

P : 100 et 2 et alors qu'est-ce qu'on en fait de ça ?

Classe : on multiplie par le facteur

P : on multiplie par le facteur/ Enz retourne toi

Cla : et après on les additionne

P : et après on les additionne et dans le membre de gauche ça correspond bien au théorème ?

Classe : oui

P : qu'est-ce qu'il dit le théorème ?

Sop : additionner puis multiplier

P : additionner puis multiplier est-ce que on additionne bien en premier ?

Dav : oui

Flo : oui/ mais faut mettre des parenthèses

P : et après on multiplie ? par combien ?

Classe : 34

P : par 34 /d'accord/ oui ça correspond bien au théorème donc on est sûr que ce soit bien égal et puisque c'est bien égal/ cette méthode permet bien de trouver le résultat/ 3468// et dans ce qu'a fait Chr/ ça correspond bien au théorème ?

Classe : oui

You : il a additionné puis multiplié
P : Art ?
Art : il a fait 6 fois 50 ça fait 300
Ili : 6 fois 7
P : il a pas fait 6 fois 7
Art : non /il a fait 7 fois 6 et 6 fois 5
X : non 50 fois 6
Art : oui /voilà /50
P : il a fait 50 fois 6 plus 6 fois 7 *(écrit en même temps)* et est-ce que ça /ça correspond au théorème ?
Fla : oui additionner puis multiplier est équivalent à multiplier le facteur par les termes puis additionner les deux produits
P : oui d'accord mais qu'est-ce qui te fait dire que ça ça correspond ? comment tu le vois ? et dites/ il faut le voir /// comment vous le voyez ? qu'est-ce que vous regardez là ?
(*murmures*)
P : le membre de droite et alors ?
(*murmures*)
X : y a une addition
P : y a une addition oui/ quoi d'autre ?
Classe : les multiplications
P : les multiplications/ qu'est-ce qu'il y a de spécial ?
Classe : le facteur/ les termes
P : Elv ?
Elv : les facteurs sont bien multipliés par les deux termes
P : les facteurs c'est quoi les facteurs ?
Classe : 6
P : c'est 6 le facteur/ est-ce qu'il est bien multiplié par les deux termes ?
Classe : oui 50 et 7
P : 50 et 7/ d'où ils viennent 50 et 7 ?
Classe : de 57/ ben de 57
P : de 57/ quel est le lien ?
Clo : parce que c'est 50 plus 7 est égal à 57
Mar : 50 plus 7
P : d'accord/ ici cette fois il fallait écrire des égalités en utilisant le théorème // alors 6 multiplié par a plus 4/ qu'est-ce que vous proposez ? Luc ?
Luc : 6 fois a plus 6 fois 4
P : (*écrit*) est-ce que ça correspond bien au théorème ?
Classe : oui
You : non
Dav : et oui
P : oui pourquoi ? chut/ qu'est-ce qu'on regarde ?
E : 6 plus 4
P : Lis?
Lis : ben on regarde le membre de droite

P : le membre de droite/ qu'est-ce qu'il y a au membre de droite ?
Lis : ben le euh/ une addition et deux multiplications
P : une addition et deux multiplications/ ça suffit pas qu'est-ce qu'il faut regarder d'autre Seb ?
Seb : y a les deux facteurs/ y a deux produits
P : deux produits/ qu'est-ce qu'on regarde de plus dans ces produits ?
Wil : le facteur et les termes
P : le facteur/ c'est quoi le facteur ?
Classe : 6
P : et les termes ?
Classe : a et 4
P : et alors qu'est-ce qu'on doit regarder avec 6/ a et 4 ? Ili
Ili : ils sont multipliés
P : ils sont multipliés et après ?
X : ils sont additionnés
P : ils sont bien additionnés/ le deuxième/ Enz ?
Enz : je l'ai pas fait
P : dis/ tu fais quoi depuis tout à l'heure ? et puis tu peux peut être le faire maintenant/ directement ?
Enz : 5 fois b plus 5 fois 7
P : est-ce que ça correspond bien au théorème
Classe : oui (*lassée*)
P : allez rapidement dites pourquoi / Cla ?
Cla : parce que dans le membre de droite on voit bien que le facteur est multiplié par les deux termes et les deux produits sont additionnés
P : d'accord ici ? Seb / le 3e ?
Seb : 4 fois 3 plus 4 fois a
P : est-ce qu'il a raison ? il a juste ?
Classe : oui
P : Mat ?
Mat : oui parce que on voit le facteur et les deux produits après sont additionnés
P : d'accord/ le dernier/ Mau ?
Mau : 136 fois 230 plus 136 fois 5
P : est-ce que ça correspond ?
Classe : oui
P : oui/ quels sont les termes ? qui sont pas écrits dans le membre de gauche ?
Art : 5 et 230
P : 5 et 230 oui parce que quand on les additionne on obtient ?
Classe : 235
P : 235/ entendu/ qui en a un autre ? Fla ?
Fla : 136 fois 200 plus 136 fois 35
P : encore un autre ? Mat ?
Mat : 136 fois 200 plus 136 fois 30 plus 136 fois 5
P : est-ce que ça correspond au théorème celui là ? le dernier ?

Flo : non/ fin si
Classe : mais non/ si (*se répondant*)
P : qu'est-ce qu'il faut regarder ?
Classe : le membre de droite
P : Wil ?
Wil : les additions et les multiplications
Flo : mais madame c'est 35/ 30 plus
X : pourquoi 136 fois 200
P : ah pourquoi 136 fois 200 ?
Dav : parce que c'est 235
[murmures] : pourquoi y en a trois ?
P : ah pourquoi y en a trois ?
Mar : pour moi y en a deux non ?
P : normalement y en a deux ? qu'est-ce qu'il dit le théorème ?
X : on est pas obligé de faire deux
P : ah il dit qu'on est pas obligé de faire deux ; qu'est-ce qu'il dit ? Cla ?
Cla : il dit additionner puis multiplier
P : additionner puis multiplier/ est-ce que on a bien une addition donc à gauche/ elle est pas écrite/ mais qui correspond à celle là qu'est-ce que c'est l'addition ? qu'est-ce que c'est l'addition qui est pas écrite ? *(écrit sous la dictée d'un élève)* 200 plus 30 plus 5 et qui serait multiplié par combien ?
Classe : 136
P : 136/ c'est le facteur commun/ et est-ce que ça revient bien à multiplier à chaque fois par le facteur
Classe : oui
P : par chacun des termes ? avant d'additionner ?
Classe : oui
P : c'est bien ce que dit le théorème/ le théorème ne dit pas qu'on est obligé d'en avoir deux/ c'est pas vrai.
C : madame/ celle de Fla elle est pas juste 136 fois 200 plus 136 fois 5
P : euh c'est moi qui ai mal copié elle a dicté fois 35 (*corrige au tableau*)/ vous écrivez donc : en dessous/ vous écrivez remarque : donc on va écrire l'égalité 136 multiplié par 200 plus 30 plus 5 égal 136 multiplié par 200 plus 136 multiplié par 30 plus 136 multiplié par 5 donc c'est une égalité […] qui correspond au théorème/ on n'est pas obligé d'avoir que deux termes à gauche (*les élèves copient*)
P : vous recopiez rapidement/ et vous écrivez d'autres égalités// je vous demande de recopier celles là qui ont été faites par des groupes et qu'on n'a pas encore regardées/ je vous demande de les recopier d'abord
[…] (*sonnerie*)
P : vous avez vu ? qu'est-ce que vous avez vu ?
Els : (*brouhaha*) y a un plus deux fois/ y a des parenthèses partout // à la dernière y a des parenthèses qui servent à rien
Mar : (*se met presque à crier*) le membre de gauche et le membre de droite ils sont inversés !
P : ces égalités on les reverra demain […]

TRANSCRIPTION DE LA CINQUIEME SEANCE

Le 3 avril 2012

L'égalité $6\times(a+4)=6\times a+6\times 4$ est écrite au tableau.

P : alors la question d'Ili je la repose en d'autres termes//à la fin de l'heure il m'a demandé finalement comment est-ce qu'on interprète une égalité comme ça/ ça revenait un petit peu à des questions de You aussi qui demandait mais finalement ce a là c'est un nombre ? on peut imaginer que c'est 60 ? et je leur ai répondu à tous les deux/ non pas du tout/ cette égalité elle ne se lit pas comme ça/ alors qui peut la traduire et qui peut imaginer ce qu'on peut dire pour décrire cette égalité ? Mar ?
Mar : et ben [inaudible] a c'est n'importe quel chiffre/
P : alors a c'est n'importe quel nombre d'accord/ parce que c'est une égalité qui est valable pour n'importe quel nombre
Elo : en fait cette égalité elle est valable pour tous les nombres/ ça veut dire que toujours l'égalité elle sera juste même si les nombres [inaudible]
P : oui/ alors ça veut dire/ soyez plus précis que ça/ si c'est vrai pour n'importe quel nombre qu'est-ce que c'est qui est vrai/ Luc ?
Luc : (*silence*)
P : il faudrait décrire/ ce qu'on en fait justement // Laura arrête de recopier/ tu l'as déjà recopié hier et maintenant c'est le moment de suivre/ pose le stylo ! / donc maintenant l'idée c'est comment traduire ça et donc Mar dit c'est une égalité qui est vraie pour n'importe quel nombre a / Seb ?
Seb : parce que à chaque fois on trouvera la même chose
P : mais à chaque fois quand vous faites quoi ? Dites-le
Classe : ben un calcul
P : quel calcul ?
Classe : 6 fois entre parenthèses // une addition
P : une addition/ laquelle ?
Classe : des termes/ de a plus 4
P : quels termes ? soyez précis avec cette égalité là
Gre : de *a* et de 4
Enz : 6
P : non c'est pas 6 qu'on ajoute
Classe : *a* et 4/ n'importe quel nombre et 4
P : c'est n'importe quel nombre et 4/ et après qu'est-ce qu'on fait
Dav : après on fait 6 d'abord fois n'importe quel nombre et après on fait 6 fois 4
P : et après qu'est-ce qu'on fait ?
Dav : on les additionne

P : on les additionne/ donc je reprends ce que vous dites/ si on prend n'importe quel nombre/ et qu'on ajoute 4 et qu'après/ on multiplie par 6/ c'est équivalent à prendre ce nombre et le multiplier par 6/ puis faire 6 fois 4 et ensuite ajouter les résultats//ça ça se lit comme une équivalence de programmes de calculs/ le programme de calcul écrit dans le membre de gauche est équivalent au programme de calcul dans le membre de droite/ ça/ c'est une écriture symbolique qui traduit une équivalence de programmes de calcul// c'est ça que ça veut dire// vous allez le noter rapidement et ensuite on passe à regarder les écritures des égalités d'hier //alors/ vous recopiez maintenant cette écriture/ cette égalité// oui Ili / non j'ai pas la caméra/ c'est M. B qui l'a /j'ai que le dictaphone// allez on y va/ cette égalité c'est une écriture symbolique (note au tableau en même temps)/ hein avec les symboles mathématiques/ c'est l'écriture symbolique de l'équivalence de deux programmes de calcul/ sous entendu l'un à droite et l'autre à gauche/ pour n'importe quel nombre qu'on a nommé *a*

(*4 min 45*) //alors vous regardez maintenant les trois égalités que certains groupes avaient produites// alors qu'est-ce que vous en dites ? Flo ?

Flo : c'est la même chose

P : c'est la même chose/ qu'est-ce qui te fait dire que c'est la même chose ?

Flo : c'est la forme

P : comment ?

Flo : c'est la même forme

P : c'est la même forme/ qu'est-ce qui te fait dire que c'est la même forme ?

Flo : y a deux membres

P : quoi d'autre ?

Flo : y a deux multiplications/ et une addition/ et une multiplication et une addition

P : bon / quoi d'autre ?

You : des parenthèses

P : tu peux être un peu plus précis ?

You : ce qu'il y a entre parenthèses c'est une addition

P : oui/ enfin/ tu parles du membre de droite à chaque fois

You : oui

P : Mar ?

Mar : en fait /c'est que pour moi c'est les égalités qu'on avait faites avant/ le membre de gauche c'est celui qui est dans le membre de droite de ces trois là // et le membre de droite dans celles-là/ elles sont dans/ en fait c'est inversé quoi

P : qu'est-ce que vous pensez de ce que dit Mar ?

Classe : c'est vrai/ ben oui/ oui

P : Enz ?

Enz : c'est la même chose oui

P : d'accord/ c'est inversé/ donc on a inversé

Sop : c'est inversé donc ça donne pareil

P : ah/ qu'est-ce que tu dis Sop ?

Sop: même si c'est inversé ça donne pareil/ ça donne toujours le même résultat

P : oui bien sûr/ vous êtes d'accord avec ça ?

Classe : oui

P : alors vous pouvez écrire/ on a inversé le membre de gauche et le membre de droite (*dicte en écrivant au tableau*)/ mais c'est pareil/ on obtient toujours les mêmes résultats
Mar : vu que c'est équivalent
P : (*note*) vu que c'est équivalent
You : mais madame/ par exemple dans [inaudible] c'est obligé que ce soit à droite ?
(*silence*)
P : vous avez fini d'écrire ? You tu peux reposer ta question ?
You : les membres de gauche comme on a fait c'est pas obligé qu'ils soient à droite non?
P : tu demandes si on est obligé de les mettre soit à gauche soit à droite ?
(*silence*)
P : Ben la question qu'on pourrait se poser c'est à quoi ça sert de les mettre à gauche ou de les mettre à droite
You: ben oui mais=
P : alors avant de se demander à quoi ça sert/ je voudrais qu'on finisse là sur cette équivalence/ donc vous dites c'est pareil/ c'est-à-dire que c'est toujours une égalité
Enz : parce qu'on obtient toujours les mêmes résultats
P : parce qu'on obtient toujours les mêmes résultats/ c'est équivalent// est-ce que vous pouvez dire plus précisément ce qui est équivalent ?
You : l'opération
P : quelle opération soyez plus précis ? Art ?
Art : les opérations
P : quelles opérations écrites à gauche et à droite ?
(*silence*)
P : allez on y va /qu'est-ce qu'on fait à gauche à chaque fois ?
Enz : une addition/
P : non c'est pas vrai /qu'est-ce qu'on fait à gauche en premier ?
Classe : les multiplications
P : qu'est-ce qu'elles ont de spécial ces multiplications ?
Classe : même nombre/ on additionne après
P : et on additionne après mais ces multiplications elles ont quelque chose de spécial Ama ?
Ama : y a le même facteur
P : y a le même facteur oui/ alors du coup comment on pourrait dire à gauche ?
Chr : on pourrait mettre a plus
Flo : à gauche on retrouve toujours le même facteur
P : tu ne dis pas les calculs qu'il y a à produire/ première chose qu'on fait dans le programme de calcul à gauche ?
Classe : les multiplications
P : on multiplie le facteur/ alors je l'écris mais n'écrivez pas pour l'instant on va le corriger/
Enz : par les termes
P : vous dites /vous parlez de termes/ alors ça c'est équivalent à droite à faire quoi ?
Seb : addition puis multiplication
P : à additionner/ oui mais vous ne dites pas quoi
Clo : l'ensemble des deux termes
P : à additionner les deux termes/ alors les termes

Flo : et multiplier par le facteur

P : puis à multiplier par le facteur (écrit au tableau) alors maintenant on va corriger parce que le mot facteur peut renvoyer soit à ce nombre/ soit à celui-là /soit à celui-là

Gre : mais

P : alors du coup il faut préciser

Sop : c'est renvoyé au nombre qui est deux fois dans le membre de gauche/ dans le membre de droite

P : alors le facteur qui est deux fois (écrit au tableau) à gauche c'est ça ?

Sop : à gauche ou à droite ça dépend/ fin

P : ah/ ben là c'est à gauche

Seb : oui

P : maintenant on relit la phrase/ « on multiplie les facteurs »/ mais c'est pas les facteurs

Classe : le facteur

P : le facteur/ « par les deux termes » sauf que vous pouvez pas dire que ce sont des termes parce que ils sont pas additionnés ici/ ce sont des facteurs écrits comme ça/

Lis : ben les deux termes du membre de droite

P : oui mais avant de décrire le membre de droite on décrit le membre de gauche/ qui est équivalent au membre de droite on peut pas raisonner comme ça/ Cla ?

Cla : on multiplie le facteur par les deux termes du membre de droite

P : non/ on ne peut pas faire référence au membre de droite alors qu'on décrit celui de gauche/ y a quelque chose qui va pas

Elo : ben les deux autres nombres

Elv : ceux qui se trouvent entre parenthèses

P : et non/ ils se trouvent pas entre parenthèses à gauche « on multiplie le facteur par deux autres nombres et c'est équivalent à additionner » alors c'est plus les termes

Classe : les autres nombres

P : oui oui les deux autres nombres (sous la dictée) puis à multiplier par le facteur qui est deux fois à gauche// alors en mathématique on dit pas le facteur qui est deux fois à gauche

Classe : qui est repris

P : alors on a une façon plus rapide de le dire/ on appelle ça le facteur commun// vous voyez pourquoi on dit commun ?

Mar : commun aux deux multiplications

Chr : commun des deux côtés de l'addition

P : oui ?

Enz : commun dans les deux multiplications

P : oui commun dans les deux multiplications/ ça veut dire qu'il est présent dans les deux multiplications/ il est commun aux deux multiplications// donc du coup « à multiplier par le facteur commun » // alors il faut pas écrire la phrase comme ça /du coup c'est « multiplier le facteur par deux autres nombres »/ ou plutôt un facteur parce que là vous savez pas/ « est équivalent à additionner les autres nombres puis à multiplier par le facteur commun ». Dav ? ça va ça ?

Dav : [inaudible]

P : bon alors si ça va je vous laisse recopier/ vous avez le théorème sous forme d'équivalence

(*16 min 51*)
P : alors on va revenir sur l'autre question/ finalement inverser les deux membres à quoi ça sert ? / Mar ?
Mar : à rien
P : regardons si ça sert à rien// regardons si je vous donne à calculer
E : 6 fois 8
P : cet enchaînement d'opérations/ Seb ?
Seb : [inaudible]
P : il faudrait trouver le résultat oui/ mentalement évidemment
Enz : c'est simple en fait/
Gre : madame/
P : chut/ Ili
Mar : inverser ça sert à faciliter l'opération
P : ça sert à faciliter l'opération/ ça peut faciliter l'opération d'utiliser ce genre d'égalité là ?
Classe : oui
P : pourquoi ?
Y : madame
E : mais non !
P : ah non ?
(*brouhaha*)
P : expliquez un peu plus/ Chr
Chr : ben parce que trente cinq fois quatre-vingt dix
L: dix-huit (*35× 98 est écrit au tableau*)
C : ça va prendre du temps/ et donc on fait deux fois trente-cinq
P : ah tu fais 35 fois 98 ?
C : mh
P : Sop ?
Sop : parce qu'en fait on peut simplifier vu que le facteur qui est repris c'est 35 ben on peut additionner 98 plus 2 ça fait 100 et 35 fois 100 // 3500
(*P écrit au tableau*)
P : on peut faire/ tu dis additionner 98 plus 2
Sop : ça fait 100
P : et après faire ?
Sop : fois 35
P : fois 35 oui
Clo : mais non on doit faire fois 70/ on additionne
Sop : mais faut pas additionner le facteur
P : mais non regarde le théorème on additionne pas du tout les facteurs/ (lit le théorème) « multiplier un facteur par deux autres nombres est équivalent à additionner les deux autres nombres puis à multiplier par le facteur commun »/ les autres nombres ici c'est quoi ?
Classe : 2 et 98
P : et ensuite on multiplie par le facteur commun/ Art ?
Art : ben 35

P : oui/ le théorème ne dit pas ce que tu dis Chr/ on ne multiplie pas le facteur commun par 2/ c'est pas vrai// alors du coup ça facilite ?

Classe : oui

P : oui bien sûr parce que du coup 98 plus 2 ça fait

Dav : 100

P : 100 et 100 fois 35

Classe : 3500

P : 3500 c'est plus simple/ oui Mar ?

Mar : c'est que en fait je pense que le membre de gauche en fait à ce qu'on trouve l'opération plus facilement/ l'égalité donne la même opération

P : ça peut être utiliSeb comme ça en calcul mental/ tout à fait/ alors du coup on calcule 35 multiplié par 98 plus 2 on fait d'abord 98 plus 2 ça donne 100 et ça donne 3 500 finalement/ c'est plus facile/ ce type d'égalité ça peut servir oui en calcul mental selon le type de calcul// je vous laisse écrire ça et je vous en donne quelques uns pour vous entraîner

You : madame on n'écrit que le résultat ?

P : non le calcul et le résultat/ les deux

(*24 min 48*)

P : You (*l'élève est au tableau*) tu peux nous expliquer comment tu es arrivé à écrire ça ?

You : ben j'ai fait 2/34 fois 7 et 3 ça fait 10 donc j'ai écrit une autre égalité et après j'ai mis le résultat

P : et comment tu as fait pour écrire ta première égalité ?

You : j'ai fait comme là

P : t'as fait comme là allez explique plus

You : ben les membres de gauche et droite ils ont été inversés

P : par rapport à ce qu'on avait fait avant oui

You : donc j'ai fait 2/34 fois 7 plus 3

P : pourquoi 2/34 pourquoi fois 7 plus 3 ?

Ame : parce que c'est les termes non ?

Enz : il a ajouté les facteurs qui euh/ qui étaient pas communs

P : c'était quoi les facteurs qui étaient pas communs ?

Classe : 7 et 3

P : et le facteur commun qu'est-ce qu'il en a fait ?

Classe : il a ajouté/ multiplié

P : non il n'a pas ajouté/ il a multiplié par

Classe : les deux facteurs pas communs

P : oui fin non/ par la somme des autres/ bon le deuxième/ évidemment on va pas calculer les deux produits puis les additionner/ on va utiliser un autre calcul qui est équivalent/ quel autre calcul Seb ?

Seb : on fait 13/4 fois entre parenthèses/ 130 plus 870

P : du coup qu'est-ce qu'on fait comme calcul ? Ili

Ili : 130 plus 870

P : bien sûr ça fait ?

Ili : 1000

P : et ensuite qu'est-ce qu'on fait avec 1000?

Classe : on multiplie par 13/4

P : on multiplie par le facteur commun en effet

Classe : 13 400

Mat : mais on n'est pas obligé de l'écrire

P : non non on n'est pas obligé de l'écrire/ ça c'est les explications pour montrer le calcul qu'on fait vraiment et donc effectivement ça fait 13 400

[…]

(*28 min 11*)

P : alors maintenant/ on va revenir à du vocabulaire/ on a vu plusieurs formes de différents théorèmes/ la première forme c'était l'écriture de ben la première écriture des égalités/ et qui correspondait à l'équivalence d'un produit par une somme et d'une somme de deux produits/ écrite dans l'autre sens/ on vient de la voir/ c'est l'équivalence de deux programmes de calcul qui consiste à multiplier deux nombres par un facteur commun avant d'additionner/ et ça c'est équivalent à additionner les deux nombres qui sont pas des facteurs communs avant de multiplier par le facteur commun /// tout ça/ ces théorèmes montrent une même chose commune/ et cette chose commune c'est une propriété de la multiplication (écrit en même temps au tableau) « Ces différentes écritures » /// cette chose commune qu'on regarde depuis qu'on écrit des égalités elle s'appelle la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition// comment ? c'est comme ça qu'on appelle ces théorèmes/// et donc quand on écrit les égalités dans le premier sens que l'on a vu/ on dit qu'on développe// et dans l'autre sens (dicte et écrit au tableau)/ on factorise// prenez une nouvelle page pour la suite

(*P distribue/ donne des consignes matérielles*)

P : alors qu'est-ce que je vous ai distribué ?

Classe : des calculs

P : des calculs/ pas seulement/ qu'est-ce qu'il y a d'autre ?

Dav : des égalités

P : y a pas des égalités/ c'est pas vrai

Classe : des phrases

P : qu'est-ce qu'elles décrivent ces phrases ?

Classe : des calculs/ [inaudible]

P : un procédé de calcul à gauche vous avez un calcul *(du calcul mental madame ?)*

P : oui c'était du calcul mental et à droite ce sont les procédés de calcul qui ont été utilisés en calcul mental lors de votre première séance et les groupes qui ont été chargés de produire les égalités à partir de ça se sont tous trompés// alors je vais vous montrer pour la première// pour la première quel est le calcul Seb tu le lis ?

Seb : 25 fois 19

P : oui et à droite le procédé Lau qu'est-ce que c'est ?

Lau : j'ai fait 25 fois 20 ça fait 500 moins 25

P : c'est ça/ et le groupe qui a dû produire cette égalité a écrit la chose suivante : (*écrit au tableau* $25 \times 20 - 25 = 25 \times (10 + 9))$ // est-ce que ce qu'il y a écrit est bien une égalité ?

Classe : oui/ non

(*brouhaha*)
P : alors comment faire pour vérifier
Classe : on calcule/ on fait les deux calculs
P : ben faites les deux calculs
Classe : on peut faire à la calculatrice ?
P : oui
Classe : pareil/ on trouve pareil
P : Mau ?
Mau : 475
P : quel calcul ?
Mau : les deux
P : les deux/ alors qu'est-ce qu'on en conclut ?
Classe : c'est juste/ c'est une égalité
P : c'est une égalité (*écrit au tableau*)/ vous pouvez l'écrire// on trouve 475 dans chaque membre//
P : maintenant peut-être certains disaient que ça va pas pour d'autres raisons ? Enz ?
Enz : c'est pas les mêmes nombres
P : c'est pas les mêmes nombres/ enfin pas tous
Enz : euh oui/ et y a pas de soustraction
P : ah /déjà y a pas de soustraction
Chr : si y en a une
P : dans le membre de gauche mais je pense que Enz voulait dire dans le membre de droite/ quoi d'autre ?
Enz : y a pas les mêmes nombres que dans le membre de gauche/ il manque le nombre 20 dans le membre de droite
P : il manque le nombre 20 effectivement
Chr : mais y a pas 10 et 9 dans le membre de gauche
P : oui/ donc finalement cette égalité elle est vraie mais elle n'explique pas le procédé qui était à l'origine du calcul mental/ et qui est écrit sous la forme de la phrase// la phrase ceci dit/ la phrase qui est écrite sur votre fiche est-ce qu'elle correspond quand même à l'un des deux membres de l'égalité ?
Classe : ah oui
P : oui lequel ? Mau ?
Mau : le membre de gauche
P : le membre de gauche/ donc le membre de gauche correspond bien au procédé// alors je vous demande qu'est-ce qui faudrait écrire à droite pour que ça éclaire complètement le procédé et que ça corresponde au membre de droite ? je vous laisse essayer
(*41 min 19*)
(P passe dans les rangs/ reformule la consigne)
(*43 min 44*)
P : alors qu'est-ce qu'on peut écrire à droite qui montre le procédé de calcul ? Seb
Seb : entre parenthèses 20 moins 1 fois 25
P : est-ce que tu peux expliquer comment tu en es arrivé à produire cette écriture ?
Seb : ben le 20 c'est euh ça fait 19 si on enlève 1

P : d'accord le 20 moins 1 tu l'as pris de 19/ mais alors pourquoi 20 moins 1 et pas 12 plus 7
Seb: parce que 20 il était déjà là bas
P : ah oui/ Chr ?
Chr : [inaudible]
P : d'accord/ et pourquoi multiplié par 25 ?
Sop : parce que c'est le nombre/ euh/
Flo : parce que c'est le facteur
P : c'est le facteur ?
Classe : commun
P : le facteur commun effectivement// est-ce que vous avez vérifié que ça ça donne bien une égalité ?
Ili : oui
Classe : non/ oui/ oui
P : alors ?
Classe : oui
P : bon/ ça c'est la première égalité corrigée/ à vous de faire les trois autres tout seuls/ allez !/ vous devez produire les égalités
P : une fois que vous avez fini# *(madame je peux reprendre ma calculatrice pour vérifier ?)*
P : vous devez vérifier évidemment que vous avez juste
P : pour le deuxième calcul/ c'est 41 multiplié par
Lau : 100 fois 2
P : sauf que c'est écrit par 200 sur la fiche/ mais c'est pas fini Mau ?
Mau: moins 41 égale entre parenthèses/ 200 moins 1 fois 41
Classe : c'est ça
P : oui effectivement/ comment on fait pour en être sûr ?
Classe : on calcule
P : oui à gauche et à droite/ et on trouve ?
Classe : ben le même résultat
Mau : 8159
P : d'accord/ le deuxième/ Mar ?
Mar : 35 fois 100 moins 35 fois 2 est égal entre parenthèses 100 moins 2 fois 35
P : Lis ?
Lis : c'est juste
P : le troisième ?
(*sonnerie*)
Lis : 100 fois 23 moins 3 fois 23
P : Seb arrête de ranger/ Chl ?
Chl : 100 moins 3 fois 23
P : oui/ maintenant/ vous avez remarqué la différence avec tout ce qu'on a fait jusqu'à présent ?
Dav : y a des moins
Chr : des soustractions
P : ce sont des soustractions/ oui/ alors de la même façon que pour les additions on pourrait prouver qu'on a deux programmes de calculs équivalents avec des entiers en écrivant /in

extenso/ les additions/ on pourrait admettre que c'est vrai pour tous les autres nombres entiers

Classe : c'est pareil

P : oui /ce serait le même travail que l'on a fait/ c'est valable pour les soustractions et donc la propriété que l'on utilise ici c'est la distributivité de la multiplication mais non pas par rapport à l'addition/ mais=

Classe : à la soustraction

P : oui/ à la soustraction/ on l'écrit/ on dit que la multiplication est distributive par rapport à la soustraction et on l'admet

EXTRAIT DE CAHIER CONCERNANT LA SYNTHESE

DISTRIBUTIVITÉ DE LA MULTIPLICATION PAR RAPPORT À L'ADDITITION ET A LA SOUSTRACTION.

I. Des égalités pour montrer des procédés.

On a vu qu'on faisait certains calculs posé ou mental avec les mêmes types de procédés :

Exemple :

Calcul	procédé	Egalité montrant le procédé
12 × 203	*j'ai fait 12 fois 200 plus 12 fois 3*	12 × (200 + 3) = 12 × 200 + 12 × 3
58 × 16	58 × 16 348 + 580	58 × (6 + 10) = 58 × 6 + 58 × 10

Les égalités montrent une chose commune, on peut produire des égalités du même type :

Pour 387 × 13 on peut écrire 387 × (10 + 3) = 387 × 10 + 387 × 3

<u>Mais qu'est-ce qui prouve que cette écriture donne bien une égalité ?</u>

La preuve repose sur la définition de 387 × 13, c'est 13 fois 387, on ajoute 13 termes égaux à 387.

387 × 13 = 387 + 387 + 387 + 387 + 387 + 387 + 387 + 387 + 387 + 387 + 387 + 387 + 387 = (387 + 387 + 387 + 387 + 387 + 387 + 387 + 387 + 387 + 387) + (387 + 387 + 387) = 387 × 10 + 387 × 3

On pourrait faire cette preuve pour n'importe quel nombre entier.

On admet que notre technique permettant d'écrire des égalités à partir d'un produit de deux nombres entiers, reste valable pour tous les autres types de nombres (décimaux, relatifs –ce sera au programme de 4e, ...). On l'a prouvé dans le cas des produits de nombres entiers.

On peut donc écrire un théorème qui décrive cette chose commune pour n'importe quel nombre.

II Théorème

Le produit d'un nombre par une somme est égal à la somme des produits dece nombre par chequns des termes.

ANALYSE *A PRIORI* DES VARIABLES DIDACTIQUES DE LA SITUATION DE CALCULS DE PRODUITS

Liste des calculs donnés à effectuer mentalement :

7 × 32	17 × 12	13 × 102	35 × 98
46 × 3	68 × 11	15 × 104	23 × 97
512 × 3	43 × 21	12 × 203	25 × 19
		62 × 1001	41 × 199

Liste des calculs donnés à effectuer en posant :

43 × 12	534 ×22	57 × 403	435 × 374	56 × 5485
67 × 14	86 × 34	738 × 204	136 × 235	5485 × 56
58 × 16	1374 × 58	38 × 309	472 × 316	bonus :
	248 × 67	425 × 506		5832 × 341

Problème :

Effectuer le produit $\sum_{k=0}^{n} a_k 10^k \times \sum_{i=0}^{m} b_i 10^i$ de deux entiers *a* et *b* dont $(a_k)_k \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ et $(b_i)_i \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ sont les suites des chiffres.

V_1 : valeurs de (m;n)

Valeurs possibles pertinentes au regard de l'enjeu de la situation et de la forme des écritures de la distributivité engagée et de sa théorie :

- (0;0) : -absent- les chiffres sont confondus avec les nombres, le calcul n'appelle aucune connaissance autre que les résultats mémorisés des tables de multiplication, à moins que le défaut de connaissance engendre l'utilisation de l'addition itérée par exemple pour les retrouver.
- (0;1) : Le nombre de gauche dans l'écriture du produit n'a qu'un seul chiffre, de sorte que la décomposition du facteur sera nécessairement celui écrit à droite : la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition ou à la soustraction est « à gauche ». Ainsi, pour calculer 7×32 on peut utiliser $7 \times (30 + 2) = 7 \times 30 + 7 \times 2$ ou $7 \times (2 + 30) = 7 \times 2 + 7 \times 30$. Dans ce dernier cas, la technique de calcul mental est identique à celle du calcul posé partiellement de la sorte :

$$\begin{array}{r} 7 \\ \times \quad 32 \\ \hline 14 \\ 210 \end{array}$$

C'est-à-dire d'une part, que la décomposition ne concerne qu'un des deux facteurs : 32, puisque 7 n'a qu'un chiffre (et on a donc accès directement au nombre puisque le chiffre et le nombre se confondent). Ce facteur est celui qui est écrit à droite (et cela correspond au facteur écrit en bas que l'on décompose en somme dans les multiplications posées). On le décompose implicitement en 2+30. D'autre part, les produits partiels sont donc ceux du calcul mental : 2×7 puis 30×7. En revanche, l'algorithme diffère en calcul mental en ce sens où l'addition se fait en même temps, par le truchement de la retenue mémorisée, si le travail se conduit chiffre par chiffre comme nous l'avons vu précédemment (fausse technique de calcul mental). Le fait cependant que la technique de calcul mental soit suffisamment proche compte tenu du nombre de chiffres choisis pour les deux facteurs, est a priori de nature à favoriser l'entrée dans la tâche par tous, c'est-à-dire y compris par les élèves dont l'utilisation en acte de la distributivité n'est pas disponible. La théorie associée peut être ici constituée de la construction de la multiplication par addition itérée en utilisant l'associativité de l'addition :

7×32 = 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 = (7 + 7) + (7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7) = 7×2 + 7×30.

Notons cependant l'inversion de la décomposition de 32 en 2+30 qui ne correspond pas aux habitudes de décomposition de l'écriture des décimaux que l'on écrirait 30 + 2, si l'on écrit la procédure de gauche à droite dans l'ordre de ce que l'on effectue. Selon la familiarité avec les techniques de calcul anciennes, ici la multiplication par 10, la technique pourra être plus morcelée et correspondre à une écriture du type 7×2 + (7×3)×10, si l'on décide par exemple de décrire la technique pour multiplier par 10, parce qu'elle reste en partie problématique par exemple. Cette amplification praxéologique mettant en œuvre un sous-type de tâche au sein de la technique peut être de nature à faire obstacle à l'émergence de la distributivité à partir d'écritures comme 7×2 + (7×3)×10 masquant quelque peu la technologie de la praxéologie locale à l'étude. L'on pourrait par ailleurs considérer a priori que la théorie de cette praxéologie puisse se mêler, c'est-à-dire faire partie de la technologie pour un calcul comme 7×30 + 7 + 7 ou 7×10 + 7×10 + 7×10 + 7 + 7. Or, d'une part il semble raisonnable de supposer que les nombres en jeu correspondent à des produits très familiers aux élèves (ceux de la table de multiplication de 7), et d'autre part, la proximité avec la technique posée la mettant en jeu sans passer par ce que l'on considère ici comme des étapes intermédiaires de calcul (parce que non enjeu de la praxéologie visée) permet de supposer, en lien avec les analyses des manuels de primaire, que le procédé fondé sur le programme de calcul 7×2 + 7×30 pourra être collectivement partagé. Il correspond du reste à une stratégie optimale de résolution par rapport au retour à l'addition itérée.

- (1;0) : Inversement, le nombre de gauche étant à deux chiffres, et le facteur de droite à un seul chiffre, la distributivité implicitement employée est « à droite ». Exemple : pour calculer 46×3 on utilise (6+40)×3= 6×3 + 40×3 ou (40+6) ×3 = 40×3+6×3.

  Examinons plus avant la technologie dans le cas favorable au projet didactique où la technique est décrite comme effectuation des produits de 6 et de 3 puis de 6 et de 40 avant d'ajouter les résultats. Il peut y avoir, si l'on respecte l'ordre, une inversion dans les écritures : 46×3 = 6×3 + 40×3 qui correspond à une décomposition de 46 en 6+40, ne correspond pas aux écritures usuelles de décompositions décimales. Par ailleurs, le sens de l'écriture modifie quelque peu la technologie liée à la définition de la multiplication par addition itérée comme on l'obtient directement avec 7×32. L'écriture est alors une somme de 32 termes tous égaux à 7, et l'associativité de l'addition permet de reconstruire 2×7 + 30×7. Cependant, 46×3 = 46 + 46 + 46. Pour aboutir à 6×3 + 40×3 on sera conduit en toute rigueur à adjoindre à la théorie, la commutativité de l'addition avec, par exemple, la suite d'égalités suivantes : 46 + 46 + 46 = (40 + 6) + (40 + 6) + (40 + 6) = 6 + 6 + 6 + 40 + 40 + 40 = 6×3 + 40×3. D'un autre point de vue, la commutativité de la multiplication permet d'utiliser la même technologie que celle de 7×32 pour laquelle l'écriture sous la forme d'une somme est celle du facteur écrit à droite. Cependant, cette variable didactique (la décomposition du facteur écrit à droite ou à gauche) est susceptible de mettre à jour une possible adaptation des techniques, en lien avec les propriétés des opérations : commutativité et associativité.

- (3;0). De la même façon que précédemment, la décomposition concernera nécessairement le facteur *a* écrit à gauche. Cela engagera une certaine modification de la théorie comme précédemment, mais plus encore de la forme de la technologie. Exemple : Pour 512×3 on utilisera (2+10+500)×3 = 2×3 + 10×3 + 500×3 ou (500+10+2)×3 = 500×3 + 10×3 + 2×3.

  Le choix de trois chiffres entraîne l'apparition de trois produits et de trois termes pour l'écriture mettant en jeu la distributivité comme technologie principale, toujours avec cette inversion par rapport aux habitudes des écritures des décimaux : 512×3 = 2×3 + 10×3 + 500×3 si l'écriture respecte de gauche à droite l'ordre du travail technique en référence au calcul posé. Il se peut aussi que le calcul mental conduise à (500+10+2)×3 = 500×3 + 10×3 + 2×3.

- (2;2) : le nombre de chiffres étant identique, cette variable ne sera pas de nature à favoriser l'un ou l'autre des facteurs à décomposer. Notons néanmoins que pour les opérations posées la décomposition est nécessairement celle du facteur écrit à droite, à condition de ne pas commuter les facteurs au moment de l'écriture en posant, c'est-à-dire à condition d'écrire comme cela se fait usuellement le facteur de gauche en haut, et celui de droite en bas. Par ailleurs, cela correspond à une utilisation plus directe de la théorie de l'addition itérée correspondant au sens de la multiplication, de sorte que même pour le calcul mental, on peut supposer a priori que le facteur de droite sera privilégié pour la décomposition. D'autant que l'analyse des manuels de primaire montre que cet usage est le plus répandu. Cela n'exclut pas néanmoins, l'utilisation d'une distributivité à droite. D'autres variables pourront alors jouer sur ce choix, comme la familiarité avec les nombres dont on aura à effectuer les produits. Néanmoins l'émergence des deux techniques possibles conduit à envisager ce choix possible du facteur à écrire comme une somme et à envisager la non-unicité de l'utilisation de la distributivité (et de la technique).

  Exemple : 17 × 12 pourra conduire à utiliser implicitement la distributivité à gauche 17× (2+10) = 17× 2 + × 17× 10 (ou 17× (10+2) = 17× 10 + × 17× 2) ou à droite (10+7)× 12 = 10× 12 + 7× 12.

La technique pour évaluer ce produit peut a priori différer selon les connaissances des nombres des élèves, en particulier de produits mémorisés. Cependant le choix des chiffres 1 et 2, constituant le facteur de droite -i.e celui que l'on décompose en usant de l'addition itérée , tout comme pour le produit posé- engage peut être davantage à effectuer le programme de calcul 17 × 2 + 17 × 10, si le produit par 2 est mémorisé ou suffisamment rapidement accessible pour qu'il ne soit pas au devant de la scène au moment de la description de la technique. Cela suppose également que la multiplication par 10 soit une tâche suffisamment routinisée pour qu'elle ne soit pas objet de description, afin de ne pas noyer dans la technique, la composante liée à la distributivité. Si ces connaissances ne sont pas disponibles a priori, la technique pourra en effet se décliner comme 17 + 17 + 17 × 10 ou même avec des déclinaisons faisant appel à d'autres doubles mémorisés 15 × 2 + 2 × 2 + 17 × 10. De la même façon que pour les produits précédents, le travail sur les chiffres en usant implicitement des propriétés de la numération décimale de position, peuvent également masquer la distributivité visée. Ce sera le cas en particulier pour le produit par 10 consistant à écrire 0 à droite de l'écriture du nombre que l'on multiplie par 10.. D'autres programmes de calcul pourront également permettre d'obtenir le résultat, comme 10×12 + 7×12 auquel cas le second produit pourra encore être calculé en 7×10 + 7×2, ce qui aboutit à un usage itéré de la distributivité, ou encore le programme de calcul fondé sur la double distributivité : 10×10 + 10×2 + 7×10 + 7×2.

- (n;3) ou (n;4) : Dans le cas des techniques mentales, le choix du facteur à décomposer implicitement reposera sur d'autres variables comme on l'a vu précédemment. Néanmoins, dans le cas des techniques posées, et à condition toujours de ne pas commuter les facteurs par économie, ces valeurs pour m sont de nature à préparer une généralisation de la distributivité pour une somme à 3 puis 4 termes (si aucun chiffre de b n'est nul). Exemple : 435 × 374 utilisera 435 × (4+70+300) = 435 × 4 + 435 × 70 + 435 × 300.

$$
\begin{array}{rr}
 & 435 \\
\times & 374 \\
\hline
 & 1740 \\
 & 30450 \\
 & 130500
\end{array}
$$

V_2 : Relation d'ordre entre m et n

Valeurs possibles de cette variable : = > ou <

- n = m : De même pour le cas de la valeur (2;2) de V_1, d'autres variables pourront influencer la technique et la forme de la technologie.
- n < m : La stratégie a priori la plus économe consiste soit à utiliser la distributivité à

gauche, car on effectuera moins de produits partiels, et moins de sommes, - à condition qu'aucun des chiffres ne soit nul-, soit à commuter les facteurs dans le cas de la technique posée pour les mêmes raisons. Le premier modifie la technologie dans sa forme comme nous l'avons vu précédemment, le second la théorie qui comprend alors la commutativité de la multiplication.

- n>m : De la même façon, la stratégie a priori la plus économe consistera à utiliser la distributivité à droite, pour les mêmes raisons que précédemment.

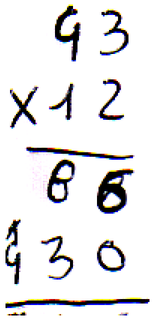
V_3 : Présence ou absence de retenues dans la technique

Nous considérons ici soit que la technique mentale soit une fausse technique mentale utilisant l'algorithme posé, soit la technique de l'algorithme posé, c'est-à-dire qu'intervient à un moment donné la technologie de la numération soutenant le travail chiffre par chiffre.

- Absence de retenues : Exemple : 512×3.

  Les choix des chiffres ici n'engagent pas de retenues, de sorte que la concaténation décrite plus haut des produits des chiffres 15, 3 et 6 donne le résultat correct. Cela peut encore davantage masquer les opérations, la somme en particulier des produits partiels, et la valeur des chiffres implicitement utilisée pour écrire le résultat. Cependant, l'absence de retenues peut permettre de retrouver le nombre assez directement via la valeur du chiffre et lever ici l'obstacle de la numération pour accéder à la technologie visée. En effet, si l'écriture du résultat peut se faire dans la dimension linguistique par concaténation des écritures des chiffres : on met le 6 à droite, puis le 3 à sa gauche, et enfin le 15 encore à gauche de l'écriture, l'absence de retenues peut donner l'accès aux nombres, c'est-à-dire aux produits partiels, à partir de l'écriture du résultat, à condition de retourner sur le sens de cette écriture. On obtient en effet la suite de symboles « 1536 » qui par lecture donne mille cinq cent trente six, et le lien avec les produits peut être retrouvé : 3 correspond à 3 dizaines, c'est-à-dire au nombre 30 que l'on obtient en multipliant 10 par 3, le travail sur le chiffre 1 correspond au produit par 10, car sa valeur est celle des dizaines. La mise à jour de ce lien, ou plus exactement des nombres, nécessaire pour accéder à la technologie de la distributivité, peut alors a priori être aisément retrouvée, à condition sans doute que le professeur le demande en calcul mental.

  En calcul posé cependant, l'absence de retenue peut donner un autre moyen d'accès aux produits partiels écrits, par reconstitution du sens grâce à connaissance des nombres ou des chiffres et par proximité ostensive. Elle peut être un levier facilitant pour la reconstruction des produits partiels lorsqu'ils ne sont pas disponibles ou même mobilisables, c'est-à-dire lorsque les connaissances anciennes sont insuffisantes de ce point de vue.

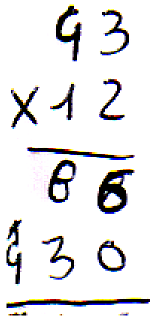
Un autre exemple :  86 peut être éventuellement identifié en référence à l'algorithme chiffre par chiffre : c'est le résultat de 3×2 concaténé à celui de 4×2. L'absence de retenue évite donc une somme, et peut peut-être permettre de reconstruire plus aisément 86 comme un produit, dont la familiarité avec les doubles peut aussi jouer un rôle tout comme celle de 430 avec les produits par 10. Nous y reviendrons pour la variable V_4 .

- Présence de retenue : Nous avons analysé plus haut comment la présence de retenue peut faire obstacle à la fois au passage d'une description chiffre par chiffre aux nombres et à la fois à l'identification des opérations en jeu.

V_4 : valeurs particulières des chiffres ou des nombres / Familiarité connaissances des nombres.

Valeurs possibles pertinentes des chiffres du nombre décomposé en somme (nous choisissons *b* pour les analyses pour faire simple) :

- $b_0 = 1$: Exemple : 43×21
  De la même façon que pour le produit précédent, compte tenu des chiffres 2 et 1, il paraît a priori plus probable que le calcul sera fondé sur la décomposition de 21 en 20+1 plutôt que sur celle de 43 en 40+3 ou 3+40 ou à partir de l'addition itérée. Le choix d'un facteur 2 et de l'absence de retenues pour calculer le double de 43 peut a priori permettre de s'affranchir de technique intermédiaire pour les calculs des produits partiels : 43×20 et 43×1 dans le cas de l'utilisation implicite de la distributivité visée. Cependant, la présence du 1 comme chiffre des unités peut conduire à remplacer cette technologie par la théorie de l'addition itérée : en associant les 20 premiers termes de la somme en extension de 43×21, on obtient par définition : 43×20 + 43.

- $b_i = 1$: De la même façon que pour l'absence de retenue, la présence d'un chiffre autre que celui des unités égal à 1 peut être un levier pour donner accès aux produits partiels directement en lien avec la numération de position. C'est le cas par exemple pour le produit posé déjà observé : 

430 peut en effet être identifié comme 43×10 par familiarité aussi avec la correspondance entre la règle des zéros dans la dimension linguistique et le produit par 10 par exemple.

- $b_i = 0$: Nous avons vu plus haut en lien avec les ostensifs comment la présence d'un zéro comme chiffre de b peut engager l'écriture d'une ligne de nature peut être à faire obstacle pour certain à l'identification des produits partiels et donc à celle de la technologie sous-jacentes. Dans le cas du calcul mental néanmoins, cela permet aussi d'obtenir une décomposition d'un nombre sous la forme d'une somme dont le nombre de termes n'est pas égal au nombre de chiffres, et peut être de nature à mettre à jour une première distance avec la décomposition décimale -du moins chiffre par chiffre sans omission des zéros-. C'est peut être une certaine extension du domaine d'usage de la distributivité du point de vue des nombres pour renforcer le lien avec les nombres plutôt que les chiffres et la numération. Exemple : 13 × 102 pourra conduire à utiliser 13×(100 + 2) = 13×100 + 13×2, et non 13×(100 + 0 +2).
  Cependant, la présence du zéro peut introduire de nouveau un obstacle lié à la numération. Exemple : Pour 13 × 102 ou 15 × 104 ou 12 × 203 ou 62 × 1001

  Pour les trois premiers produits, la concaténation des écritures des produits par les chiffres permet d'obtenir des résultats justes comme par exemple 13×1 et 13×2 juxtaposés donne 1326, sans référence aux nombres 100 et 2 ou à la valeur du chiffre 1. Cependant le programme de calcul visé est celui de 13×2 + 13×100 ou 13×100 + 13×2. Cette concaténation est susceptible cependant de se révéler inefficace sans référence à la dimension mathématique pour 62×1001 en donnant 6262.

- $b_i = 2$:
- $b_1 = b_0$:

$$\begin{array}{r} 534 \\ \times \quad 22 \\ \hline 1068 \\ 10680 \end{array}$$

Le choix d'un nombre composé de chiffres identiques peut de nouveau être un levier pour différencier la valeur des chiffres écrits et donc accéder aux nombres de chaque ligne. Ce afin de lever l'obstacle des ostensifs des points par exemple.

Le choix d'un facteur égal à 2 peut aussi permettre une identification rapide et aisée de la multiplication effectuée dans son ensemble, d'après les ostensifs des chiffres (i.e. sans utiliser la procédure des multiplications de chiffres avec retenues) : lien entre 534 et 1068 ou comme précédemment entre 43 et 86. Ce, afin de permettre à ceux qui n'ont pas véritablement conscience de la technologie (i.e. des opérations effectuées lors de l'algorithme à chaque ligne) d'avoir d'autres moyens d'y accéder.

Un cas particulier : $b_0 = b_1 = 1$: Exemple : 68 × 11

Le choix des chiffres du facteur de droite conduit à supposer que la technique sera a priori fondée sur 68 × 1 + 68 × 10, ou éventuellement 68 × 10 + 68 en s'appuyant implicitement sur l'addition itérée et l'associativité de l'addition (notons qu'alors l'écriture correspond à l'ordre usuel de décomposition pour les écritures de décimaux), plutôt que sur une décomposition du facteur 68 en 60+8 pour ensuite effectuer 60×11 + 8×11. Une autre procédure usant des spécificités de la numération de position peut aussi, dans la dimension linguistique essentiellement consister à « écarter » les chiffres 6 et 8 et à écrire entre la somme de ces chiffres, à condition de rajouter la retenue au chiffre 6, on obtient le résultat exact. Ce procédé est en réalité fondé sur les deux processus précédents en s'appuyant sur les spécificités de la numération de position : on obtient des dizaines en effectuant le produit par 10 du chiffre des unités, ou en multipliant par 1 le chiffre des dizaines, donc en ajoutant les chiffres des dizaines et des unités. Si la somme est supérieure à 10, alors le chiffre des dizaines qui est dizaine de dizaine, a une valeur dix fois plus grande, ce qui correspond aux centaines. En écrivant ab un nombre à deux chiffres (a et b sont dans $[\![0;9]\!]$) on a ab×11 = ab×10 + ab : le chiffre des unités est b, le chiffre des dizaines est celui des unités de $10b+a$. Bien sûr un usage non contrôlé de cette technique par extension au cas où la somme des chiffres est inférieure à 10 peut conduire à l'écriture 6148 erronée.

- Familiarité : Quelques valeurs possibles : a ou b = 25, 15 ou 17 entre autres.
  Le choix de certaines valeurs pour les chiffres comme 1, 2, 3 ou 4 dont les tables de multiplication sont a priori bien connues doivent permettre de ne pas créer de difficulté supplémentaire ou d'augmentation de la technique comme on l'a vu. Ainsi en va-t-il du choix de facteurs dont certains produits sont censés être mémorisés comme 15×4 ou comme 25×2. Cela permet a priori d'évacuer des techniques de calculs pour les produits intermédiaires supposés non problématiques (ou moins problématiques) qui ne sont pas un enjeu et pourraient détourner l'attention sur la technologie visée. Ainsi en est-il de (15×2)×2 ou (15+15)×2, pour 15×4 ou encore de 3×2 + 10×2 pour 13×2.

V_5 : Compléments à 100 ou à 200 de a ou b

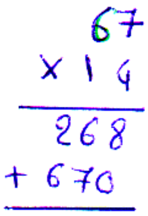
Valeurs possibles : $100 - b < 4$ ou $200 - b = 1$

Ces choix pour des produits à effectuer mentalement engagent une connaissance des compléments à 100 ou à 200, qui sont par ailleurs utilisées dans plusieurs techniques de calcul mental (comme celle d'addition ou de soustractions engageant des étapes à la centaine par exemple). Cette familiarité doit permettre de faciliter la convocation de la décomposition du second facteur sous la forme d'une différence. D'autant que, comme nous l'avons vu, la technologie de la distributivité de la multiplication par rapport à la soustraction est alors plus efficace, moins coûteuse que celle de la multiplication par rapport à l'addition pour des calculs comme : 35 × 98 ; 23 × 97 ;25 × 19 ou 41 × 199

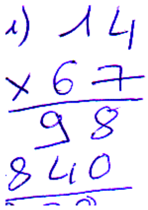
> Pour ces derniers calculs, le temps limité imparti annihile a priori des décompositions additives pour les techniques comme 35×90 + 35×8. Le choix des chiffres 9, 8 et 7 aussi. Les facteurs écrits à gauche font par ailleurs partie des nombres dont on connaît des produits comme 25 ou 35 ou des nombres dont les produits par 2 sont a priori aisément accessibles. Plus encore les compléments à 100 des facteurs ou des produits partiels comme 70 ou 69 ou 25 ou 41 sont a priori soit familiers ou mémorisés soit aisément accessibles. De sorte que les procédures a priori favorisées soient celles fondées sur la distributivité de la multiplication par rapport à la soustraction : 35×100 – 35×2 (notons ici que l'inversion des écritures des termes n'est plus possible) ou 23×100 – 23×3, 25×20 – 25×1 ou 25×20 – 25, 41×200 – 41×1.

V_6 : a×b et b×a inversion des facteurs provoquée par les listes différenciées données à chaque groupe.

Le choix de l'ordre de l'écriture des facteurs engage deux décompositions possibles, car en posant l’opération c’est le facteur écrit en dessous que l’on décompose comme une somme :



ou



. Cela permet de préparer le caractère non unique pour un produit donné de l’utilisation implicite de la distributivité selon le facteur que l’on choisit de décomposer. Ainsi le premier produit posé correspond à l’égalité 67×(10+4) = 67×10 + 67×4 et le deuxième à 14×(60+7) = 14×60 + 14×7.